3.5 Transformação de Lorentz

3.5.1 Derivação da transformação de Lorentz

Considere um evento qualquer no espaço-tempo e suas coordenadas (x', y', z', t'), em S'. A transformação de Lorentz (TL) é um conjunto de equações que expressa (x', y', z', t'), em termos das coordenadas (x, y, z, t) do mesmo evento em S. Uma vez obtida a TL, todos os resultados discutidos nas seções anteriores, em contextos mais ou menos particulares, podem ser derivados de maneira bastante direta.

Simetrias do espaço-tempo

Suponhamos que S' esteja se movendo com velocidade $\vec{v}$ em relação à S. Levando em conta que a escolha das direções dos eixos de coordenadas pode ser qualquer (isotropia do espaço), podemos realizar *rotações* de modo a fazer com que x e x' coincidam com a direção da velocidade relativa. Além disso, podemos escolher o origem dos sistemas de modo a fazer com que ($x = 0$,$t = 0$) e ($x' = 0$,$t' = 0$) descrevam o mesmo ponto do espaço-tempo (translação). Note que esta liberdade de escolha pressupõe propriedades de *simetria do espaço-tempo.* Na física a palavra *simetria* significa que o fenômeno observado (no caso, os eventos) não são alterados quando certas transformações são realizadas.

Levando em conta que distâncias perpendiculares à direção do movimento relativo são mantidas inalteradas nos dois referenciais (ver seção 3.4.4), a TL procurada pode ser expressa (após as rotações e translação espaço-temporal) como

$$\begin{aligned} x' &= f_x(x,t) \\ t' &= f_t(x,t). \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

Linearidade das TL

Se usarmos novamente a simetria por translações, restrita ao plano (x,t), concluímos que a separação espaço-temporal entre dois eventos E_a e E_b, descrita por S', deve *depender apenas* da separação espaço-temporal entre dois eventos descrita por S, ou seja, usando (3.5.1)

$$\begin{aligned} x'_b - x'_a &= f_x(x_b,t_b) - f_x(x_a,t_a) = f_x(x_b - x_a, t_b - t_a) \\ t'_b - t'_a &= f_t(x_b,t_b) - f_t(x_a,t_a) = f_t(x_b - x_a, t_b - t_a). \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

Como os eventos E_a e E_b são quaisquer, a segunda igualdade acima somente será satisfeita se as funções f_x e f_t forem *lineares.* Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} x' &= A\,x + B\,t \\ t' &= C\,x + D\,t, \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

onde A, B, C e D são constantes a serem determinadas.

Exercício: Quais são as dimensões físicas das constantes A, B, C e D? Verifique explicitamente, usando a transformação linear (3.5.3), que um movimento uniforme em S também será uniforme em S'.

Ao longo desta seção utilizaremos também o *formalismo matricial* para as transformações lineares. A forma matricial da equação (3.5.3) é

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \tag{3.5.4}$$

Relatividade do movimento

A origem do sistema S' ($x'=0$) está se deslocando com velocidade v em relação à S, de modo que $x = v\,t$. Substituindo estes valores na primeira equação de (3.5.3), obtemos $0 = Avt + Bt$, ou seja, $B = -vA$. Com isso, restam agora apenas três constantes a serem determinadas e podemos escrever a transformação procurada como

$$\begin{aligned} x' &= A(x - vt) \\ t' &= Cx + Dt, \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

Por outro lado, o observador S' descreve o movimento da origem do sistema S ($x = 0$) como $x' = -v\,t'$. Substituindo estes valores nas equações (3.5.5), termos $-vt' = -Avt$ e $t' = Dt$. Portanto, $D = A$, ou seja,

$$\begin{aligned} x' &= A(x - vt) \\ t' &= A\left(\frac{C}{A}x + t\right), \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

Restam agora apenas duas constantes, C e A, a serem determinadas. Por conveniência vamos definir as seguintes grandezas: $\gamma_v \equiv A$ e $E_v \equiv C/A$, onde o subscrito v denota que as constantes dependem da velocidade relativa. Desse modo, podemos escrever a equação (3.5.6) como

$$\begin{aligned} x' &= \gamma_v(x - vt) \\ t' &= \gamma_v(E_v x + t). \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

Em notação matricial, a equação acima pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \gamma_v \begin{pmatrix} 1 & -v \\ E_v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{3.5.8}$$

A seguir determinaremos os valores de γ e E.

Propriedade de grupo

Consideremos agora três referenciais quaisquer S, S' e S''. A velocidade relativa de S' em relação à S é v_1 e a velocidade relativa de S'' em relação à S' é v_2. Então,

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma_{v_2}\,(x' - v_2 t'), & x' &= \gamma_{v_1}\,(x - v_1 t), \\ t'' &= \gamma_{v_2}\,(E_{v_2} x' + t'), & t' &= \gamma_{v_1}\,(E_{v_1} x + t), \end{aligned} \tag{3.5.9}$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} = \gamma_{v_2} \begin{pmatrix} 1 & -v_{v_2} \\ E_{v_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \gamma_{v_1} \begin{pmatrix} 1 & -v_{v_1} \\ E_{v_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{3.5.10}$$

Combinando as equações (3.5.9), podemos escrever

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma_{v_2}\,\gamma_{v_1}\,[(1 - E_{v_1} v_2)x - (v_1 + v_2)t)], \\ t'' &= \gamma_{v_2}\,\gamma_{v_1}\,[(E_{v_1} + E_{v_2})x + (1 - E_{v_2} v_1)t], \end{aligned} \tag{3.5.11}$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} = \gamma_{v_2}\,\gamma_{v_1} \begin{pmatrix} 1 & -v_{v_2} \\ E_{v_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -v_{v_1} \\ E_{v_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{3.5.12}$$

Efetuando a multiplicação de matrizes, obtemos

$$\begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} = \gamma_{v_2}\,\gamma_{v_1} \begin{pmatrix} 1 - E_{v_1} v_2 & -v_1 - v_2 \\ E_{v_1} + E_{v_2} & 1 - E_{v_2} v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{3.5.13}$$

A chamada *propriedade de grupo* significa, no presente contexto, que a equação (3.5.11) também representa uma TL entre S'' e S, cuja velocidade relativa é $v_1 + v_2$. Por outro lado, a forma geral da TL é, até aqui, dada pela equação (3.5.7) (ou a forma matricial (3.5.8)). Mas esta forma geral mostra que os coeficientes de x, na primeira equação, e de t, na segunda equação, são idênticos. Logo, como (3.5.11) também é uma TL, devemos ter

$$1 - E_{v_1} v_2 = 1 - E_{v_2} v_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_2}{E_{v_2}} = \frac{v_1}{E_{v_1}}\,. \tag{3.5.14}$$

Na segunda igualdade acima, o lado esquerdo só depende de v_2 e o lado direito só depende de v_1. Portanto, a única maneira de satisfazer esta equação é tomando $v/E_v = a$, com a independente de v, ou seja,

$$E_v = \frac{v}{a}. \tag{3.5.15}$$

Substituindo (3.5.15) em (3.5.7) (e também na forma matricial (3.5.8)), teremos,

$$x' = \gamma_v\,(x - vt), \qquad t' = \gamma_v\,(xv/a + t), \tag{3.5.16}$$

ou, na forma matricial,

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \gamma_v \begin{pmatrix} 1 & -v \\ v/a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{3.5.17}$$

Resta agora apenas a função da velocidade γ_v para ser determinada. A constante fundamental a somente será determinada com a condição física estipulada pelo princípio de constância da velocidade da luz.

Isotropia do espaço

Consideremos agora o resultado da combinação de uma TL de S para S', e, em seguida, a operação inversa de S' para S. Ou seja,

$$\begin{aligned} x &= \gamma_{-v}\,(x' + vt'), & x' &= \gamma_v\,(x - vt), \\ t &= \gamma_{-v}\,(-x'v/a + t'), & t' &= \gamma_v\,(xv/a + t), \end{aligned} \tag{3.5.18}$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \gamma_{-v} \begin{pmatrix} 1 & v \\ -v/a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \gamma_v \begin{pmatrix} 1 & -v \\ v/a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{3.5.19}$$

Eliminando x' e t' das equações (3.5.18), obtemos

$$x = \gamma_{-v}\,\gamma_v\,(1 + v^2/a)\,x, \qquad t = \gamma_{-v}\,\gamma_v\,(1 + v^2/a)\,t, \tag{3.5.20}$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \gamma_{-v}\,\gamma_v \begin{pmatrix} 1 & v \\ -v/a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ v/a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \tag{3.5.21}$$

Efetuando a multiplicação de matrizes, obtemos

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \gamma_{-v}\,\gamma_v \begin{pmatrix} 1+v^2/a & 0 \\ 0 & 1+v^2/a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{3.5.22}$$

As equações (3.5.20) (ou a forma matricial (3.5.22)) devem ser válidas para quaisquer x e t. Logo,

$$\gamma_{-v}\,\gamma_v = \frac{1}{1+v^2/a}\,. \tag{3.5.23}$$

Essa condição também pode ser interpretada como sendo uma conseqüência da existência do elemento *identidade* do grupo de transformações.

Se γ_v dependesse do sentido da velocidade a *isotropia do espaço*, que utilizamos logo no início, não seria válida. Para explicitar mais esse fato, suponha que façamos uma mudança de sinal nas coordenadas espaciais, nos dois referenciais, mudando (x, x') para $(-x, -x')$. Neste caso, as equações (3.5.16) mudam para

$$-\,x' = \gamma_{-v}\,(-x+vt), \qquad t' = \gamma_{-v}\,(-x(-v)/a+t), \tag{3.5.24}$$

(note que mudamos também a velocidade relativa de v para $-v$). Cancelando os sinais, obtemos,

$$x' = \gamma_{-v}\,(x-vt), \qquad t' = \gamma_{-v}\,(xv/a+t), \tag{3.5.25}$$

A imposição de que esta transformação seja fisicamente equivalente à transformação original (isotropia) resulta em $\gamma_{-v} = \gamma_v$. Substituindo esta condição em (3.5.23), obtemos

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1+v^2/a}}\,. \tag{3.5.26}$$

Velocidade absoluta

Substituindo a equação (3.5.26) nas equações (3.5.16) e (3.5.17), encontramos as seguintes expressões para a TL

$$x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1+v^2/a}}, \qquad t' = \frac{xv/a+t}{\sqrt{1+v^2/a}}, \tag{3.5.27}$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+v^2/a}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ v/a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{3.5.28}$$

Assim, obtivemos a transformação mais geral possível, entre referenciais inerciais, compatível com as simetrias do espaço-tempo. Estas transformações possuem um parâmetro a, com dimensão de quadrado de velocidade.

Esta derivação mostra que a relação mais geral entre referenciais inerciais poderia ter sido obtida muito antes de terem surgido todas as controvérsias sobre o problema do éter, etc. As transformações (3.5.27) foram derivadas usando apenas as simetrias do espaço que já fazem parte da física newtoniana. Toda a diferença entre a física newtoniana e a relativística está no valor a ser atribuído ao parâmetro a. Isso parece simples...**mas não é!** A seguir introduziremos a condição física adicional que determina este parâmetro.

Exercício: Determine qual deve ser o valor da constante a na equação (3.5.27), para que exista uma velocidade absoluta c. Ou seja, suponha a existência de propagação de sinais com a mesma velocidade c em todos os referenciais inerciais. Sugestão: use $dx/dt = dx'/dt' = c$ e resolva as equações para a.

O resultado do exercício acima mostra que

$$a = -c^2. \tag{3.5.29}$$

Neste caso, as equações (3.5.27) e (3.5.28) nos dão

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{3.5.30}$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v/c^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{3.5.31}$$

Essa é a transformação de Lorentz que permite expressar as coordenadas do sistema S em termos das coordenadas do sistema S'.

Portanto, podemos identificar a velocidade c com a velocidade da luz, quando levamos em conta as previsões feitas pelo eletromagnetismo, ou seja, a luz é uma onda eletromagnética que se propaga com velocidade c em todos os referenciais inerciais.

3.5.2 Transformação de Galileu

É interessante considerar o caso especial (não físico) em que é permita a propagação de sinais com velocidade infinita, ou seja, fazendo $a = \infty$, nas equações (3.5.27) e (3.5.28). Isso nos leva a transformação de Galileu

$$x' = x - vt, \qquad t' = t, \qquad \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{3.5.32}$$

3.5.3 Contração de Lorentz

Podemos agora analisar novamente o fenômeno de contração de Lorentz usando a transformação de Lorentz (3.5.30). Imagine uma barra se movendo para a esquerda com velocidade v. Seu comprimento próprio (comprimento em repouso) é $\Delta x' = x'_d - x'_e$, onde os subscritos denotam as extremidades direita e esquerda, respectivamente. Um observador S mede o comprimento da barra subtraindo as posições dos extremos *no mesmo instante de tempo*, ou seja, $\Delta t = t_d - t_e = 0$ e $\Delta x = x_d - x_e$. Usando a transformação de Lorentz (3.5.30), teremos

$$x'_d - x'_e = \gamma[(x_d - x_e) - v\underbrace{(t_d - t_e)}_{=0}] = \gamma(x_d - x_e). \tag{3.5.33}$$

Portanto,

$$\Delta x = \frac{1}{\gamma}\Delta x'. \tag{3.5.34}$$

Esse é o efeito de contração de Lorentz já discutido na seção 3.4.4.