Dinâmica Relativística

Momento e Energia

Cinética ⇒ espaço, tempo, velocidade

Dinâmica ⇒ momento, massa, força e energia.

(diferença entre a dinâmica clássica e relativística)

1) A invariância das leis da Física.

$c = \underline{cte}$ (fato experimental estabelecido ⇒ mudanças nas regras de combinações de v's)

$\vec{p}$ e E modificadas (diferem das suas correspondentes clássicas)

Questão: Encontrar a forma correta para expressar essas grandezas (v se modifica ⇒ p e $E_{\text{cinética}}$ ≠s)

"As leis da Física são as mesmas em todos os referenciais inerciais"

(i) c é invariante ⇒ tem o mesmo valor para todos os observadores.

(ii) as leis da Física são covariantes ⇒ têm a mesma forma matemática para todos os observadores.

* Referencial inercial: vale a 1ª lei de Newton ⇒ lei da Inércia

– Teoria da relatividade especial (restrita) ⇒ referenciais inerciais

– Teoria da relatividade geral ⇒ referenciais acelerados

"Um referencial é tão bom quanto o outro"

- conservação de momento
- conservação de energia

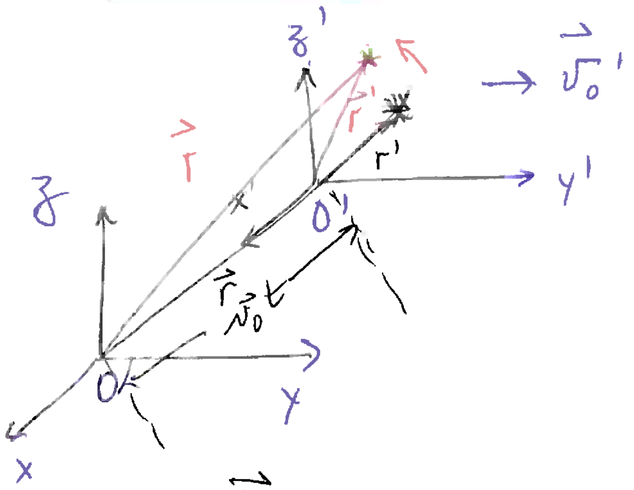
Exemplo: colisões de bola numa mesa de bilhar

$\vec{P}$ e E se conservam

valores de $v \neq s$ no trem e na Terra.

(Clássico)

* Conservação de momento se aplica a todos referenciais inerciais



$$\vec{OO'} + \vec{r}\,' = \vec{r}$$

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{v}_{0'}\, t$$

$$\left\{ \vec{F}_{ext} = 0 \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \quad \frac{d\vec{v}\,'}{dt} = 0 \right.$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} + \vec{v}_0\,' = \vec{v}\,' + \vec{v}_0\,'$$

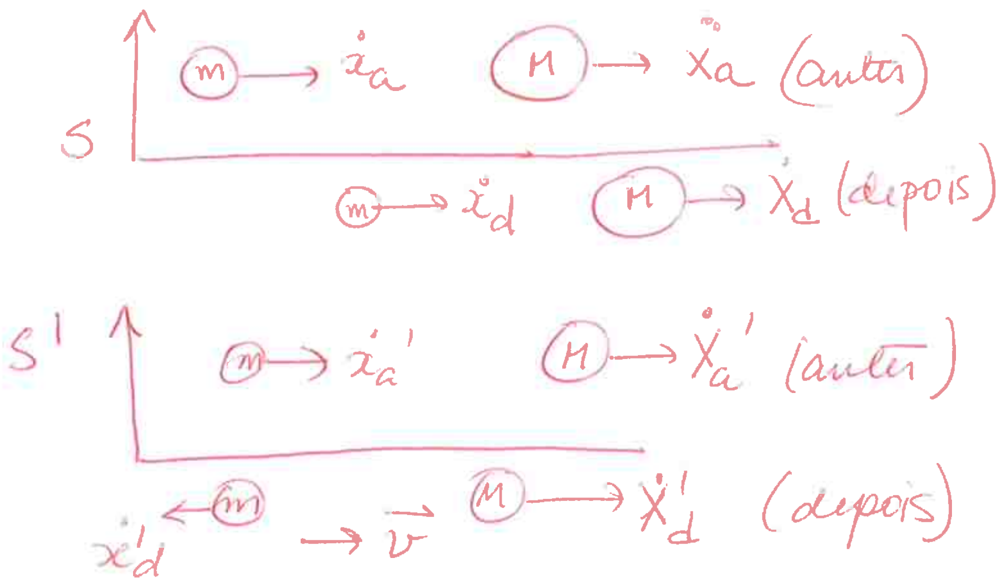
$\vec{P}$ se conserva $\Rightarrow$ $m\vec{v}_i = m\vec{v}_i\,' + \cancel{m\vec{v}_{0'}}^{\,0} =$

$(\vec{P}_i = \vec{P}_f)$

$$= m\vec{v}_f = m\vec{v}_f\,' + \cancel{m\vec{v}_{0'}}$$

$m\vec{v}_1\,' = m\vec{v}_f\,' \Rightarrow \vec{P}\,'$ se conserva

Exemplo: Colisão Frontal



$S \Rightarrow m\dot{x}_a + M\dot{X}_a = m\dot{x}_d + M\dot{X}_d$

$S' \Rightarrow m\dot{x}_a' + M\dot{X}_a' = m\dot{x}_d' + M\dot{X}_d'$

$\dot{x}_a' = \dot{x}_a - v$

$\dot{x}_d' = \dot{x}_d - v$

$\dot{X}_a' = \dot{X}_a - v$

$\dot{X}_d' = \dot{X}_d - v$

$\therefore P(S')$ se conserva

(3)

* Idem para $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d}{dt}(\vec{v}' + \vec{v}_{0'}) =$

$$= m\frac{d\vec{v}'}{dt} + \cancel{m\frac{d}{dt}\vec{v}_{0'}}^{\,0} = m\vec{a}' = \vec{F}'$$

$$E_{cinética} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\vec{v}' + \vec{v}_{0'})^2$$

$$E_i = \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}m(\vec{v}_i' + \vec{v}_{0'})^2 = \frac{1}{2}mv_i'^2 + \frac{1}{2}mv_{0'}^2 + m\vec{v}_i'\cdot\vec{v}_{0'}$$

$$E_f = \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}m(\vec{v}_f' + \vec{v}_{0'})^2 = \frac{1}{2}mv_f'^2 + \frac{1}{2}mv_{0'}^2 + m\vec{v}_f'\cdot\vec{v}_{0'}$$

Se não há forças externas $m\vec{v}_i' = m\vec{v}_f'$

$\therefore$ $E_i' = E_f'$ ✓

$$U_{potencial} = E_p = mgy = m\underbrace{g(y' + y_0)}_{\text{definida a menos de 1 constante}}$$

só depende das coordenadas relativas que não mudam.

* As formas clássicas das leis básicas não são invariantes frente às transformações relativísticas

Estratégia { c é cte p/ todos os observadores
As leis da Física são as mesmas para todos os observadores inerciais

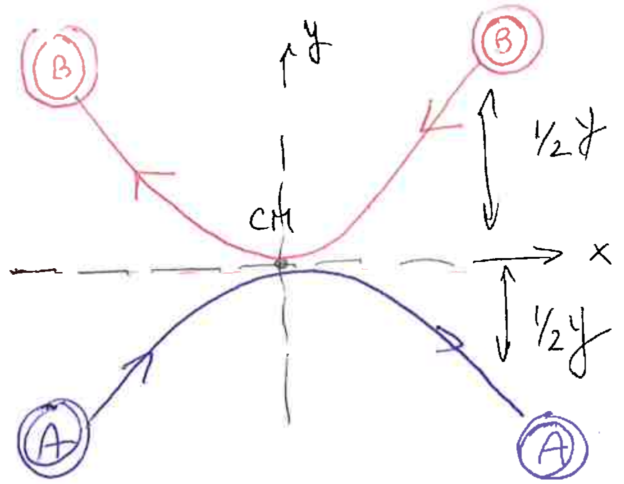
* Massa e momento

$\vec{p} = m\vec{v}$ { m = massa relativística
$\vec{v}$ = velocidade relativística

$v \ll c \Rightarrow \vec{p} = m_0\vec{v}$ onde m_0 = massa de repouso.

Exemplo $\Rightarrow$

* Colisão Elástica entre 2 objetos idênticos



mesma massa de repouso $m_0 =$
$= m_A = m_B$

Há conservação de momento

Partícula A (lançado e recebido) $= t_A$
Partícula B (" " ") $= t_B$
$\parallel$
CM $\qquad t_{CM}$

intervalo de tempo observado no referencial do CM.

O momento total no referencial do CM é nulo:

$$CM \Rightarrow \vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} \quad e \quad \vec{V}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{V}_{CM} \\ \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{V}_{CM}\end{array}\right\} \text{ velocidades relativas no referencial CM}$$

No laboratório $\quad \vec{p}^L = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \Rightarrow \dfrac{\vec{p}^L}{M} = \dfrac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{M} = \vec{V}_{CM} \Rightarrow$

$$\vec{p}^L = M\vec{V}_{CM} \Rightarrow \boxed{\vec{p}^L = \vec{P}_{CM}}$$

No CM: $\quad m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1(\vec{v}_1 - \vec{V}_{CM}) + m_2(\vec{v}_2 - \vec{V}_{CM}) =$

$$= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 - (m_1+m_2)\vec{V}_{CM} =$$

$$= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 - \cancel{(m_1+m_2)}\frac{(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)}{\cancel{(m_1+m_2)}} = 0$$

referencial de momento nulo

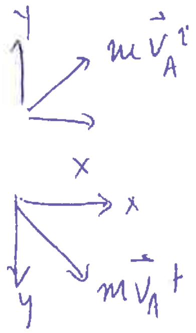
O momento total no referencial do CM é nulo. $\quad \vec{P}_{CM} = 0$

$$\Delta P_{yA} + \Delta P_{yB} = 0 \quad \text{pois} \quad m_A v_{yA}^i + m_B v_{yB}^i = m_A v_{Ay}^f + m_B v_{yB}^f$$

$$\underbrace{-m_A(v_{yA}^f - v_{yA}^i)}_{-\Delta P_{yA}} = \underbrace{m_B(v_{yB}^f - v_{yB}^i)}_{\Delta P_{yB}}$$

Partícula A e B percorrem 1/2 y antes e depois da colisão

$$v_{yA} = v_{yB} = \frac{y}{T_{CM}} \quad \text{(lançadas e recebidas)}$$

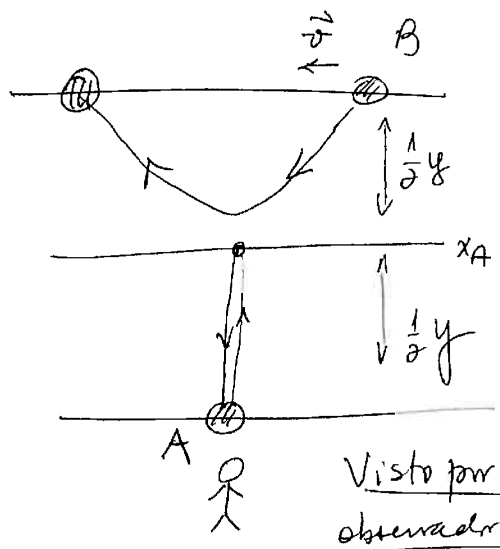


$$\left.\begin{aligned} \Delta P_{Ay} &= 2m_A v_{yA} = \frac{2m_A Y}{T_{CM}} \\ \Delta P_{By} &= 2m_B v_{yB} = \frac{2m_B Y}{T_{CM}} \end{aligned}\right\} \quad \frac{2m_A Y}{T_{CM}} = \frac{2m_B Y}{T_{CM}}$$

$m_{A,B} \equiv$ massas relativísticas

$m_A = m_B$

pela simetria da colisão



Visto por um observador que se move no eixo X junto com A

B se move com velocidade $\vec{v}$

"A parado"

Não há contração do espaço na direção ⊥ ao movimento relativo.
(x_A, Y_A e x_{CM}, Y_{CM})

O tempo entre o recebimento das 2 partículas será diferente: A é lançado e recebido no mesmo local e B é lançada à direita e recebida à esquerda.

$T_0 \equiv$ tempo próprio, tempo entre o recebimento e lançamento da partícula A.

$$T \equiv \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$ $\equiv$ tempo entre o lançamento e o recebimento da partícula B, observado por A. $T > T_0$

Para o observador A a sequência de eventos é:

1 B lança B   3 A recebe A

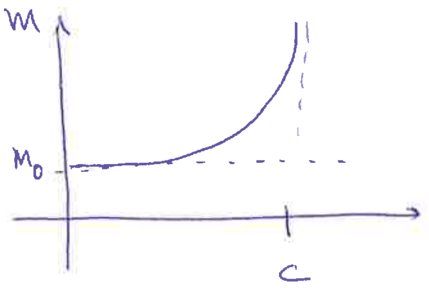
2 A lança A   4 B recebe B

* Eventos simultâneos no referencial do CM não são mais simultâneos em um referencial que se move em relação ao outro.

$$\Delta P_{YA} = \frac{2m_A Y}{T_0} \quad e \quad \Delta P_{YB} = \frac{2m_B Y}{T}$$

$$\frac{2m_A Y}{T_0} = \frac{2m_B Y}{T} \Rightarrow m_B = \frac{m_A}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \boxed{m_B \neq m_A}$$

$$\boxed{m_B > m_A}$$



v/c	m/m_0
0,01	1,00005
0,10	1,005 (0,5%)
0,50	1,15
0,90	2,3
0,98	5,0
0,99	7,1

$$\therefore \vec{p} = m\vec{v}$$

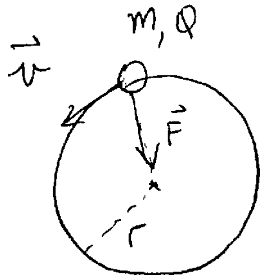
$$\vec{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\vec{v} \Rightarrow \text{se } v \ll c \Rightarrow \vec{p} = m_0\vec{v}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

Mecânica clássica $\frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$

Mecânica relativística $m = f(v)$ e $\frac{dm}{dt} \neq 0$, mas $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

* Força que age sobre a partícula varia em direção, mas com módulo constante (MCU)



$\vec{F} = Q\,\vec{v} \times \vec{B}$ $\quad \vec{v} \perp \vec{B}$

$F = Q v B$, v é cte em módulo, $m \equiv$ cte, pois m só depende do módulo de v. $\Rightarrow \dfrac{dm}{dt} = 0$

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \Rightarrow F = ma \text{ onde } a = a_c = \frac{v^2}{r} \left(r \equiv \text{raio da órbita} \right)$$

$$Q\cancel{v}B = \frac{m v^{\cancel{2}}}{r} \Rightarrow QBr = mv = p \Rightarrow p = QBr \quad \left(m \equiv \text{massa relativística} \right)$$

!!

* Determinação do momento relativístico

$Q \equiv$ conhecida, B e $r \equiv$ medidos $\Rightarrow p$, mas v pode ser também medida (campos elétricos e magnéticos cruzados) $\Rightarrow m$ pode ser determinada

Filtro de velocidades

(A.H. Bucherer, 1909)

Exemplo: m_0 $v_1 = 0{,}40c$ se $v_2 = 0{,}80c \Rightarrow \dfrac{p_2}{p_1} = ?$

$$p_1 = \frac{m_0 v_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} = \frac{m_0\, 0{,}40c}{\sqrt{1 - (0{,}40)^2}} \doteq \frac{m_0\, 0{,}40c}{0{,}9165} \cong 0{,}44\, m_0$$

$$p_2 = \frac{m_0 v_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}} = \frac{m_0\, 0{,}80c}{\sqrt{1 - (0{,}80)^2}} = \frac{m_0\, 0{,}80c}{0{,}6} \cong 1{,}33\, m_0$$

$$\frac{p_2}{p_1} \cong 3 \quad \text{e} \quad \frac{v_2}{v_1} = 2$$