Energia Relativística

* Temos $\vec{p} = m\vec{v}$ e $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ $\Rightarrow E_c = ?$

* Mesma definição $\Rightarrow$ Trabalho para levar a partícula da velocidade zero (repouso) a $\vec{v}$ sob ação de $\vec{F}$ constante.

$$E_c = \int_0^s F\,ds = \int_0^s \frac{d}{dt}(mv)\,ds = \int_0^t \frac{d}{dt}(mv)\,v\,dt =$$

$$= \int v\,d(mv) = \int (v^2 dm + mv\,dv) \quad ; \quad m \text{ e } v \text{ são variáveis}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{m_0^2}{m^2} \quad \text{(derivando)}$$

$$-\frac{2v\,dv}{c^2} = -\frac{2m_0^2\,dm}{m^3}$$

$$\therefore v\frac{dv}{c^2} = \frac{m_0^2\,dm}{m^3} = \frac{\cancel{m^2}(1-v^2/c^2)}{m^{\cancel{3}}}dm = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{dm}{m}$$

$$\therefore mv\,dv = (c^2 - v^2)\,dm$$

$$\Rightarrow E_c = \int [v^2 dm + (c^2-v^2)\,dm] = c^2\int_{m_0}^{m} dm = (m-m_0)c^2$$

$$E_c = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 \Rightarrow \boxed{E = mc^2}$$

$$E = E_c + E_0$$

* A energia cinética relativística é o aumento da massa devido ao movimento da partícula multiplicada por c^2

E_c = significa que a massa difere da massa de repouso

$$E_c = \underbrace{(m - m_0)}_{\text{diferença de massa!}}c^2$$

Para $v \ll c$ $\Rightarrow$ mostrar que $E_c = \frac{1}{2} m_0 v^2$

2

$$E_c = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right]$$

Expansão: $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} \underset{x \ll 1}{=} 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1!} + \frac{3}{4} \cdot \frac{x^2}{2!} + \cdots$

$$E_c = m_0 c^2 \left[\cancel{1} + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + \cdots - \cancel{1} \right] = m_0 v^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \cdots \right]$$

$$\lim_{\frac{v}{c} \to 0} E_c = \frac{m_0 v^2}{2} \quad \Rightarrow \quad E_c = \frac{1}{2} m_0 v^2 \text{ !! (clássica!)}$$

* Resultado importante:

- aumento da energia cinética $\Rightarrow$ aumento de sua massa.
- Qualquer forma de energia e não apenas para a energia cinética
- Uma variação na energia total corresponde a uma variação de massa do sistema

$$\therefore \quad E - E_0 = mc^2 - m_0 c^2$$

$E \equiv$ energia total

$E_0 \equiv$ energia de repouso

$E = mc^2$ (Einstein) $\longleftrightarrow$ equivalência massa-energia

* Para um sistema de partículas a energia de repouso E_0 e a massa de repouso m_0 será a energia total e a massa total quando o centro de massa está em repouso.

* A Lei de Conservação de Massa-Energia é válida em qualquer referencial inercial.

* Momento muito mais importante que $\underline{v}$:

* Expressar E em termos de p:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow m^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2 \Rightarrow m^2\left(\frac{c^2-v^2}{c^2}\right) = m_0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2c^2 - m^2v^2 = m_0^2c^2 \xRightarrow{\times c^2} m^2c^2 - m^2v^2 = m_0^2c^2 \quad (\times c^2)$$

$$m^2c^4 - m^2v^2c^2 = m_0^2c^4$$

$$(mc^2)^2 - (pc)^2 = (m_0c^2)^2$$

$$\boxed{E^2 = (pc)^2 + E_0^2}$$

* Limite p/ $v \ll c$

$$\left.\begin{aligned} m &\simeq m_0 \\ p &\approx m_0 v \\ E_c &= \frac{1}{2} m_0 v^2 \end{aligned}\right\} \quad \frac{E_c}{E_0} = \frac{\frac{1}{2} m_0 v_0^2}{m_0 c^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1$$

energia cinética << energia de repouso

$v \simeq c$

$$\left.\begin{aligned} m &\gg m_0 \\ E &\gg E_0 \\ p &\approx \frac{E}{c} \end{aligned}\right\} \quad E_c \simeq E$$

Na próxima aula

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\boxed{p = \frac{h}{\lambda}}$$

* Partículas de massa de repouso zero!

$$m_0 = 0 = m\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$v = c$

move-se com a velocidade da luz

$$m_0 = m\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$m_0 = 0 \Rightarrow E = pc$$

$$mc^2 = pc \Rightarrow p = mc \quad (v = c)$$

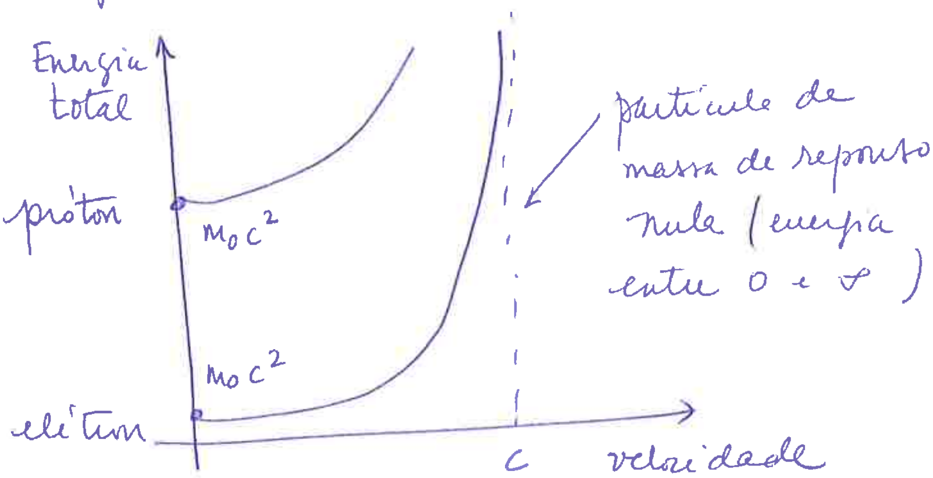
$m_0 = 0$

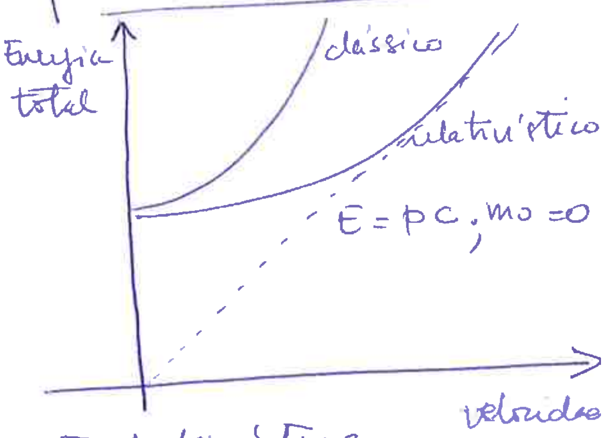
* Partícula de energia não nula move-se c/ a velocidade da luz deve ter massa de repouso zero.

$E = mc^2 \Rightarrow m = \dfrac{E}{c^2} \neq 0$ apesar da massa de repouso ser nula

* Como uma partícula de massa de repouso nula tem energia de repouso nula, sua energia total é puramente cinética (relativística!)

$$\boxed{E_c^2 = (pc)^2 + E_0^2}$$





Relativística

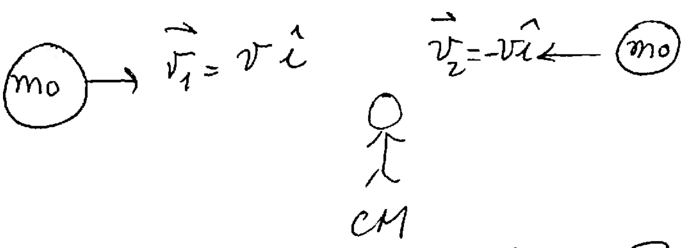
$$E_c = \sqrt{(pc)^2 + E_0^2}$$

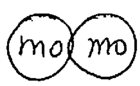
clássica

$$E_c = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{m_0^2 v^2}{2m_0} = \frac{p^2}{2m_0}$$

Massa ↔ Energia (Sistemas não ligados e ligados)

Colisão entre 2 partículas





$M_0 = ?$

Colisão perfeitamente inelástica

Conservação de Momento

$\vec{P}_i = 0$ e $\vec{P}_f = 0$ (partícula final em repouso)

$E_{total_1} = mc^2$ (energia cinética + repouso)

$E_{total_2} = mc^2$ (" ")

$\overline{2mc^2}$

$E^2 = Mc^2 = (pc)^2 + E_0^2$

$pc = 0 \Rightarrow E = \underbrace{E_0}_{M_0 c^2}$

Conservação de energia $\Rightarrow 2m\cancel{c^2} = \underbrace{M_0 \cancel{c^2}}$

energia de repouso pois CM está parado.

$m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

$M_0 = \dfrac{2m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{M_0 > 2m_0}$

$\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} < 1$

A energia cinética das 2 partículas que colidem se torna parte da energia de repouso das partículas combinadas.

Exemplo: Satélites $\Rightarrow$ Dois satélites, cada um com uma massa de repouso de 4,000 kg e movendo-se em órbita em sentidos opostos a uma velocidade de 8,0 km/s em relação a um observador na Terra, colidem e grudam um no outro. Calcule o aumento na massa de repouso do sistema.

Como os satélites têm momentos iguais em módulo, mas com sentidos opostos, o momento total é zero. Portanto, após a colisão o objeto composto está parado. Como a energia total é conservada, a energia cinética dos satélites que colidem é transformada em massa de repouso e

Aumento da massa $\Delta m = \dfrac{2 E_c}{c^2}$

E_c é a energia cinética inicial de cada satélite

Como $v = 8{,}0\ \text{km/s} \ll c$ podemos escrever $E_c = \frac{1}{2} m_0 v^2$

$$\therefore \quad \Delta m = \frac{2 \times \left(\frac{1}{2} m_0 v^2\right)}{c^2} = m_0 \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

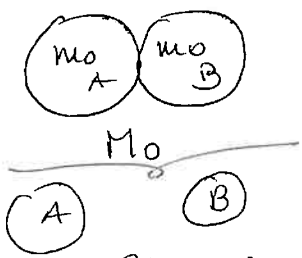
$$\Delta m = 4{,}000 \left(\frac{8 \times 10^3\ \text{m/s}}{3 \times 10^8\ \text{m/s}}\right)^2 = 2{,}84 \times 10^{-9}\ \text{kg} = \underline{2{,}84\ \mu g}$$

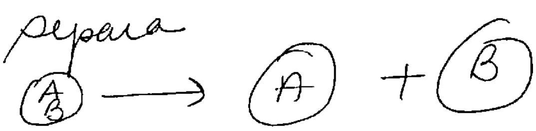
Sistemas Ligados

A quebra do sistema em suas componentes separadas exige trabalho ⇒ deve-se fornecer energia ao sistema

E_b = energia a ser fornecida ≡

≡ energia de ligação





Conservação de massa-energia

$$M_0 c^2 + E_b = m_{0A} c^2 + m_{0B} c^2 \qquad \underline{E_b > 0}$$

$$M_0 + \frac{E_b}{c^2} = m_{0A} + m_{0B} \Rightarrow$$

$$M_0 = (m_{0A} + m_{0B}) - \frac{E_b}{c^2} \Rightarrow \boxed{M_0 < m_{0A} + m_{0B}}$$

só para forças nucleares fortes

Zero de energia

Partículas separadas no infinito $\to E_{mec} = 0$

Quando juntas: $\underbrace{E_m < 0}$ (massa menor)

deve-se dar energia para separar as partículas e fazer com que a energia suba a zero.

Exemplo: Átomo de hidrogênio

$$M_{0H} + \frac{E_b}{c^2} = m_{0e} + m_{0p}$$

energia de ligação !!

$$m_{0e} + m_{0p} - M_{0H} = \frac{13,6}{c^2} \Rightarrow \text{Variação relativa na massa}$$

$$\frac{E_b/c^2}{M_{0H}} = \frac{(13,6) \times 1,6 \times 10^{-19} (J/eV)}{\underbrace{(1,67 \times 10^{-27})}_{M_{0H}} \times (3 \times 10^8)^2} = \underbrace{1,44 \times 10^{-8}}$$

mensuráveis só em reações nucleares

Unidades e Cálculo na Mecânica Relativística

Erro menor que 1% no cálculo

	Condição	grandezas
Região clássica	$\frac{E_c}{E_0} < 0,01$ ou $v/c < 0,1$	$E_c = \frac{1}{2} m_0 v^2$ $p = m_0 v$

(8)

Região ultra-relativística

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E}{E_0} > 7 \\ \frac{E_c}{E_0} > 6 \\ v/c > 0{,}99 \end{array} \right. \qquad E = pc$$

Unidade de energia $\Rightarrow$ elétron-volt

$q = e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,C$

$ddp = V = 1V$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1\,keV = 10^3\,eV \\ 1\,MeV = 10^6\,eV \\ 1\,GeV = 10^9\,eV \end{array} \right.$$

Unidade de momento $\frac{eV}{c}$ pois $[pc] = [\text{energia}]$

Unidade de velocidade $\frac{v}{c}$ (0 e 1)

Exemplo $E_c = ?$ $p = ?$

$1e^- \Rightarrow E_0 = 0{,}5\,MeV$ $v = \frac{1}{100} c$

Caso clássico

$$E_c = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{v^2}{2c^2} m_0 c^2 = \frac{E_0}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

$$E_c = \frac{0{,}5 \times 10^6}{2} \left(\frac{1}{100}\right)^2 = 2{,}5 \times 10^5 \times 10^{-4} = 25\,eV$$

$$p = m_0 v = m_0 c^2 \left(\frac{v}{c^2}\right) = \frac{E_0}{c} \left(\frac{v}{c}\right)$$

$$p = \frac{0{,}5 \times 10^6}{c} \left(\frac{1}{100}\right) \Rightarrow p = \frac{5\,keV}{c}$$

Massa $\Rightarrow$ unidade de massa $\Rightarrow u$

$$u = \frac{1}{12} \underbrace{m_{^{12}C}}_{1\,\text{átomo}} = \frac{1}{12} \left(\frac{12\,g}{6{,}02217 \times 10^{23}} \right) = 1{,}661 \times 10^{-27}\,kg$$

$$1u = \frac{931{,}5\,MeV}{c^2}$$

Relação unidade de massa - energia

$$E = mc^2 \Rightarrow E = (1u)c^2 = \frac{1{,}661 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2}{1{,}602 \times 10^{-19} \frac{V}{eV} \times \frac{10^6}{MeV}} = 931{,}5\,MeV$$

energia de repouso do elétron $= 0{,}51\,MeV$

energia de repouso do próton $= 938{,}26\,MeV$

$m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}\,kg$ $\qquad m_p = 1{,}6726 \times 10^{-27}\,kg$