INSTITUTO DE FÍSICA

UNIVERSIDADE DE SAO PAULO

CURSO DE FÍSICA 2 (FEP 196)

RELATIVIDADE - EXERCÍCIOS

ESCOLA POLITÉCNICA

O objetivo desta apostila é complementar o texto "Física Básica e Moderna" de R.T. Weidener e R.L. Sells.

Os exercícios resolvidos e problemas propostos foram extraídos e adaptados dos seguintes textos.

1. "Introdução a Relatividade Restrita", L.G.Ferreira - Apostila, 1977.
2. "Relatividade", G. Moscati - Apostila, 1976.
3. "Física Moderna", P.A. Tipler - Ed. Guanabara Dois, 1981.
4. "Física - Fundamentos e aplicações", Volume 2, R. Eisberg e L. Lerner-Ed. Mc-Graw-Hill do Brasil, 1983.

Os textos citados nos itens 3 e 4 podem ser considerados como bibliografia alternativa ao texto básico (de leitura obrigatória).

Os problemas propostos foram divididos em grupo A, B e C. No grupo A temos problemas, cuja resolução envolve aplicação direta de fórmulas ou conceitos novos; os alunos devem resolver todos.

No grupo B os problemas são um pouco mais elaborados (inclue exercícios de provas de anos anteriores); os alunos devem ser capazes de resolvê-los.

Os problemas do grupo C (só cinemática) devem ser encarados como desafios (só fazer se houver tempo).

O nível da prova é definido pelos problemas dos grupos A e B.

Cinemática relativística

Resumo

O postulado fundamental da Teoria da relatividade restrita, que a velocidade da luz no vácuo é a mesma para todos os observadores, independentemente do movimento da fonte de luz ou do observador, é um fato da natureza.

Tempo próprio é o tempo entre dois eventos que ocorrem no mesmo ponto do espaço; assim ele pode ser medido em um único relógio.

Se T_o é o intervalo de tempo próprio medido em um relógio que se move com velocidade v no sistema S, o intervalo de tempo medido em S é mais longo:

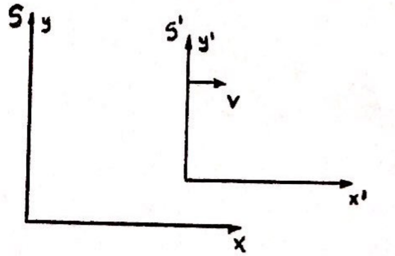
$$T = \gamma T_o, \quad \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{1}$$

O comprimento próprio L_o de uma barra é o comprimento medido num referencial em relação ao qual a barra está parada.

Se uma barra de comprimento próprio L_o move-se com velocidade v em S, seu comprimento medido em S' é

$$L = \frac{L_o}{\gamma} \tag{2}$$

Transformações de Lorentz



$$x' = \gamma(x - vt) \tag{3a}$$
$$y' = y \tag{3b}$$
$$z' = z \tag{3c}$$
$$t' = \gamma(t - \frac{xv}{c^2}) \tag{3d}$$

A Transformação inversa é obtida mudando-se v para -v e trocando-se os índices.

Transformação de velocidades

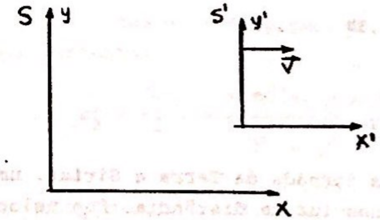
$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v_x v}{c^2}} \tag{4a}$$

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - \frac{v_x v}{c^2})} \tag{4b}$$

$$v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - \frac{v_x v}{c^2})} \tag{4c}$$

Exemplos

1- Um acontecimento espaço-tempo ocorre no sistema de referência S em x = 40m, y = 0,2 = 0, t = 10^{-8}s. S' é um sistema de referência com uma velocidade de 0,8c ao longo do eixo positivo x de S. Ache as coordenadas espaço-tempo do acontecimento em S' se os eixos x, y e z de ambos os sistemas forem paralelos.



$\vec{v} = 0{,}8c\ \hat{i}$ (v/c = 0,8)

Utilizaremos as Tranformações de Lorentz (eq. 3a - 3d) sendo que o valor de γ será:

$$\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} = |1 - (0{,}8)^2|^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{3}$$

$$x' = \frac{5}{3}(40 - 0{,}8 \times 3 \times 10^8 \times 10^{-8}) = 62{,}7\text{m}$$

$$y' = 0$$

$$z' = 0$$

$$t' = \gamma(10^{-8} - \frac{40 \times 0{,}8}{3 \times 10^8}) = -1{,}61 \times 10^{-7}\text{s}$$

2- Os pions são partículas radioativas que podem ser produzidas num laboratório de pesquisa. O tempo de meia-vida de um pion em repouso é igual a 1,77 x 10^{-8}s. Isto significa que a metade dos pions existentes em dado instante se desintegra decorridos 1,77 x 10^{-8}s. Em dada experiência, os pions são produzidos com alta velocidade, e se verifica que, a uma distância de 39m do local da produção, a população de pions caiu exatamente à metade. Qual a velocidade dos pions?

Se os pions andassem com velocidade V = c e se desprezassemos a dilatação do tempo de meia-vida, eles chegariam com a metade da população a uma distância.

$$V \times 1,77 \times 10^{-8} = c \times 1,77 \times 10^{-8} = 3,00 \times 1,77m = 5,31m$$

No entanto eles atingem a distância de 39m! Para saber qual a velocidade, escrevemos então

$$L_o = 39m$$

$$T_o = 1,77 \times 10^{-8}s$$

Assim $L_o = V.\gamma.T_o = \dfrac{V}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\, T_o$

ou $\dfrac{V/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \dfrac{L_o}{T_o.c} = 7,34$

portanto $(\frac{V}{c}) \simeq 0,99$

3- Um grupo de astronautas vai numa jornada da Terra a Sirius, uma estrela muito brilhante a 8,5 anos-luz de distância. Sua velocidade escalar é de 0,95c. Ache a distância de Lorentz contraída entre a Terra e Sirius.

A distância Terra-Sirius medida da Terra a distância própria L_o = 8,5 anos-luz.

A distância contraída, observada pelo grupo de astronautas será (equação 2).

$$L = \frac{L_o}{\gamma}, \text{ onde } \gamma = (1 \quad v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} = (1 - (0,95)^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\gamma \simeq 3,2 \text{ portanto}$$

$$L = \frac{8,5}{3,2} \simeq 2,65 \text{ anos-luz.}$$

4- Uma nave espacial S é alcançada por uma nave espacial S', com S' passando por S com uma velocidade relativa v = c/2. O capitão de S saúda o capitão de S' piscando as luzes da proa e popa, simultaneamente do ponto de vista de S. Quando medida por S, a distância entre as luzes é de 100m. Qual a diferença entre os tempos de emissão dos sinais das luzes, quando medidos por S'?

No sistema de referência de S os sinais das duas luzes são emitidos nos instantes de tempo t_1 e t_2 desde os locais x_1 e x_2. Mas os tempos de emissão são julgados no sistema de referência de S', ocorrem nos tempos t_1' e t_2'. A equação (3d) nos fornece:

$$t'_1 = \frac{t_1 - vx_1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$t'_2 = \frac{t_2 - vx_2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

De acordo com S', a diferença entre os tempos de emissão é:

$$t'_2 - t_1 = \frac{(t_2 - t_1) - v/c^2(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Não há qualquer diferença de acordo com S, assim $t_2 = t_1$. Temos portanto:

$$t'_2 - t'_1 = - \frac{v/c^2(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Substituindo $v = 0{,}5c$ e $x_2 - x_1 = 100m$ obtemos

$$t'_2 - t'_1 \simeq -1{,}93 \times 10^{-7}s$$

O sinal menos significa que o capitão de S' julga a luz da proa de S piscar ligeiramente mais cedo do que a luz de popa.

5- Um homem carregando uma vara de 20m passa correndo por baixo de uma área coberta de telhas, de 11m de comprimento, conforme a Figura 1.

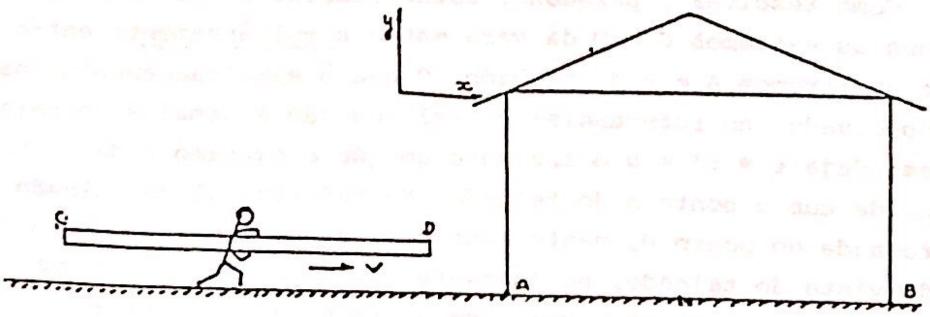


Figura 1 - Homem carregando vara e passando por baixo do telhado

A velocidade v do homem é tal que $\gamma = 2$.

a) Qual a velocidade do homem?

b) No referencial do telhado, por quanto tempo a vara estará totalmente debaixo das telhas?

c) No referencial do homem, existe algum instante em que a vara esteja totalmente sob as telhas? Resolver o paradoxo.

Solução: A velocidade do homem é dada por

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 2$$

então $V = \frac{\sqrt{3}}{2} c$

No referencial do telhado a vara mede (equação 2)

$$L = \frac{L_{o\,vara}}{\gamma} = \frac{20}{2} = 10m$$

portanto cabe toda debaixo dos 11m de extensão do telhado. Assim a vara permanecerá debaixo do telhado por um tempo

$$t = \frac{11 - 10}{v} = \frac{2}{\sqrt{3}c}$$

No referencial do homem, o telhado tem uma extensão de

$$\ell = \frac{\ell_{o\,telhado}}{\gamma} = 5{,}5m$$

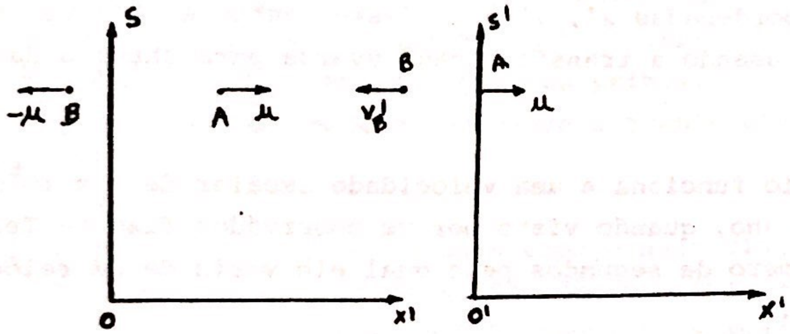
Certamente os 20m de vara não conseguem ficar debaixo dos 5,5m de telhado.

Como resolver o paradoxo? Estar debaixo do telhado significa que os extremos C e D da vara estão simultâneamente entre os pontos extremos A e B do telhado. O que é simultâneamente para um observador no referencial do telhado não é simultâneo para o homem. Seja $t = t' = 0$ o instante em que o extremo C da vara coincide com o ponto A do telhado. No referencial do telhado, a coordenada do ponto D, neste instante, é $x = L = 10m$. Sob o ponto de vista do telhado, no instante $t = 0$, a vara está toda sob telhas. Mas para o acontecimento de ponto D ter coordenada $x = 10m$ no referencial do telhado, as coordenadas no referencial do homem são dadas pelas Eqs. (18) e (19) com $\Delta t = 0$, $\Delta x = 10m$. Portanto

$$\Delta t' = \frac{V\, \Delta x\, \gamma}{c^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{10}{c}\, 2 = -\frac{\sqrt{3} \times 10}{c}$$

Assim, este acontecimento não é simultâneo com a coincidência de A com C ($t' = o$).

6- Um objeto A se desloca com velocidade $\underline{u}$ em relação a um observador O caminhando para leste. Um objeto B se desloca com velocidade $\underline{u}$ caminhando para oeste. Qual a velocidade relativa de B com relação a A



Em relação ao referencial S temos $v_A = u$ e $v_B = -u$. No referencial S', ligado a A, a velocidade relativa ao referencial S é

$$v = u$$

O valor v'_B é obtido através da equação (4a)

$$v'_B = \frac{v_B - v}{1 - \frac{v\, v_B}{c^2}} = - \frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}}$$

Problemas - Cinemática Relativística

Grupo A

1- Suponha que um evento ocorre em S em x = 100km, y = 10km, z = 1,0km, em t = 5,0 x 10^{-6}s. Suponha que S' se mova em relação a S com uma velocidade de 0,92c, ao longo do eixo comum x - x', as origens coincidindo no instante t' = t = 0. Quais são as coordenadas x', y' e t' deste evento em S'? Verifique a resposta usando a transformação inversa para obter o dado inicial.

2- Um relógio funciona a uma velocidade escalar de 3 x 10^6m/s durante um ano, quando visto por um observador fixo na Terra. Ache o número de segundos pelo qual ele varia de um relógio fixo na Terra.

3- Uma barra metro padrão parece ter um comprimento de 50cm quando vista de um sistema coordenado em movimento paralelo à barra. Qual é a velocidade escalar da barra neste sistema coordenado?

4- Considere um universo em que a velocidade da luz c = 120km/h.Um Ford Landau correndo a uma velocidade v relativa à estrada ultrapassa um Volkswagen se movendo a uma velocidade de 60km/h = = c/2. A velocidade do Landau é tal que o seu comprimento é medido por um observador fixo na estrada como sendo o mesmo que o do Volkswagen. Sabe-se que o comprimento próprio do Landau é o dobro do do Volkswagen. Qual é a velocidade do Landau?

5- Um méson π^+ é criado em uma colisão de alta energia de uma partícula primária dos raios cósmicos, na atmosfera da Terra, a 20km acima do nível do mar. Ele desce verticalmente a uma velocidade de 0,9999c e se desintegra, no seu sistema próprio, 2,6 x 10^{-8}s após a sua criação. A que altitude acima do nível do mar é ele observado na Terra, no momento da desintegração?

6- Quanto é visto de um sistema inercial S, um evento ocorre ao ponto A sobre o eixo x, e então, 10^{-6}s mais tarde um evento ocorre no ponto B, mais longe no eixo x. A e B estão separados de 600m quando visto de S.

a) Existe um outro sistema inercial S', movendo-se com uma velocidade menor do que c paralela ao eixo x, para o qual os dois eventos são simultâneos? Se assim for, qual é o módulo

e o sentido da velocidade de S' com relação a S?

b) Repita a parte (a) para o caso em que A e B estão separados somente de 100m quando vistos de S.

7- Duas espaçonaves, cada uma com 100m de comprimento próprio, passam perto uma da outra, dirigindo-se em sentidos opostos. Se um astronauta na frente de uma nave mede um intervalo de tempo de 2,50 x 10^{-6}s para que a segunda nave passe por el então:

a) Qual é a velocidade relativa das espaçonaves?

b) Que intervalo de tempo é medido na primeira nave para que a frente da segunda nave passe desde a frente até o fim da 1a. nave?

8- Um observador parado observa duas espaçonaves viajando em direção a ele com sentidos opostos. Uma das espalonaves (S_1) parece ter uma velocidade escalar de 0,6c enquanto a segunda (S_2) tem uma velocidade escalar de 0,8c. A que velocidade escalar um observador em S_2 vê a espaçonave S_1 se aproximando?

9- Duas galáxias se afastam de um observador em sentidos opostos, com uma velocidade escalar ν comum, mas desconhecida. Sendo a velocidade escalar relativa das galáxias de 0,6c, ache ν.

10- Um trem T_1 viaja para o Oeste a 0,75c em relação à estação enquanto que um segundo trem T_2 viaja para o leste a 0,90c. Supondo que o Leste seja o sentido positivo, ache

a) a velocidade de T_1.

b) a velocidade da estação de trem em relação a T_2.

Grupo B

1- Um observador S vê uma estrêla com uma elevação angular θ em relação a horizontal Ox. Um segundo observador S' caminha na direção Ox com velocidade v relativa a S. (Fig. 1)

a) Calcule o ângulo θ' da estrêla visto por S' sem utilizar os resultados da Teoria da relatividade restrita (cálculo clássico).

b) Calcule novamente o ânaulo θ' utilizando a Teoria da relatividade restrita.

Sugestão: Utilize as transformações de Lorentz.

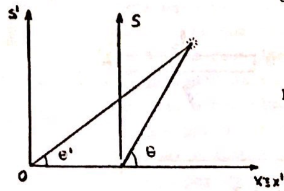


Fig. 1

c) Compare os resultados dos itens anteriores quando $v/c<<1$.

2- Considere o equipamento da Fig. 2. F é uma fonte de luz. D um detetor e E um espelho. Um flash de luz parte de F, é refletido por E e é detetado em D. A distância entre F (ou D) e o espelho E é d.

a) Para um observador parado em relação ao equipamento, qual é o tempo entre a partida do flash e sua volta?

b) Para um observador se movendo com velocidade V na direção y, em relação ao equipamento, qual é o valor deste tempo?

c) Repita o problema para um observador se movendo na direção x, e sem levar em conta a contração espacial da distância d.

d) Repita o item c, agora levando em conta a contração espacial. Compare seu resultado com o do item b.

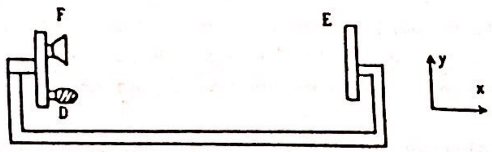


Fig.2

3- (Poli 86) Uma barra de comprimento próprio ℓ_o move-se com velocidade constante v relativamente ao sistema S (Fig.3). A extremidade A' da barra passa pelo ponto A de S no instante t = t' = 0 e neste instante é emitido de A' um sinal de de luz que viaja de A' para B'.

a) Em qual instante t'_o, medido em S' (em repouso com relação à barra), o sinal chega em B'?

b) Em qual instante t_1, medido em S, o sinal alcança B'?

c) Em qual instante t_2, medido em S, a extremidade B' da barra passa pelo ponto A?

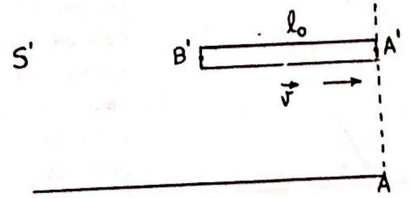


Fig.3

4- (Poli 86) Uma barra de comprimento L, orientada segundo um ângulo θ com relação ao eixo x, está em repouso num sistema inercial de referência S. (Fig. 4) Considere um sistema S', que se move com velocidade constante $\vec{v} = -v_o\vec{i}$ em relação a S.

a) Qual o comprimento aparente da barra, L', no sistema S'?

b) Qual o ângulo de orientação θ' no sistema S'?

c) Suponha agora que um objeto relativístico esteja caminhando sobre a barra com velocidade $\beta c = 0,7c$ no sentido de P para O. Qual a velocidade deste objeto para um observador em S'?

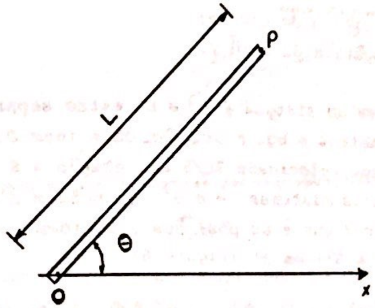


Fig.4

5- (Poli 87) Duas naves espaciais, A e B, viajam em sentidos contrários, com velocidade de 0,8c em relação à terra (Fig. 5).

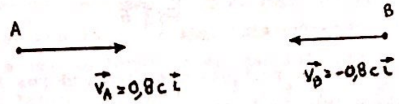


Fig.5

Cada nave tem o mesmo comprimento, $L_o = 100m$, no referencial em que está em repouso.

a) Qual o comprimento de cada nave medido por um observador na terra?

b) Qual o comprimento e a velocidade da nave B medidos por um observador na nave A?

c) Qual o comprimento e a velocidade da nave A medidos por um observador na nave B?

d) No instante t = 0 (relógio da terra) as proas das naves estão alinhadas e elas começam a passar uma pela outra. Em que instante (no relógio da terra) estarão as popas alinhadas?

6- (Poli 87) Um núcleo radioativo se move com velocidade $\vec{v}$ = 0,3c, ao longo do eixo x. Num determinado instante ele emite um elétron com uma velocidade relativa, em módulo, de 0,5c. Calcule a velocidade do elétron no laboratório quando ele é emitido na direção:

a) positivo ao eixo x;
b) negativo ao eixo x;
c) positiva do eixo y;
d) negativa do eixo y.

7- Dois observadores no sistema S (A e B) estão separados por uma distância de 60metros e equidistantes da origem O. Suponha que S' se mova com uma velocidade 3c/5 em relação a S. Em t = t' = 0 as origens dos dois sistemas (O e O') coincidem e os observadores A e B verificam que suas posições coincidem com as de dois observadores (A' e B') em S' (figura 6)

$t = t' = 0$

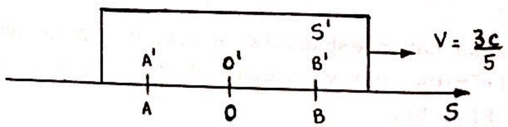


Fig.6

a) Quais são as posições dos observadores A' e B' no sistema S?
b) Qual a leitura do relógio de A' quando se dá a sua passagem por A? E a leitura do relógio de B' na sua passagem por B?
c) O sistema S' continua se movendo até que A' passe por B.Quais são as leituras dos relógios de B e A' quando isto acontece?

Grupo C

1- Suponha que o evento A cause o evento B no sistema S, o efeito sendo propagado de A para B com uma velocidade maior do que c. Mostre que existe um sistema inercial S', se movendo relativamente a S com uma velocidade menor que c, no qual a ordem desses eventos está invertida. Portanto, se um efeito deve ser sempre posterior à causa, é impossível enviar sinais com uma velocidade maior do que c.

2- Na Fig. 7, A, sobre a Terra, envia sinais com um farol cada seis minutos. B está numa estação especial, que é estacionária em relação à Terra. C é um foguete indo de A para B com uma velocidade constante de 0,6c em relação a A.

a) Com que intervalo de tempo B recebe os sinais de A?
b) Com que intervalos C recebe os sinais de A?
c) Se C pisca uma luz usando os intervalos iguais aos que recebeu de A, com que intervalo de tempo A recebe os clarões de C?

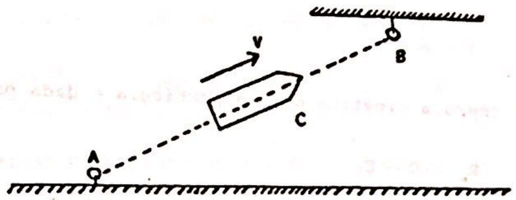


Fig.7

3- Se dois acontecimentos são simultâneos embora não coincidentes num referencial R, mostre que não há limite para a separação no tempo atribuido aos acontecimentos em referenciais diferentes,e que a distância entre os eventos varia de infinito a uma mínima distância, a qual é medida em R.

4- Se dois eventos ocorrem no mesmo ponto do referencial R, onde não são simultâneos, mostre que a sequência temporal destes acontecimentos é a mesma em todos os referenciais. Mostre também que a separação no tempo atribuída aos dois eventos em referenciais diferentes varia de infinito a um mínimo que é medido em R, e que não há limite para a distância entre os acontecimentos.

Dinâmica Relativística

Resumo

O momento relativístico de uma partícula é

$$\vec{P} = m\vec{v} \quad ; \quad m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c}}} \qquad (1)$$

onde m_o é a massa de repouso da partícula

Na dinâmica relativística a energia e a massa de uma partícula estão relacionadas pela equação de Einstein

$$E = mc^2 \qquad (2)$$

A energia cinética de uma partícula é dada por

$$E_k = E - E_o \qquad (3)$$

onde $E_o = m_o c^2$ (3a) é a energia de repouso da partícula.

A energia e o momento relativístico estão relacionados através da equação

$$E^2 = E_o^2 + (pc)^2 \qquad (4)$$

A massa de um sistema ligado de partículas é menor do que a massa total das partes separadas de E_{b/c^2}, pois E_b é a energia de ligação total.

Unidades na Mecânica Relativística

No sistema MKS a massa de uma partícula é expressa em quilogramas (kg), a energia em Joule (J) e o momento em kg.m/s.

Em física atômica e nuclear massas e energias são frequentemente dadas em um sistema unificado de massa e eletron-volts no lugar das unidades-padrão do MKS (quilograma e Joule). A unidade de massa unificada u é definida como 1/12 da massa do átomo de ^{12}C neutro, consistindo no núcleo e seus eletrons.

A unidade de massa unificada é relacionada ao quilograma por

$$1u = 1{,}6606 \times 10^{-27}\,kg$$

O eletron-volt (eV) é definido como a energia de uma carga eletrônica e acelerada através de uma diferença de potencial de 1 volt. Desde que um Joule é um coulomb x volt, e a carga eletrônica é $1{,}602 \times 10^{-19}C$, o eletron-volt e o Joule estão relacionados por

$$1eV = 1{,}602 \times 10^{-19}J$$

Comumente são usados múltiplos do eV que são o keV (10^3eV), o MeV (10^6eV), e o GeV (10^9eV). (O GeV era originalmente chamado BeV).

A energia de repouso de uma massa de 1g é:

$$(1g)c^2 = (10^{-3}kg)\ (3 \times 10^8\ m/s)^2 = 9 \times 10^{13}J = 5{,}61 \times 10^{32}eV$$

A energia de repouso da massa unificada é

$$(1u)c^2 = 931{,}5\ MeV$$

É usual, devido a relação (3a), expressarmos a massa de repouso de uma partícula em unidades de energia.

Na Tabela abaixo mostramos a energia de repouso de algumas partículas

Partícula	Símbolo	Energia (massa) de repouso (MeV)
Neutrino	ν	0
Eletron	e	0,511
Muon	μ	105,7
Proton	p	938,280
Neutron	n	939,573

Tabela 1

Da equação (4) vemos que o produto do momento pela velocidade da luz c tem dimensão de energia; ou seja

[pc] = [energia]

Deste modo podemos expressar o momento em eletron-volt dividido pela velocidade da luz

$$[p] = eV/c \text{ (ou MeV/c, GeV/c)}$$

Exemplos e Aplicações

1. Calcule a massa, o momento e a energia cinética relativística de um muon que se move com velocidade v = 0,999c. A massa de repouso de um muon é $m_o = 1,881 \times 10^{-28}$kg.

Obs.: Note que a massa de repouso do muon pode ser expressa em MeV.

$$m_o c^2 = 1.693 \times 10^{-11} J = 105.7 \text{ MeV (veja Tabela 1)}$$

A massa relativística é

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1,881 \times 10^{-28}}{\sqrt{1-(0,999)^2}} = 4,207 \times 10^{-27} Kg$$

ou

$$mc^2 \approx 2363 \text{ MeV}$$

O momento linear relativístico pode ser calculado por(equação 1)

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

O modulo é: (A direção e o sentido do momento são os mesmos da velocidade)

$$p = mv = 4,207 \times 10^{-27} Kg \times 0,999 \times 3,10^8 m/s$$

$$= 1,26 \times 10^{-18} Kg.m/s \qquad \text{ou}$$

$$p.c = 3,78 \times 10^{-10} J = 2.361 \text{ MeV} \qquad \text{logo}$$

$$p \approx 2.361 \text{ MeV/c}$$

A energia cinética será (equação 3)

$$E_k = E - E_o: mc^2 - m_o c^2 : (4,207 - 0,1881) \times 10^{-27} Kg \times$$
$$\times (3 \times 10^8 m/s)^2$$

$$E_k = 3,617 \times 10^{-10} J \approx 2.257 \text{ MeV}$$

Obs.: Verifique que a relação (4):

$$E^2 = E_o^2 + (pc)^2 \text{ é satisfeita}$$

2. Um eletron tem momento linear de módulo $p = 5 \times 10^{-22}$Kg.m/s. Calcule sua energia cinética relativística. A massa de repouso de um elétron é $m_o = 9.096 \times 10^{-31}$Kg.

Obs.: Note que a massa de repouso do eletron pode ser expressa em MeV:

$$m_o c^2 = 8.186 \times 10^{-14} J = 0,511 \text{ MeV (Tabela 1)}$$

Vamos inicialmente calcular a energia total através da relação 4.

$$E^2 = m_o c^2 + (pc)^2$$

$$m_o c^2 = 8,186 \times 10^{-14} J$$

$$pc = 5 \times 10^{-22} \times 3 \times 10^8 = 1,5 \times 10^{-13} J \qquad \text{daí}$$

$$E = 1,709 \times 10^{-13} J = 1,067 \text{ MeV}$$

A energia cinética é calculada por (3)

$$E_k = E - E_o = 1,709 \times 10^{-13} - 8,186 \times 10^{-14}$$

$$E_k = 8,904 \times 10^{-14} J = 0,556 \text{ MeV}$$

3. Um proton tem massa 1,00731 u. Um neutron tem massa 1,00867 u. Quando os dois se combinam eles formam um deuteron (Hidrogênio pesado), cuja massa de repouso é 2,01360 u. Parte da energia cinética que sobra põe o deuteron em movimento, o resto é irradiado na forma de irradiação γ.

a) Qual a energia cinética que sobra?

b) Seja uma usina atômica que produza 1000 moles de deuterons a cada hora. Qual a potência gerada pela usina?

(a) Sendo m_{oP}, m_{oN} e m_{oD} as massas de repouso do proton, neutron e deuteron respectivamente, a energia do sistema formado pelo proton e pelo neutron em repouso é

$$E = (m_{oP} + m_{oN})\, c^2$$

Como a energia é conservada, após a reação sobre a energia cinética

$$E_K = E - m_{oD}c^2 = (m_{oP} + m_{oN} - m_{oD})\ c^2$$

Substituindo os números na fórmula obtém-se

$$E_K = 3{,}17 \times 10^{-13} J$$

(b) A cada hora, a usina gera uma energia dada por

$$E_K = 3{,}17 \times 10^{-13} \times 1000 \times 6{,}0 \times 10^{23} = 1{,}9 \times 10^{14} J$$

Assim, sua potência é

$$P = \frac{1{,}9 \times 10^{14}}{3600}\ \text{watts} = 5{,}0 \times 10^{10}\ \text{watts}$$

Para se ter uma idéia da grandeza deste número, basta mencionar que a potência elétrica sendo gerada em todo o Brasil é da ordem de $1{,}5 \times 10^{10}$ watts. É preciso porém mencionar que as usinas nucleares hoje existentes no mundo não usam Hidrogênio, mas Urânio, o que fornece muito menos energia.

4. Uma partícula em repouso, de massa M, desintegra-se em duas partículas iguais. Os fragmentos saem em direções opostas com velocidade v. Qual é a massa de repouso dos fragmentos?

A energia (ou massa) e o momento devem ser conservados. Seja m_o a massa de repouso dos fragmentos.

Conservação de momento:

$$m_o\gamma v - m_o\gamma v = 0 \quad , \quad \gamma = [1 - (v/c)^2]^{-\frac{1}{2}}$$

Conservação da massa:

$$m_o\gamma + m_o\gamma = M$$

Assim $m_o = \dfrac{M}{2\gamma}$

Problemas - Dinâmica Relativística

Grupo A

1. A vida média de mésons μ em repouso é $2{,}2 \times 10^{-6}$s. Uma medida no laboratório forneceu uma vida média de $6{,}9 \times 10^{-6}$s.
   a) Qual é a velocidade dos mésons nesta medida?
   b) A massa de repouso de um méson μ é 207 vezes a massa eletrônica. Qual é a massa efetiva dos mésons nesta medida?
   c) Qual é a sua energia cinética?
   d) Qual é o seu momento?
   (massa eletrônica = $9{,}11 \times 10^{-31}$kg)

2. Para um avião supersônico voando a 2400 km/h, ache o erro percentual feito no cálculo da sua energia cinética, usando a aproximação não relativística.

3. Uma caixa retangular em repouso tem arestas com comprimentos a, b e c. A massa de repouso da caixa é m_o, e sua massa de repouso por unidade de volume e $\rho_o = m_o/a\,b\,c$.
   a) Qual é o volume da caixa, visto por um observador que se move em relação à caixa com velocidade V na direção da aresta a?
   b) Qual é a massa medida por este observador?
   c) Qual é a densidade da caixa, em termos de ρ_o, quando é medida por este observador?

4. O núcleo C^{12} consiste de 6 prótons (H^1) e 6 neutrons (n), mantidos em estreita associação por forças nucleares intensas. As massas de repouso são:

C^{12}	12,000 000 u.
H^1	1,007,825 u.
n	1,008 665 u.

Quanta energia seria necessária para separar um núcleo de C^{12} em seus prótons e neutrons constituintes?

5. Considere a seguinte colisão elástica: a partícula A tem massa de repouso m_o e a partícula B, $2m_o$; antes da colisão a partícula A se move na direção +x com uma velocidade de 0,6c,

e a partícula B está em repouso; depois da colisão, a partícula A se move na direção +y e a partícula B se move segundo um ângulo δ em relação a direção +x. Escreva as três equações (não as resolva), das quais poderíamos determinar o ângulo δ e as velocidades de A e B, depois da colisão.

6. Um próton com energia cinética E_k = 437 MeV colide elasticamente com um próton em repouso e os dois prótons emergem com a mesma energia. Nestas condições qual o ângulo entre eles?

7. Um corpo de massa de repouso m_o, caminhando inicialmente com uma velocidade de 0,6c, efetua uma colisão completamente inelástica com um corpo idêntico, inicialmente em repouso.
   a) Qual é a velocidade do único corpo resultante?
   b) Qual é a sua massa de repouso?

8. Uma partícula de massa em repouso m_o tem uma energia cinética E_k. Prove que seu momento é

$$p = \sqrt{2\, m_o\, E_k + E_k^2/c^2}$$

9. Um méson π carregado (massa de repouso = 237 m_e) em repouso se desintegra em um neutrino (massa de repouso zero) e um méson μ (massa de repouso = 207 m_e). Ache as energias cinéticas do neutrino e do méson μ.

10. Um núcleo de um átomo de carbono inicialmente em repouso no laboratório, passa de um estado a outro emitindo um foton de energia 4,43 MeV. O átomo no seu estado final tem uma massa de repouso de 12,0000 u.
   a) Qual o momento do átomo de carbono após a desintegração quando medido no laboratório?
   b) Qual a energia cinética em eV do átomo de carbono, depois do decaimento, quando medida no sistema do laboratório?

Grupo B

1. Um próton (massa de repouso M) se movendo com velocidade v colide com um próton estacionário. Da colisão emergem dois prótons e um méson (massa de repouso m). Mostre que para esta reação ser possível,

$$\gamma(v) \geq 1 + 2m/M + m^2/2M^2$$

(Sugestão: Conservar a massa e momento. Na situação limite, os pródutos da reação caminham com a mesma velocidade).

2. Mostre que a energia cinética relativística $E_k = (m - m_o)\, c^2$ pode ser expressa na forma

$$E_k = \frac{m}{m + m_o}\, mv^2$$

a qual se assemelha muito à forma não relativística $\frac{1}{2}\, mv^2$.

3. (Poli 86) Uma partícula é criada a 20Km acima do nível do mar com energia 1,35 x 10^5MeV e passa a caminhar verticalmente para baixo. No seu sistema próprio (Sistema que se desloca com a mesma velocidade da partícula) ela irá se desintegrar 2,00 x 10^{-8}s após a sua criação. A energia de repouso da partícula é 140MeV. Determine, para um observador na Terra:

   a) Quanto tempo demorou para a partícula se desintegrar.

   b) A que altura acima do nível do mar se deu a desintegração.

4. (Poli 86) Uma partícula do tipo A (M_{OA} = 8,79x10^{-28}Kg, $M_{OA}c^2$ = 494MeV) em repouso se decompõe em três partículas do tipo B (M_{OB} = 2,49 x 10^{-28}Kg, $M_{OB}c^2$ = 140MeV). Suponha a situação em que as três partículas B têm a mesma energia total. Determine:

   a) A energia cinética de cada partícula;

   b) O momento linear de cada partícula (em módulo).

5. (Poli 87) Duas partículas de mesma massa de repouso $m_oc^2 = 1$ BeV caminham em sentidos opostos com velocidades de 0,6c e 0,8c respectivamente. Num determinado instante elas colidem formando uma única partícula de massa de repouso M_o e velocidade V. Determine: (a) o valor de M_o; (b) o valor de V; (c) a energia cinética da partícula formada na colisão.

6. (Poli 86) Uma partícula A, de massa de repouso M_o, movendo-se com velocidade $\beta_o c$, colide com uma partícula B, estacionária, de massa de repouso m_o.
   a) Supondo que a colisão seja completamente inelástica, encontre a velocidade βc da partícula composta que resulta deste processo.
   b) Encontre a massa de repouso M' da partícula composta que é produzida pela colisão. Dê sua resposta em termos da energia cinética E_k da partícula A e das massas M_o e m_o.

7. (Poli 86) Estima-se que a energia cinética máxima de uma partícula associada a um feixe de raios cósmicos é da ordem de 10^{13} MeV (isto é, cerca de 1 J). Admita que um próton com essa energia consiga atravessar a nossa galáxia (que tem um diâmetro de 10^5 anos-luz). No seu sistema próprio de referência, quanto tempo o próton leva para atravessar a galáxia? Justifique a sua resposta. (É dada a massa de repouso do próton, $M_oc^2 = 938,21$ MeV).

8. (Poli 87) Uma partícula de massa de repouso $M_oc^2 = 4,5$ BeV é criada com uma energia cinéstica de 18.0 BeV. Após um intervalo de tempo de 10^{-10}s (medido no sistema próprio da partícula) ela se desintegra em duas partículas idênticas, conforme esquematizado abaixo (figura 8) por um observador no laboratório. Determine, em relação a este observador:
   a) o tempo que a partícula demora para se desintegrar;
   b) a velocidade V em função do ângulo θ;
   c) o valor máximo do ângulo θ.

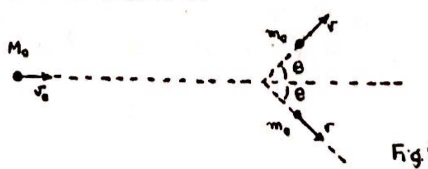


Fig.8

Respostas dos Problemas

<u>Cinemática</u>

<u>Grupo A</u>

1) $x' = 251,6$km, $y' = 10$km, $z' = 1$km e $t' = -7,7 \times 10^{-4}$s

2) $\Delta t = 1577$s

3) $v/c = 0,866$

4) $v = 108,2$km/h

5) $h = 19,448$km

6) a) sim; $\vec{v} = 0,5c\ \vec{I}$ b) $\frac{v}{c} = 3$ (>1 impossível)

7) a) $v/c = 0,132$ b) $\Delta t = 2,52 \times 10^{-6}$s

8) $v/c = 0,946$

9) $\frac{v}{c} = 1/3$

10) a) $v_{21} = 0,985c$ b) $v = -0,90c$

Grupo B

1) a) $tg\theta' = \dfrac{sen\theta}{\cos\theta + v/c}$ b) $tg\theta' = \dfrac{sen\theta}{\cos\theta + v/c} \cdot \dfrac{1}{\gamma}$

c) Se $v/c << 1 \rightarrow \gamma \sim 1$ resultado clássico $\approx$ relativístico

2) a) $t = \dfrac{2d}{c}$ b) $t = \dfrac{2d}{c} \dfrac{1}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}}$

c) $t = \dfrac{2d}{c} \dfrac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ d) $t = \dfrac{2d}{c} \dfrac{1}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}}$

3) a) $t'_o = \dfrac{\ell_o}{c}$ b) $t_1 = \dfrac{\ell_o}{c} \left\{\dfrac{1 - v/c}{1 + v/c}\right\}^{1/2}$

c) $t_2 = \dfrac{\ell_o}{\gamma v}$

4) a) $L' = \dfrac{L}{\gamma} |\cos^2\theta + \gamma^2 \, sen^2\theta|^{1/2}$ b) $\theta' = arc\ tg\ (\gamma tg\theta)$

c) $v'_x = \dfrac{-0,7c \cos\theta + v_o}{1 - 0,7\cos\theta \frac{v_o}{c}}$

d) $v'_y = \dfrac{-0,7c \, sen\theta}{1 - 0,7 \cos\theta \frac{v_o}{c}} \quad (1 - \frac{v_o^2}{c^2})^{1/2}$

5) a) $L_A = L_B = 60m$ b) $L'_B = 21,78m$; $v'_B = -0,976c$

c) $L'_B = 21,78m$; $v'_A = 0,976c$ d) $t = 2,5 \times 10^{-7} s$

6) a) $\vec{v}_e = 0,70c\ \vec{i}$ b) $\vec{v}_e = -0,24\vec{i}$

c) $\vec{v}_e = 0,3c\ \vec{i} + 0,48c\ \vec{i}$ d) $\vec{v}_e = 0,3c\ \vec{i} - 0,48c\ \vec{i}$

7) a) $x'_A = -37,5m$ $x'_B = 37,5m$ b) $t'_A = \dfrac{90}{4c}$ e $t'_B = -\dfrac{90}{4c}$

c) $t = \dfrac{100}{c}$ e $t' = \dfrac{102,5}{c}$

Dinâmica

Grupo A

1) a) $v/c = 0.948$

b) $m = 5,914 \times 10^{-28}kg$ ou $m = 332,3Mev$

c) $E_k = 3,63 \times 10^{-11}J$ ou $E_x = 226,3Mev$

d) $p = 1,682 \times 10^{-19}kg.m/s$ ou $p = 315,0Mev/c$

2) ΔE_k % $= 3,7 \times 10^{-10}$%

3) a) $V'_o = \dfrac{V_o}{\gamma}$, $\gamma = |1 - v^2/c^2|^{-\frac{1}{2}}$ e V_o = a.b.c.

b) $m = m_o\gamma$ c) $\rho'_o = \rho_o\gamma^2$

4) $\Delta E = 1,49 \times 10^{-11}J$ ou $\Delta E = 92,3MeV$

5) 1) $\gamma_A + 2 = \gamma_A' + 2\gamma_B'$ - conservação de massa

$$\left.\begin{array}{l} 2)\ \gamma_A\beta_A = 2\gamma_B'\beta_B' \cos\delta \\ 3)\ \gamma_A'\beta_A' = 2\gamma_B'\beta_B' \operatorname{sen}\delta \end{array}\right\} \text{conservação do momento}$$

Resolvendo $\beta_A' = 0{,}371$, $\beta_B' = 0{,}391$, $\delta = 28{,}1^o$

6) $\theta = 84^o$

7) a) $v/c = 0{,}333$ b) $M_o = 2{,}12m_o$

9) $E_k^\nu = 2{,}30 \times 10^{-12}J$ ou $E_k^\nu = 14{,}4MeV$

$E_k^\mu = 1{,}55 \times 10^{-13}J$ ou $E_k^\mu = 0{,}97MeV$

10) a) $p = 2{,}37 \times 10^{-21}kg.m/s$ ou $p = 4{,}43MeV/c$

b) $E_k = 880eV$

Grupo B

3) a) $T = 1{,}93 \times 10^{-5}s$ b) $h = 14{,}21km$

4) a) $E_k^B = 3{,}95 \times 10^{-12}J$ ou $E_k^B = 24{,}7MeV$

b) $p = 4{,}62 \times 10^{-20}kg.m/s$ ou $p=86{,}7meV/c$

5) a) $M_o = 5{,}09 \times 10^{-27}kg$ ou $M_o = 2{,}86BeV$

b) $\frac{v}{c} = 0{,}2$

c) $E_k = 9{,}43 \times 10^{-12}J$ ou $E_k = 58{,}9MeV$

6) a) $\beta_c = \dfrac{\beta_o c}{1 + \frac{m_o}{M_o}\sqrt{1 - \beta_o^2}}$

b) $M' = \frac{1}{\gamma}(m_o + M_o + T/c^2)$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$

7) $\Delta T = 295{,}9s$

8) a) $T = 5 \times 10^{-10}s$

b) $v = \dfrac{v_o}{\cos\theta}$ onde $v_o = 0{,}980c$

c) $\theta_{max} = 11{,}5^o$