Massa, Momento e Energia

A massa de uma partícula é definida no referencial onde a partícula encontra-se em repouso. É comum utilizar a expressão "massa de repouso"; utilizaremos apenas "massa".

A massa m é um invariante relativístico, da mesma forma que c, $\Delta\tau$ e o intervalo invariante $c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$.

m é uma característica invariante da partícula.

A massa de repouso possui as mesmas características (inércia, gravitacional, etc) que a massa na teoria ñ relativística

Consideremos novamente o invariante

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2 \Delta \tau^2 = \text{invariante}$$

$\Delta \tau$ é o tempo próprio

Dividindo o invariante por $\Delta \tau^2$,

$$c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta \tau^2} - \left(\frac{\Delta x}{\Delta \tau}\right)^2 = c^2$$

Suponha que Δx seja o deslocamento de uma partícula de massa m (massa de repouso).

No referencial da partícula, decorre um intervalo de tempo $\Delta \tau$ (Δt no ref. que observa a partícula em movimento)

Tomando o limite $\Delta x \to dx$, $\Delta t \to dt$, $\Delta \tau \to d\tau$, e definindo

$$p = m \frac{dx}{d\tau} \neq m \frac{dx}{dt}$$

teremos

$$c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{p}{m}\right)^2 = c^2 \qquad (\times\, m^2c^2)$$

$$\rightarrow m^2c^4\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - p^2c^2 = m^2c^4$$

Usando $dt = \gamma\, d\tau$

$$\underbrace{(\gamma m c^2)^2}_{} = p^2c^2 + m^2c^4$$

tem dimensão
de energia

$$E \equiv \gamma m c^2$$

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

$$\rightarrow E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

$$p = m\frac{dx}{d\tau} = \gamma m \frac{dx}{dt} = \gamma m v$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

quando $\frac{v}{c} << 1 \Rightarrow \gamma \approx 1$

$$p \approx mv << mc$$

é o momento não relativístico

Voltando à energia E,

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$$

$$= mc^2\sqrt{1 + \frac{p^2c^2}{m^2c^4}}$$

$$= mc^2\left(1 + \frac{p^2}{m^2c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Vimos que no caso ñ relativ.

$$p = mv << mc$$

Então,

$$E \cong mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{m^2c^2}\right) + \cdots$$

$$= mc^2 + \frac{p^2}{2m} + \cdots$$

$$= mc^2 + \frac{1}{2m}(mv)^2 + \cdots$$

$$= \underbrace{mc^2}_{?} + \underbrace{\frac{mv^2}{2}}_{\text{energia cinética NR}} + \cdots$$

mc^2 é a energia de repouso!

(Note que poderíamos ter feito $\frac{v}{c} \ll 1$ no lado esquerdo

$$E = \gamma mc^2$$

$$\approx \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) mc^2$$

$$= mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \cdots$$
)

É importante notar que a relação

$$E^2 - p^2c^2 = \underbrace{m^2c^4}_{\text{invariante}}$$

é válida em qq referencial inercial.

Essa relação "amarra" a energia E e o momento p, da mesma forma que ct e x estão "amarrados" na relação

$$(ct)^2 - x^2 = \text{invariante}$$

Partículas de massa nula

Nada nos impede de considerar $m=0$ na relação

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

Nesse caso, teremos

$$\boxed{E = pc} \qquad (m=0)$$

Por outro lado, vimos acima que, com $m \neq 0$

$$\begin{cases} E = \gamma mc^2 = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ p = \gamma m v \end{cases}$$

Se fizermos $m=0$, teríamos, aparentemente, $E=0$ e $p=0$.

Porém, a razão $\dfrac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

pode ter (e tem!) um valor finito, caso as partículas de massa nula se propagem com a velocidade da luz c.

Sendo esse o caso, teremos

$$\frac{E}{p} = \frac{\gamma m c^2}{\gamma m v} = \underbrace{\frac{c^2}{v}}_{v \to c} \longrightarrow c$$

$$\longrightarrow \quad E = pc,$$

que é a relação obtida anteriormente.

Tais partículas existem.

São os $\boxed{\text{fótons}}$

Note, no entanto, que a relatividade não nos informa qual é o conteúdo energético de um fóton (o que torna um fóton mais energético?)

Veremos que na Mecânica Quântica,

$$E = hf$$

onde h é a constante de Planck ($h = 6,63 \times 10^{-34}$ J.s) e f é a frequência da onda eletromagnética associada ao fóton.

Obviamente o momento do fóton é

$$p = \frac{E}{c} = h\lambda$$

Conservação de Momento e Energia