

Notas de Aula - Física 4 - Carlos E. J. Carneiro

Baseadas no livro Física 3/4 R. A. Serway - 3ª edição

Cap 41 - Mecânica Quântica

Da discussão do efeito Compton, fica evidente que a luz, pode se comportar como partícula.

Por outro lado, em todas as experiências de difração que descrevemos, a luz apresenta um caráter ondulatório.

Como conciliar estes dois aspectos? Na verdade a

luz não é nem onda nem partícula, a verdadeira natureza da luz não pode ser descrita por um único modelo clássico. A luz tem um caráter dual;

exibe características ondulatórias e características corpusculares

O passo seguinte no desenvolvimento da Mecânica Quântica foi dado por Louis de Broglie em 1923.

Ele postulou que a matéria, de modo análogo à luz, também exibia este caráter dual.

Vimos que o fóton tem energia e momento dados por

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

(84)

Note que o comprimento de onda λ do fóton pode ser calculado a partir de p :

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Louis de Broglie associou a uma partícula de massa m e velocidade v , com $p = mv$, o comprimento de onda

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

(comprimento de onda de de Broglie)

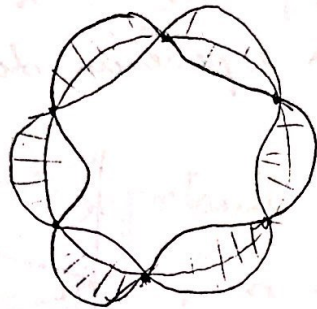
Além disto, em analogia com o fóton, de Broglie também associou uma frequência f às ondas da matéria

$$f = \frac{E}{h}$$

Perceba que as duas fórmulas misturam conceitos de partícula - mv , E - com conceitos ondulatórios - λ , v .

Nesta teoria há uma explicação "simples" para a quantização do momento angular nas órbitas estacionárias de Bohr: as órbitas estacionárias são tais que nelas cabem um

numero inteiro de comprimentos de onda. Nas orbitas estaveis formam-se ondas estacionarias. Assim,



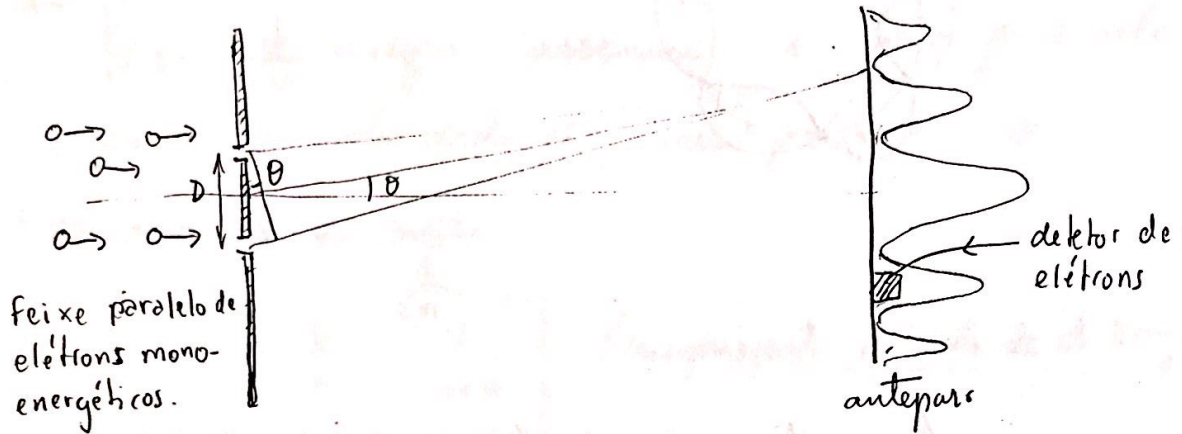
$$\left. \begin{aligned} \frac{2\pi r}{\lambda} &= n \\ \lambda &= \frac{h}{mv} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi r}{\frac{h}{mv}} = n \Leftrightarrow mvr = \hbar n$$

A confirmação da teoria de de Broglie veio em 1927 com o experimento de C. J. Davisson e L. H. Germer (espalhamento de elétrons de baixa energia (54 eV) por um cristal de níquel no vácuo, onde os pesquisadores perceberam que havia máximos e mínimos dos elétrons espalhados dependendo do ângulo de espalhamento).

86 41.3 A experiência da dupla fenda com elétrons

As propriedades ondulatórias do elétron podem ser colocadas em evidência com a experiência da dupla fenda



O detector mede o número de elétrons por intervalo de tempo que chegam ao ponto onde ele foi colocado.

Surpreendentemente, o resultado obtido, deixando-se o detector em cada ponto por um intervalo de tempo suficientemente grande, é análogo ao da interferência de luz. Neste caso, o número de elétrons por intervalo de tempo substitui a intensidade de luz.

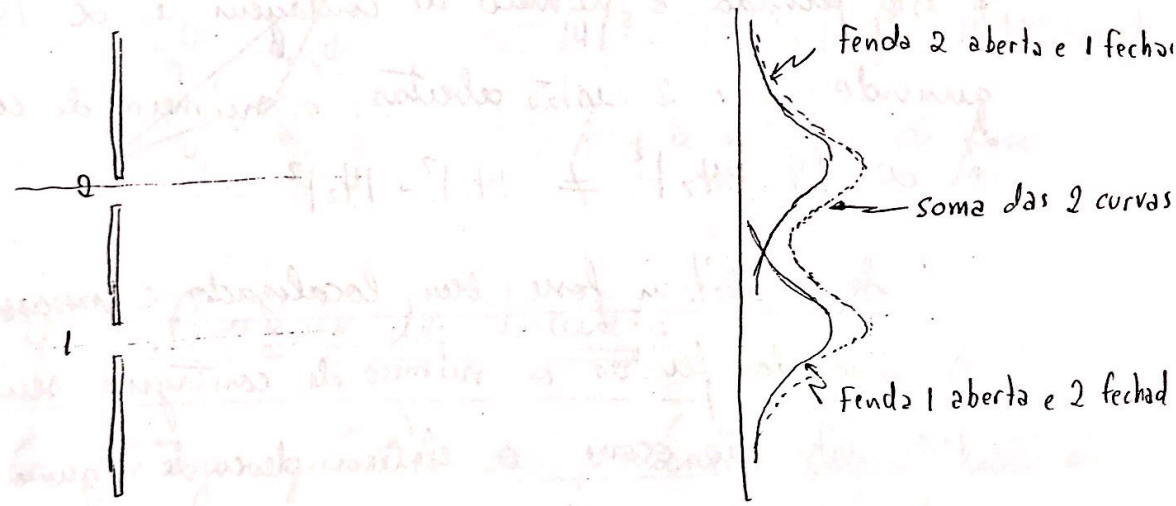


Usando a teoria de de Broglie pode-se prever até mesmo a posição dos máximos e mínimos. Por exemplo, a localização do 1º mínimo é dada por

$$D \sin \theta = \frac{\lambda}{2} \quad \theta \text{ pequeno} \quad \Leftrightarrow \quad D \theta \approx \frac{\lambda}{2} \quad \left. \vphantom{D \sin \theta = \frac{\lambda}{2}} \right\} \Rightarrow \theta \approx \frac{h}{2pD}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (\text{de Broglie})$$

É importante enfatizar que a figura de interferência obtida não é a superposição dos resultados obtidos primeiro fechando-se uma fenda e depois a outra. Nestes casos, não se obtêm figuras de interferência. O número de elétrons por intervalo de tempo tem máximos nas posições da tela opostas às fendas.



Como já dissemos, as curvas obtidas pelos detectores são análogas às curvas de intensidade da luz. Mesmo no caso da luz não somáramos as intensidades. Primeiramente somáramos as ondas eletromagnéticas e só depois calculáramos

88) O módulo quadrado do resultado $I \propto |E_1 + E_2|^2$.
É evidente que $I \neq I_1 + I_2 \propto |E_1|^2 + |E_2|^2$. Para
obter a figura de interferência precisamos associar ao
elétron ondas de matéria, análogas as ondas
eletromagnéticas das fendas. Sejam

$\psi_1 \rightarrow$ onda de matéria quando 1 está aberta e 2 fechada

$\psi_2 \rightarrow$ " " " " 2 " " " 1 " "

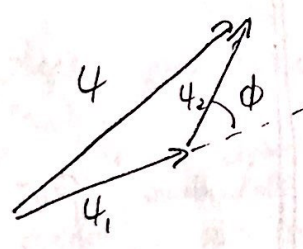
Assim, quando a fenda 2 está fechada o
número de contagens é proporcional a $|\psi_1|^2$, quando
1 está fechada o número de contagens é $\propto |\psi_2|^2$ e
quando 1 e 2 estão abertas o número de contagens
é $\propto |\psi_1 + \psi_2|^2 \neq |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$.

Se o elétron fosse bem localizado e passasse apenas
por uma das fendas o número de contagens seria $\propto |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$.
Mas isto não ocorre, o elétron deve de alguma forma
estar presente simultaneamente nas duas fendas para poder
haver interferência. Quando 1 e 2 estão abertas o
elétron deve estar em um estado superposto:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

A função ψ não pode ser medida. O que é medido é $|\psi|^2$ que conforme vemos está associada à probabilidade por unidade de volume. Na experiência das fendas o número de contagens do detector é claramente proporcional à probabilidade de encontrar o elétron no local onde está o detector.

Vemos mais adiante que a função ψ é em geral complexa. Assim, $\psi_1 + \psi_2$ se adiciona como números complexos (ou fasores)



$$|\psi|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2|\psi_1||\psi_2|\cos\phi$$

ϕ é a diferença de fase.

41.4 Princípio da Incerteza

A natureza quântica das partículas impõe restrições na precisão de medidas simultâneas de várias grandezas.
(Werner Heisenberg - 1927)

(segue)

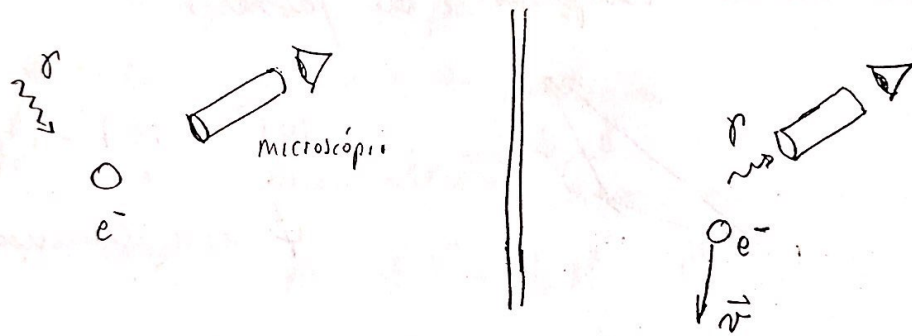
(90)

Se uma medida da posição for feita com precisão Δx e se uma medida simultânea do momento for feita com precisão Δp então

$$\Delta p \Delta x \gtrsim \hbar,$$

ou seja é impossível medir simultaneamente a posição exata e o momento exato de uma partícula.

Para ilustrar este princípio considere a seguinte experiência mental.



Para detectar o elétron, pelo menos um fóton deve entrar no microscópio. Devido ao caráter ondulatório da luz, a precisão Δx deve ser da ordem da resolução do microscópio

$$\Delta x \approx \lambda$$

$D \approx \frac{1}{\sin \theta} \approx \frac{1}{\theta} \approx \frac{1}{1.22 \frac{\lambda}{D}} \approx \frac{D}{1.22 \lambda}$	$\theta \approx \frac{\lambda}{L} \approx 1.22 \frac{\lambda}{D}$
	$\theta \approx \frac{\lambda}{L} \approx 1.22 \frac{\lambda}{D}$
	$\text{ângulo entre o 1º mínimo e o 1º mínimo}$

Por outro lado, na colisão o fóton transmite seu momento da ordem de seu próprio momento:

$$\Delta p \approx \frac{h}{\lambda}$$

Desta forma,

$$\Delta x \Delta p \approx \lambda \frac{h}{\lambda} = h$$

inversamente proporcionais

Existe uma outra relação de incerteza, envolvendo a precisão na medida da energia, ΔE , e o intervalo de tempo para efetuar a medida, Δt :

$$\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar$$

Considere, por exemplo, a medição de frequência de uma onda. Se o aparelho medidor tiver uma sensibilidade fixa de ± 1 ciclo, ^(exemplando exemplo da espessura de uma folha de papel) ao medir em um segundo uma onda de 1000 Hz obteremos $(1000 \pm 1) \frac{\text{ciclos}}{1s}$. Se a mesma medida for feita em 2s, o resultado será $(2000 \pm 1) \frac{\text{ciclos}}{2s}$

\Rightarrow A incerteza na frequência Δf é inversamente proporcional a Δt , ou seja

$$\Delta f \approx \frac{1}{\Delta t} \Leftrightarrow \cancel{\Delta f \Delta t \approx 1}$$

Mas, $E = hf \Rightarrow \Delta E = h \Delta f \Rightarrow \cancel{\Delta f = \frac{\Delta E}{h}} \quad \cancel{\Delta E = \frac{h}{\Delta t}}$

$$\Leftrightarrow \Delta E \Delta t \approx h$$

(92)

Largeza das Raias Espectrais

O tempo médio que um átomo excitado leva para decair é chamado vida média, τ .

Se $\tau = 10^{-8}$ s, usar o princípio da incerteza para calcular a largura da raia, Δf , provocada por esta vida média finita.

Observe que a frequência do fóton emitido no decaimento fornece a diferença de energia entre o estado excitado e o estado no qual o átomo decaiu. Assim, ao medir a frequência do fóton estamos medindo a energia do estado excitado, no intervalo $\Delta t \approx \tau$.

Como $\Delta E \Delta t \approx \hbar$, a energia deste fóton (ou sua frequência) não pode nestes decaimentos ser sempre a mesma. Ou seja a raia tem uma certa largura.

$$\Delta E \Delta t \approx \hbar \Rightarrow \hbar \Delta f \overline{\Delta t} \approx \frac{\hbar}{2\pi}$$

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi \tau} = \frac{1}{2\pi \times 10^{-8}} = 1,6 \times 10^7 \text{ Hz}$$

$$\lambda = 400 \text{ nm} \quad \lambda = 4 \times 10^{-7} \text{ m} \quad f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{4 \times 10^{-7}} = 0,75 \times 10^{15} = 7,5 \times 10^{14}$$

41.5 Introdução à Mecânica Quântica

Vimos que a matéria, analogamente ao que ocorre com a luz, tem um caráter dual. Isto se revela de maneira clara na experiência da dupla fenda com elétrons. Mostramos que para obtermos efeitos de interferência era necessário associarmos ao elétron uma onda de matéria, ψ .

A função ψ não pode ser medida diretamente. O que é medido é $|\psi|^2$, que desempenha um papel análogo ao da intensidade de luz. $|\psi|^2$ está ligada ao número de elétrons que chega ao detector, ou, o que é equivalente, à probabilidade do elétron estar onde está o detector.

A interpretação probabilística de ψ foi sugerida pela primeira vez por Max Born em 1928. Para ser mais preciso $|\psi|^2$ é uma densidade de probabilidade

$P(\vec{r}, t) dV = |\psi^2(\vec{r}, t)| dV =$ probabilidade de se achar a partícula em um volume dV centrado no ponto \vec{r} no instante t .

94

Em 1 dimensão, dV é substituído por dx e ψ é a probabilidade por unidade de comprimento.

$$P(x) dx = |\psi|^2 dx \quad (\text{nos limitamos ao caso 1D})$$

Como a probabilidade de a partícula estar em algum lugar é 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1 \quad (\text{normalização})$$

A probabilidade de se encontrar a partícula no intervalo $[a, b]$ é

$$P_{ab} = \int_a^b |\psi|^2 dx$$

O valor esperado da posição, $\langle x \rangle$, é obtido com

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi|^2 dx$$

e

$$\langle F \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) |\psi|^2 dx$$

Precisamos, agora, mostrar como determinar ψ . Isto é feito através da equação de Schrödinger.