Teorema Trabalho - Energia

Trabalho realizado por uma força $\vec{F}$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

$d\vec{\ell}$ é o deslocamento de uma partícula que está sob a ação de $\vec{F}$.

Usando

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (2^{a} \text{ lei})$$

obtemos

$$dW = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{\ell}$$

Em termos da velocidade $\vec{v}$ da partícula, $d\vec{\ell} = \vec{v}\, dt$.

$$dW = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v}\, dt$$

Usando $\vec{p} = \dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

$$dW = m \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) \cdot \vec{v}\, dt$$

$$\frac{d}{dt}\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{-2\vec{v}}{c^2}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= \frac{1}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}v^2$$

$$dW = m\,dt\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}v^2\right.$$

$$\left. + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\frac{v^2}{c^2}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}v^2\right]$$

$$= m\,dt\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{v^2}{c^2}\right]\frac{d}{dt}v^2$$

$$= mc^2\,dt\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{v^2}{c^2}$$

$$= mc^2\,dt\,\frac{d}{dt}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= dt\,\frac{d}{dt}\gamma m c^2$$

$$\rightarrow dW = d\,\gamma m c^2 = dE$$

→ Trabalho faz aumentar (ou diminuir) a energia.

Como $E = K + mc^2$

$$\boxed{dW = dK}$$

→ trabalho = variação da energia cinética