Transformações de Lorentz sem luz

- <u>Forma "geral"</u> (1+1 dimensões)

$$x' = f_x(x, t)$$
$$t' = f_t(x, t)$$

- <u>Linearidade</u>

$$E_a \text{ ocorre em } \begin{cases} (x_a, t_a) & \text{para } S \\ (x'_a, t'_a) & \text{" } S' \end{cases}$$

$$E_b \text{ ocorre em } \begin{cases} (x_b, t_b) & \text{para } S \\ (x'_b, t'_b) & \text{" } S' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_b - x'_a = f_x(x_b, t_b) - f_x(x_a, t_a) \\ t'_b - x'_b = f_t(x_b, t_b) - f_t(x_a, t_a) \end{cases}$$

Simetria por "translação" espaço-temporal

$$\rightarrow \begin{cases} f_x(x_b, t_b) - f_x(x_a, t_a) = f_x(x_b - x_a, t_b - t_a) \\ f_t(x_b, t_b) - f_t(x_a, t_a) = f_t(x_b - x_a, t_b - t_a) \end{cases}$$

Portanto, a transformação deve ser linear:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \equiv \Lambda X$$

com A, B, C e D constantes.

- Relatividade do movimento

  - A origem de S' $(x' = 0)$ está se movendo com vel. v no ref. S $(x = vt)$.

$$\longrightarrow \quad 0 = Avt + Bt$$

$$\longrightarrow \quad B = -Av$$

Então,

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -Av \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

Por outro lado, o observador S' descreve a origem de S $(x=0)$ como $x' = -vt'$

$$\rightarrow \begin{cases} -vt' = A.0 - Avt \\ t' = C.0 + Dt \end{cases}$$

$$\rightarrow -vDt = -Avt$$

$$\rightarrow D = A$$

Então

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -Av \\ C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

Até aqui, usando apenas a simetria por translação espaço-temp. e a relatividade do movimento, conseguimos determinar duas constantes (B e D).

Podemos escrever também

$$\begin{pmatrix} A & -vt \\ C & A \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & -v \\ \frac{C}{A} & 1 \end{pmatrix}$$

Definindo $C/A \equiv E$,

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & -v \\ E & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

Os dois parâmetros A e E podem depender de v.

- Composição de transformações (propriedade de grupo):

Considere duas transformações caracterizadas por v_1 e v_2; sendo v_1 a vel. de S' em relação à S e v_2 a vel. de S'' em relação à S'.

Definindo $A(v_1) \equiv A_1$; $E(v_1) \equiv E_1$
$A(v_2) \equiv A_2$; $E(v_2) \equiv E_2$,

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 & -v_1 \\ E_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} 1 & -v_2 \\ E_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

Combinando as duas transformações,

$$\begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} = A_2 A_1 \begin{pmatrix} 1 & -v_2 \\ E_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -v_1 \\ E_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

$$= A_2 A_1 \begin{pmatrix} 1 - v_2 E_1 & -v_1 - v_2 \\ E_1 + E_2 & 1 - v_1 E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

Impondo que essa também seja um TL (propriedade de grupo),

$$\longrightarrow 1 - v_2 E_1 = 1 - v_1 E_2 \qquad (D = A)$$

$$\longrightarrow \underbrace{\frac{v_2}{E_2}}_{\text{só depende de } v_2} = \underbrace{\frac{v_1}{E_1}}_{\text{só depende de } v_1}$$

$$\longrightarrow \frac{v}{E(v)} = a \qquad (a \text{ é independente de } v)$$

$$\longrightarrow E(v) = \frac{v}{a}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = A(v) \begin{pmatrix} 1 & -v \\ \frac{v}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

- Transformação inversa

$$S \longrightarrow S' \longrightarrow S$$

$S \to S'$: $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = A(-v) \begin{pmatrix} 1 & +v \\ -\frac{v}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$

$S' \to S$: $\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = A(+v) \begin{pmatrix} 1 & -v \\ +\frac{v}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = A(v)A(-v) \begin{pmatrix} 1+\frac{v^2}{a} & 0 \\ 0 & 1+\frac{v^2}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow A(v)A(-v) \left(1 + \frac{v^2}{a}\right) = 1$$

$$\longrightarrow A(v)A(-v) = \frac{1}{1 + \frac{v^2}{a}}$$

- Isotropia do espaço

$$A(v) = A(-v)$$

$$\longrightarrow A(v) = \left(1 + \frac{v^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{v^2}{a}}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ \frac{v}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

que é a transf. mais geral, compatível com a simetria do espaço-tempo e com a relatividade do movimento.

- Velocidade absoluta

Suponha que ∃ um vel. absoluta, ou seja $\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'} = c$. Então,

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - v\,dt}{\frac{v}{a}dx + dt}$$

$$= \frac{dx/dt - v}{\frac{v}{a}\frac{dx}{dt} + 1}$$

$$= \frac{c - v}{\frac{vc}{a} + 1} = c$$

$$\longrightarrow \quad c - v = \frac{vc^2}{a} + c$$

$$\rightarrow \quad \frac{c^2}{a} = -1 \quad \longrightarrow \quad a = -c^2$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \gamma(v) \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -\frac{v}{c^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$