3ª AULA — OK: em 10/8/92

16

As transformações de Lorentz para as coordenadas

Para o observador $\underline{S}$ as quatro coordenadas de espaço-tempo de um evento são (x, y, z, t); as quatro coordenadas de espaço-tempo para o mesmo evento para um observador $\underline{S'}$, em movimento em relação a $\underline{S}$ com uma veloc. $\underline{v}$ são (x', y', z', t'). Como se relacionam (x, y, z, t) com (x', y', z', t')?

As equações apropriadas são as relações de transformação relativísticas de coordenadas de Lorentz (H. A. Lorentz 1903). Para simplificar sua forma vamos supor que:

(1) $\underline{XYZ}$ e $\underline{X'Y'Z'}$ são mutuamente paralelos.

(2) quando as duas origens coincidem, ambos os relógios indicam zero (isto é, $x = x' = 0$ quando $t = t' = 0$).

Uma análise detalhada, baseada na constância de $\underline{c}$, que não faremos aqui (veja por ex. M. Alonso e Finn - Física, vol. 1 - Ed. Edgard Blücher (1972)) resulta nas seguintes transformações de Lorentz para as coordenadas:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\[1em] y' &= y \\[1em] z' &= z \\[1em] t' &= \frac{t - \left(\frac{v}{c^2}\right)x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \end{aligned}}$$

Estas equações nos fornecem as quatro coordenadas x', y', z' e t' à esquerda, em função das quatro coordenadas x, y, z e t à direita. Para encontrar as transformações inversas podemos certamente resolver as equações acima e explicitar x, y, z e t. Por outro ~~lado~~ caminho vamos obter estas equações imediatamente sem manipulações algébricas. Se a velocidade de S' em relação a $\underline{S}$ é $\underline{v}$, a velocidade de $\underline{S}$ em relação a $\underline{S}'$ é $-\underline{v}$. Portanto, podemos chegar às equações inversas semplesmente trocando as coordenadas com linha pelas sem linha e vice-versa e, ao mesmo tempo, substituindo $\underline{v}$ por $-\underline{v}$.

Assim, a primeira das quatro relações acima fica:

$$\boxed{x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}}$$

Podemos facilmente verificar que as eq. acima se reduzem como devem, às relações familiares aplicáveis para baixas velocidades - as assim chamadas transformações de Galileu - tomando-se o limite para baixas velocidades, $\boxed{\frac{v}{c} \to 0}$ (ou o que é a mesma coisa, imaginando-se que a velocidade da luz seja de fato infinita). Neste caso, as equações de Lorentz ficam então:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}\right\}$$

GALILEU $\Rightarrow$ Expressam em termos matemáticos formais o caráter absoluto do espaço e do tempo admitidos na física clássica.

No caso geral, as transformações de coordenadas (transf. de Lorentz) são caracterizadas pelo aparecimento do fator $\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ (que permanece real apenas para $\frac{v}{c} \Rightarrow 1$ | c = veloc limite no universo).

$v > c \Rightarrow$ esp tempo = imaginário !!

As relações para a dilatação do tempo e contração do espaço podem ser deduzidas das transformações de Lorentz. ?Q

→ (<u>ver antes de falar!!</u>)

Note a implicação chocante contida na quarta das equações de Lorentz, a do tempo. Vemos que $\underline{t' \neq t}$ não apenas devido ao denominador (que está associado ao efeito da dilatação do tempo) mas, também, pela presença no numerador do termo $\boxed{t - \left(\frac{v}{c^2}\right)x}$. Isto nos diz que o tempo t' depende não apenas do tempo t e da relação $\frac{v}{c}$ entre velocidades, mas também da <u>coordenada espacial</u> x. <u>Tempo e espaço</u> estão intimamente entrelaçados na relatividade, formando o que, com razão, é chamado de <u>contínuo</u> <u>quadridimensional</u> do <u>espaço-tempo</u>. Uma consequência fundamental - que Einstein considerou a mais profunda - é a <u>relatividade da simultaneidade de dois eventos</u>.

Os argumentos são os seguintes: Suponha que um observador S verifica que dois acontecimentos espacialmente separados, digamos duas explosões, são simultâneos quando cronometrados em seu relógio. Então estes dois eventos não podem ser simultâneos quando cronometrados com o relógio de outro observador S', em movimento; as duas explosões em relação a este segundo observador ocorrem em sequência. Mais especificamente, suponha que os eventos A e B são simultâneos para o observador S, ambos ocorrendo em $t=0$ e nas respectivas localizações $x=0$ e $x=x$. Então, os instantes t' para os eventos A e B para o observador S' podem ser calculados a partir das relações de Lorentz e serão:

EVENTO	Em relação a S: x	t	Em relação a S': t'
A	0	0	0
B	x	0	$\dfrac{-\left(\frac{v}{c^2}\right)x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

Em relação a S'

A: $x' = 0$

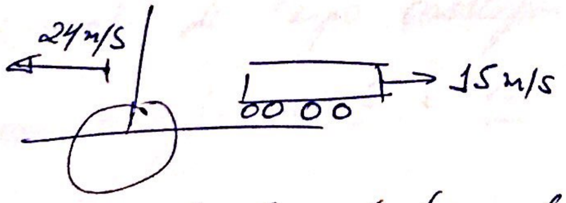
B: $x' = \dfrac{x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

Portanto, o evento B ocorre em um t' negativo!!!

O evento A ocorre em $t'=0$, o que significa que em relação a S' o ~~evento~~ evento B ocorreu antes do evento A.

RELAÇÕES RELATIVÍSTICAS ENTRE VELOCIDADES

Na física clássica não relativística, a regra para relacionar velocidades de um objeto ~~obj~~ observado de dois referenciais que têm velocidade relativa constante é simples: os vetores velocidade se somam como vetores. Quando todas as velocidades têm a mesma direção a situação se simplifica e as velocidades são simplesmente tratadas como escalares. Suponha, por exemplo, que uma partícula se move para leste a 24 m/s em relação à Terra.



A mesma partícula é observada de um trem que se move para oeste a 15 m/s. Então, em relação a um observador no trem ~~que se move~~ a velocidade da partícula é $24 + 15 = 39$ m/s para leste. ~~Com~~ Em termos formais com velocidades muito menores do que c estas as regras para combinar velocidades baseadas na hipótese do caráter absoluto de espaço e de tempo, e nas rel. galileanas que expressam estas hipóteses em linguagem matemática.

Mas, como vimos, intervalos de tempo e espaço não são absolutos e as coordenadas de espaço e de tempo registradas por observadores em referenciais diferentes estão relacionadas pelas transformações de Lorentz. Então, as relações para transformação de velocidades, aplicáveis a quaisquer velocidades e compatíveis com os requisitos da teoria da relatividade podem ser deduzidas das eq. de Lorentz para transformações de coordenadas.

Vamos chamar de $\dot{x}$ a componente X da velocidade quando observado no referencial S. Por definição, $\boxed{\dot{x} = \frac{\Delta x}{\Delta t}}$ = razão entre o deslocamento Δx e intervalo de tempo correspondente Δt, onde Δx é medido com a régua de S e Δt é cronometrado com o relógio de S.

A componente x da velocidade observada no referencial S' é chamada de $\dot{x}'$ e por definição $\boxed{\dot{x}' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}}$

Onde $\Delta x'$ é o deslocamento medido pela régua do observador S' e t' é o intervalo de tempo cronometrado ~~em~~ seu relógio.

Tomando a diferencial (par var. infinitesimal), aqui indicada por Δ em ambos os lados das relações de Lorentz para as coord. e tempo: temos:

$$\boxed{\begin{aligned}
\Delta x' &= \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\\
\Delta y' &= \Delta y\\
\Delta z' &= \Delta z\\
\Delta t' &= \frac{\Delta t - \left(\frac{v}{c^2}\right)\Delta x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}
\end{aligned}}$$

não precisa enquadrar na lousa, é somente 1 passo.

Dividindo agora cada uma das primeiras 3 equações pela quarta, chegamos às relações para as velocidades:

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) - v}{1-\left(\frac{v}{c^2}\right)\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)}$$

Contas

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \left[\frac{\cancel{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}}{\Delta t - \left(\frac{v}{c^2}\right)\Delta x}\right]\cdot\frac{\Delta x - v\Delta t}{\cancel{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}}$$

$$= \frac{\Delta x - v\Delta t}{\frac{\Delta t}{\Delta t}\left[\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right]} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - v}{1-\frac{v}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

$$\frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1-\left(\frac{v}{c^2}\right)\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)}$$

$$\frac{\Delta z'}{\Delta t'} = \frac{\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1-\left(\frac{v}{c^2}\right)\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)}$$

Estas equações se simplificam se usamos as definições $\dot{x}' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$, etc:

$$\boxed{\dot{x}' = \frac{\dot{x}-v}{1-\left(\frac{v}{c^2}\right)\dot{x}}}$$

$$\boxed{\dot{y}' = \frac{\dot{y}\sqrt{1-(v/c)^2}}{1-\left(\frac{v}{c^2}\right)\dot{x}}}$$

$$\boxed{\dot{z}' = \frac{\dot{z}\sqrt{1-(v/c)^2}}{1-\left(\frac{v}{c^2}\right)\dot{x}}}$$

} equações das transformações de Lorentz para as componentes da velocidade!!

obs. p/ $\frac{v}{c} \to 0 \Rightarrow$ rel. de Galileu p/ velocidades:

$$\begin{cases} \dot{x}' = \dot{x} - v \\ \dot{y}' = \dot{y} \\ \dot{z}' = \dot{z} \end{cases}$$

Um resultado surpreendente que está implícito (25)
nas relações (acima) de Lorentz para velocidades é
que as componentes $\underline{\underline{y}}$ e $\underline{\underline{z}}$ da velocidade de uma
partícula medidas em S' dependem da componente x
da velocidade medida em $\underline{\underline{S}}$. As eq. fornecem os valores
com linha (esquerda) em função dos valores sem linha
(da direita). Como no caso das eq. de transformação
para as coordenadas, podemos chegar às eq. para
transf. inversa (sem linha em função dos linha) trocando
simplesmente variáveis com linha pelas sem linha e
substituindo $\underline{\underline{v}}$ por $-\underline{\underline{v}}$.

— — —

<u>exemplos</u>.