Física IV

2020

Professor: Valdir Guimarães

E-mail: valdir.guimaraes@usp.br

Exercícios aula 14-15-16

Onda de De Broglie

Louis De Broglie
(1892-1985)

Nobel 1929

- Louis De Broglie postulou em 1924 que partículas também possuiriam um comportamento ondulatório com um comprimento de onda: **onda de matéria.**
- De Broglie relacionou o comprimento de onda (λ) com a quantidade de movimento (p) da partícula:

$$\lambda_{broglie} = \frac{h}{p}$$ Comprimento de onda de De Broglie

Comprimento de onda de De Broglie para um elétron

$$m = 9{,}11 \times 10^{-31}\ kg$$
$$K = 100\ eV$$

$$\lambda_{broglie} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mK}} = \frac{6{,}6 \times 10^{-34}\ J.s}{\sqrt{2 \times (9{,}11 \times 10^{-31}\ kg)(1{,}602 \times 10^{-19}\ \frac{J}{eV} \times 100\ eV)}}$$
$$= 1{,}2 \times 10^{-10} m$$

39.47

a) Qual é o comprimento de onda de De Broglie de um elétron acelerado a partir do repouso por meio de um aumento de potencial igual a 125 V?

b) Qual é o comprimento de onda de De Broglie de uma partícula alfa ($m=6{,}64\times10^{-27}$Kg) acelerada a partir do repouso por meio de uma diminuição de potencial igual a 125 V?

$$h = 6{,}63 \times 10^{-34}\ J.s$$

$$h = 4{,}14 \times 10^{-15}\ eV.s$$

$\boxed{39.47}$

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

a) elétron com $E = 125\ eV$

$$E = 125 \times 1{,}6 \times 10^{-19}\ C.V = 200 \times 10^{-19}\ J$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{6{,}63 \times 10^{-34}\ J.s}{\sqrt{2 \times 9{,}11 \times 10^{-31}\ kg \times 200 \times 10^{-19}\ J}}$$

$$\boxed{\lambda = 1{,}10 \times 10^{-10}\ m \Rightarrow \lambda = 1{,}10\ Å}$$

b) partícula alfa

$$\lambda = \frac{6{,}63 \times 10^{-34}\ .\ J.s}{\sqrt{2 \times 6{,}64 \times 10^{-27} \times 2 \times 1{,}6 \times 10^{-19} \times 125}}$$

$$\boxed{\lambda = 9{,}10 \times 10^{-13}\ m \Rightarrow \lambda = 0{,}009\ Å}$$

39.16.

Um feixe de elétrons de 188 eV incide perpendicularmente sobre uma superfície de um crista como indicado na figura. O máximo m=2 ocorre para um ângulo de 60,6 graus.

a) Qual é o espalhamento entre os átomos adjacentes na superfície?

b) Em que ângulos ocorrem os demais máximos ?

c) Para que energia do elétron (em eV o máximo m=1 ocorre para um ângulo 60,6 graus ? Nessa energia existe o máximo m=2?

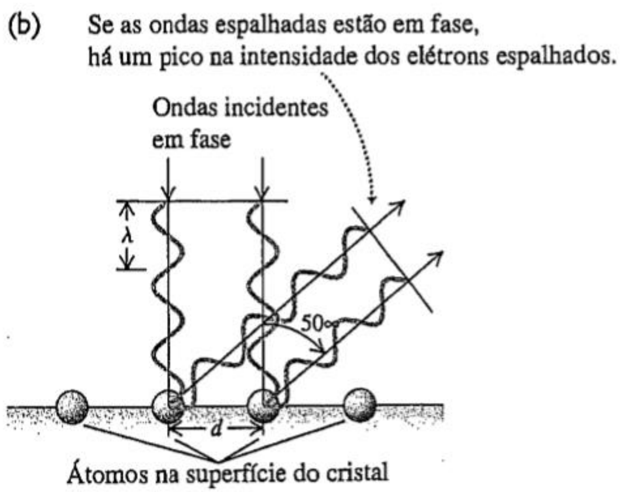
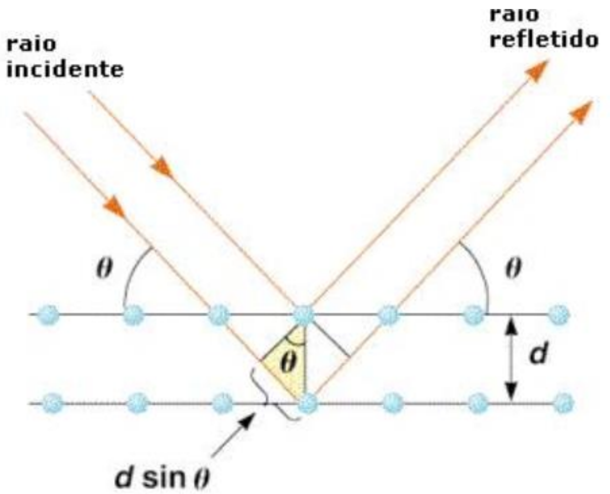


Figura 39.4 (a) Gráfico da intensidade do feixe de elétrons espalhados mostrado na Figura 39.3 em função do ângulo de espalhamento θ. (b) Interferência construtiva entre as ondas dos elétrons espalhados por dois átomos adjacentes quando $d\text{sen}\theta = m\lambda$. No caso mostrado aqui, $\theta = 50°$ e $m = 1$.

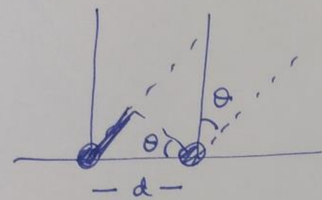


Lei de Bragg => Ocorrerá interferência se a diferença de caminho for múltiplo do comprimento de onda.

$$2d\sin(\theta) = n\lambda$$

39.16

a) eletron de 188 eV $\theta = 60,6^\circ$ $m = 2$



diferença de caminho

$d \operatorname{sen}\theta = m\lambda$

a) $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{6{,}63 \times 10^{-34}\ J.s}{\sqrt{2 \times 9{,}11 \times 10^{-31}\ kg\ 188\ eV\ 1{,}602 \times 10^{-19}\ \frac{J}{eV}}}$

$\lambda = 0{,}9 \times 10^{-10} \Rightarrow \lambda = 0{,}9\ \text{Å}$

$d \operatorname{sen}\theta = m\lambda$

$d = \frac{m\lambda}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{2 \times 0{,}9 \times 10^{-10}}{\operatorname{sen} 60{,}6} = \frac{2 \times 0{,}9 \times 10^{-10}}{0{,}8712}$

$d = 2{,}06 \times 10^{-10}\ m$

$= 2{,}06 \times \text{Å}$

$= 0{,}206\ nm$

b) $m = 1 \Rightarrow 2{,}06 \times 10^{-10} \operatorname{sen}\theta = 1 \times 0{,}9$

$d \operatorname{sen}\theta = m\lambda$

$\Rightarrow \boxed{\theta = 25{,}8^\circ}$

outro máximo

c) $d \operatorname{sen}\theta = m\lambda$

$\theta = 60{,}6$

$m = 1$

$\Rightarrow$

$0{,}206 \times 10^{-9} \times \operatorname{sen} 60{,}6 = 1 \times \lambda$

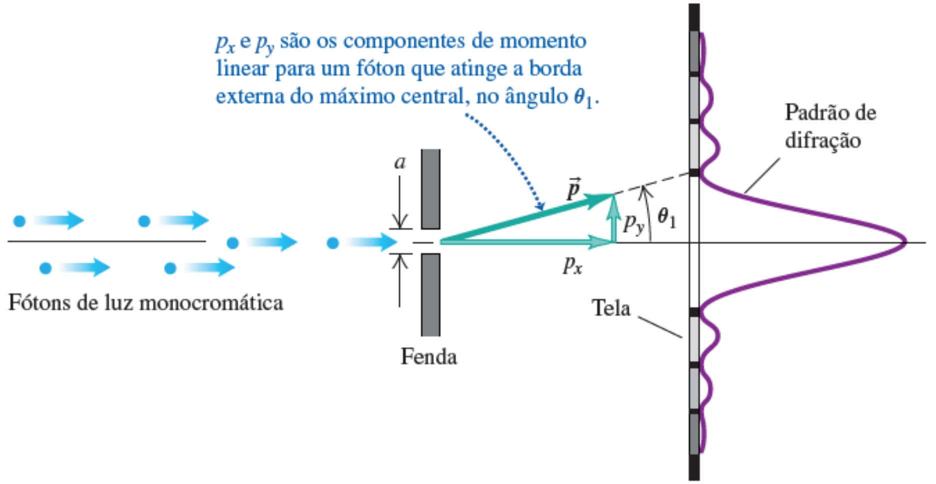
$\lambda = 1{,}8 \times 10^{-10}\ m$

$\Downarrow$

$\boxed{E = 46{,}8\ eV}$

p/ essa energia e $m = 2 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta > 1$ não tem outro máximo

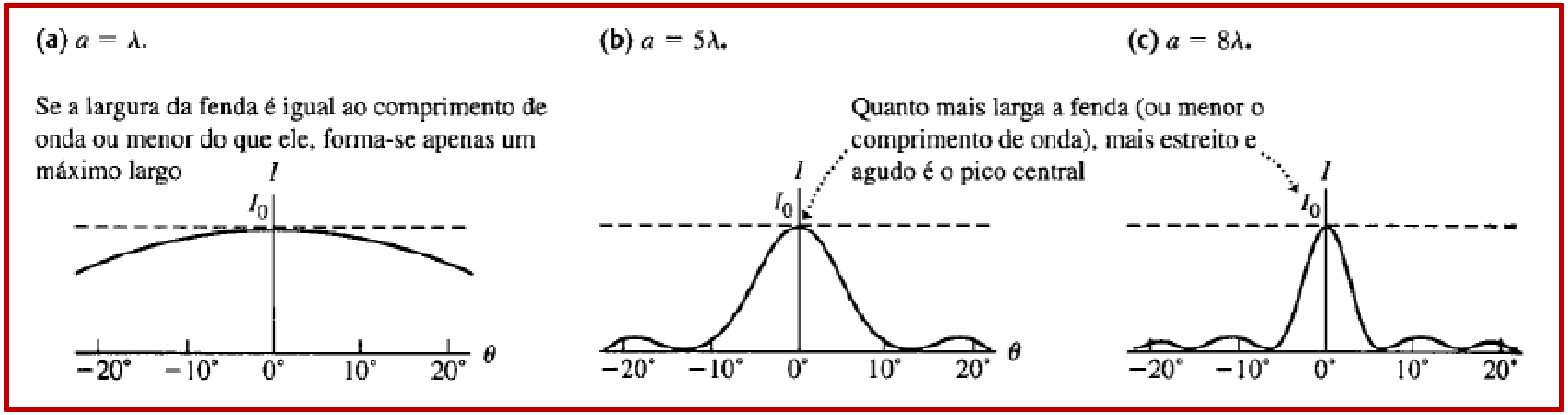
Difração de Fraunhofer – Largura da distribuição

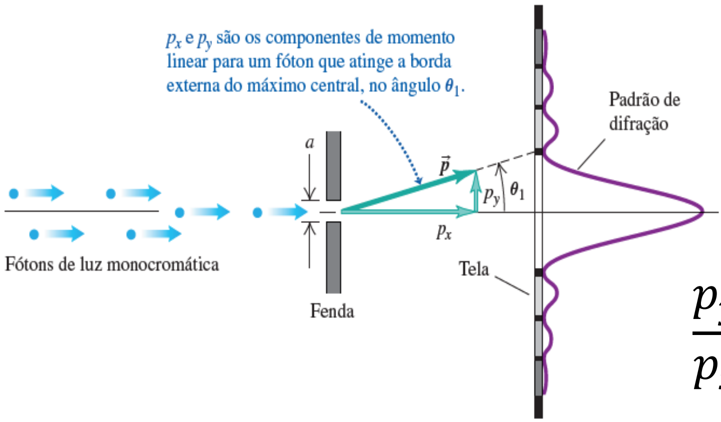


$$sen\theta_m = \theta_m = m\frac{\lambda}{a} \qquad \theta_1 = \frac{\lambda}{a}$$

O valor de θ_1 determina a metade da largura do máximo central.

- Efeitos da difração para a próximo a λ:





p_x Momento linear na direção x

p_y Momento linear na direção y

θ_1 angulo

$$\frac{p_y}{p_x} = \tan\theta_1 \quad \Rightarrow \quad p_y = p_x\theta_1 \quad \Rightarrow \quad p_y = p_x\frac{\lambda}{a}$$

Valor médio $< p_y > = 0$ e incerteza $\Delta p_y \geq p_x\frac{\lambda}{a}$

Usando que $\lambda = \frac{h}{p_x}$ temos: $\Delta p_y \geq \frac{h}{a}$ e: $\Delta p_y a \geq h$

- Não podemos prever a trajetória exata após passar a fenda.
- Só podemos descrever a probabilidade de que um fóton individual vai atingir um determinado ponto na tela.
- Essa indeterminação fundamental não tem correspondência na mecânica newtoniana.

A largura da fenda está relacionada a uma incerteza na posição y

A largura da distribuição está relacionada a uma incerteza na componente y do momento

Principio de incerteza

Usando que $\lambda = \frac{h}{p_x}$ temos: $\Delta p_y \geq \frac{h}{a}$ e: $\Delta p_y a \geq h$

- A largura "a" da fenda representa uma incerteza na posição y de um fóton.
- Não podemos saber exatamente onde o fóton irá parar após passar através da fenda.
- Logo, a posição y e a componente p_y do momento linear possuem incertezas.
- Para diminuir a incerteza de p_y temos que reduzir a largura da figura de difração.
- Para reduzir a largura da figura de difração precisamos aumentar a largura a da fenda, o que aumenta a incerteza da posição y.
- Reciprocamente, quando diminuímos a incerteza da posição y reduzindo a largura da fenda, a figura de difração se alarga e a incerteza do momento linear aumenta.

- Isso é mais geral e considerando devios-padrões da posição e momento temos o principio de incerteza da mecânica quântica:

principio de incerteza

$$\boldsymbol{\Delta y \Delta p_y} \geq \frac{\hbar}{2}$$

39.22

a) A incerteza na medida da coordenada x da posição de um elétron é 0,20 nm. Qual é a componente x da velocidade v do elétron, sabendo que a porcentagem de incerteza mínima para medir simultaneamente a posição e a velocidade v_x é igual a 1,0%?

(incerteza mínima da velocidade é 1% da velocidade)

b) Repita para um próton.

$\boxed{39.22}$ $\boxed{\text{elétron}}$ $m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}\ kg$

$$\Delta x\, \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$\Delta x\, m\, \Delta v_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad \text{com} \quad \Delta v_x = 0{,}01\, v_x$$

$$\Delta x\, m_e\, 0{,}01\, v_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$v_x = \frac{\hbar}{2}\, \frac{1}{\Delta x\, m_e\, 0{,}01} = \frac{6{,}63 \times 10^{-34}\ J.s}{2 \times 2 \times 3{,}1415}\, \frac{1}{0{,}2 \times 10^{-9} \times 9{,}11 \times 10^{-31} \times 0{,}01}$$

$$\boxed{v_x = 28{,}9 \times 10^{6}\ m/s}$$

$\boxed{\text{próton}}$

$$m_p = 1{,}673 \times 10^{-27}\ kg$$

$$v_x = \frac{6{,}63 \times 10^{-34}}{2 \times 2 \times 3{,}1415}\ J.s\ \frac{1}{0{,}2 \times 10^{-9} \times 1{,}673 \times 10^{-27} \times 0{,}01}$$

$$\boxed{v_x = 15{,}8 \times 10^{3}\ m/s}$$

39.24

a) A incerteza na medida da coordenada y da posição de um próton é igual a $2{,}0 \times 10^{-12}$ m. Qual é a incerteza mínima para se medir simultaneamente a posição e a componente y da velocidade do próton ?

b) A incerteza na medida da componente z da velocidade de um elétron é igual a 0,250 m/s Qual é a incerteza mínima para medir simultaneamente a velocidade e a coordenada z do elétron?

$\boxed{39.24}$ ~~de~~ próton $m = 1{,}673 \times 10^{-27}$ kg

a)

$$\Delta x \, \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \Delta p_x = m \, \Delta v_x$$

$$\Delta x = 2{,}0 \times 10^{-12} \text{ m}$$

$$\Delta x \, m_p \, \Delta v_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$2{,}0 \times 10^{-12} \times 1{,}673 \times 10^{-27} \text{ kg } \Delta v_x \geq \frac{6{,}63 \times 10^{-34} \text{ J.s}}{2 \times 2 \times 3{,}1415}$$

$$\Delta v_x = \frac{6{,}63}{2 \times 2 \times 3{,}14{,}15} \frac{1}{2} \frac{1}{1{,}673} \times 10^{-34} \times 10^{12} \times 10^{27}$$

$$\boxed{\Delta v_x = 1{,}58 \times 10^{4} \text{ m/s}}$$

b) para $\Delta v_x = 0{,}250$ m/s

$$\Delta x = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{m \, \Delta v_x} = \frac{6{,}63 \times 10^{-34} \text{ J.s}}{2 \times 2 \times 3{,}1415} \frac{1}{9{,}11 \times 10^{-31} \text{ kg}} \frac{1}{0{,}2\ldots}$$

$$\boxed{\Delta x = 2{,}31 \times 10^{-4} \text{ m}}$$

Partícula livre

A função de onda descreve o movimento de uma partícula livre é dada por:

$$\Psi(x,t) = A[\cos(kx-\omega t) + i\,\mathrm{sen}(kx-\omega t)]$$

ou

$$\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)} = Ae^{ikx}e^{-i\omega t}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda = 2\pi/k \\ k = 2\pi/\lambda \\ T = 2\pi/\omega\ , \\ \nu = 1/T = \omega/2\pi \\ \omega = 2\pi\nu\ . \end{array}\right.$$

Partícula se movendo no sentido positivo de x com momento p e energia E

$$E = hf = \frac{h}{2\pi}2\pi f = \hbar\omega$$

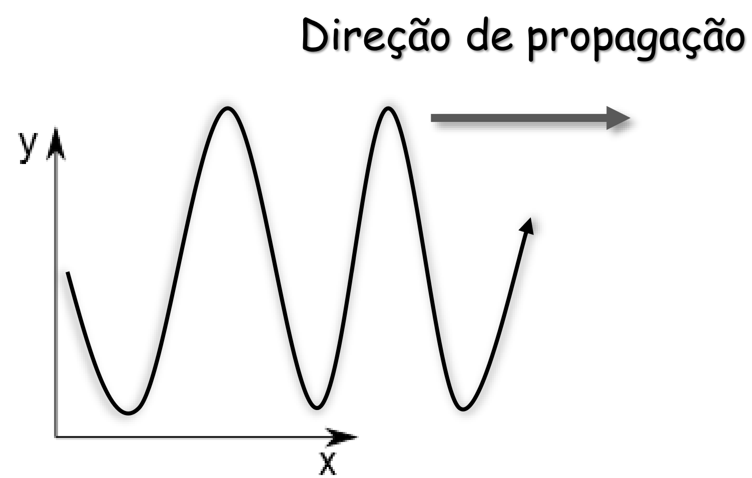
$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi}\frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k$$

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Se o momento "p" ou numero de onda "k" é bem definido, $\Delta p_x \to 0$, pelo principio da incerteza a posição da partícula é indefinida $\Delta x \to \infty$

$$\boxed{\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}}$$



Nossa discussão sobre combinação de ondas também mostra que existe um princípio da incerteza que envolve energia e tempo.

$$\Psi(x, t) = A[\cos(kx - \omega t) + i\,\mathrm{sen}(kx - \omega t)]$$

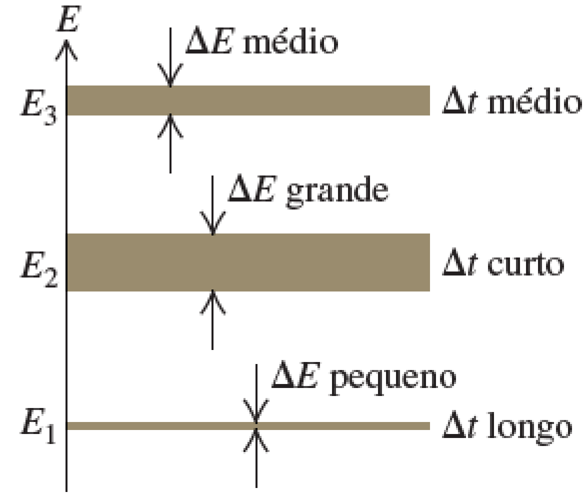
$$E = hf = \frac{h}{2\pi}2\pi f = \hbar\omega$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi}\frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k$$

$$\hbar\omega t = Et$$

$$\hbar k x = p_x x$$

Figura 39.35 Quanto maior a vida média Δt de um estado de energia, menor é sua propagação de energia (mostrada pela largura dos níveis de energia).



Principio da incerteza posição momento

$$\boxed{\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}}$$

Principio da incerteza energia tempo

$$\boxed{\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}}$$

Está relacionado com a vida-média e largura do nível

39.26

a) Vida média de uma partícula. A partícula instável W+ possui energia de repouso igual a 80,41 GeV e a incerteza na energia de repouso é 2,06 GeV. Estime a vida média da partícula.

39.26

$$\Delta E \cdot \Delta t = \frac{\hbar}{2}$$

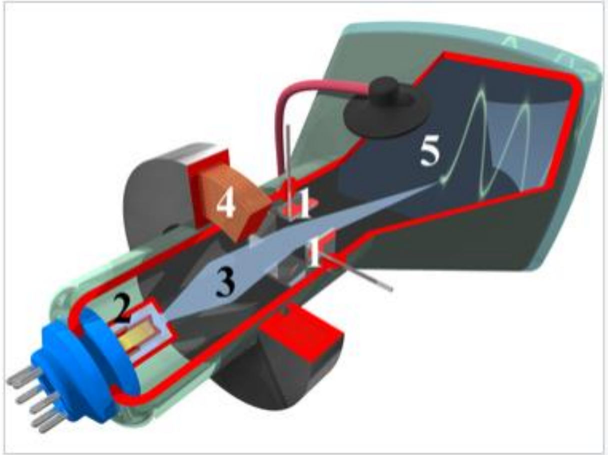
$$\Delta E = \Delta m\, c^2$$

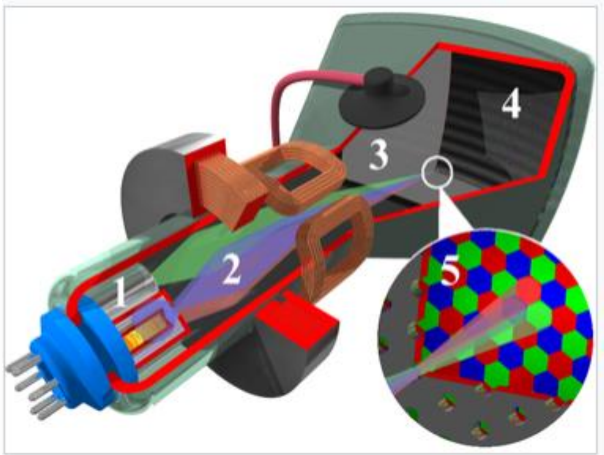
$$\Delta E = 2{,}06 \times 10^{9}\ \mathrm{eV} \times 1{,}6 \times 10^{-19}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{eV}}$$

$$\Delta E = 3{,}3 \times 10^{-10}\ \mathrm{J}$$

$$\Delta t = \frac{\hbar}{2}\,\frac{1}{\Delta E} = \frac{6{,}63 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}}{2 \times 2 \times 3{,}1415}\,\frac{1}{3{,}3 \times 10^{-10}}$$

$$\boxed{\Delta t = 1{,}6 \times 10^{-25}\ \mathrm{s}}$$





- A cor da imagem que aparece na televisão é determinada pelo material fluorescente que reveste a tela.
- Esse material pode ser preto e branco, verde e branco, azul e branco ou vermelho e branco. Em uma TV em cores o tubo possui três canhões eletrônicos, um para cada cor primária da luz (verde, azul e vermelho).
- A tela é composta por inúmeros pontos triplos, fosforescente, que emitem luz ao serem atingidos pelos feixes de elétrons.

39.52

No cinescópio de uma TV, a voltagem de aceleração é igual a 15,0 kV, o feixe de elétrons passa através de uma abertura de 0,50 mm de diâmetro e atinge uma tela situada a uma distância de 0,300 m de abertura.

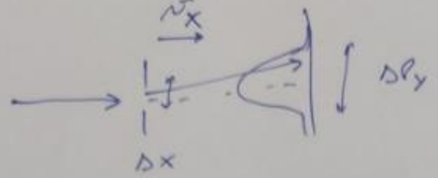
a) Calcule a incerteza na componente da velocidade perpendicular a reta entre a abertura e a tela.

b) Qual é a incerteza na localização do ponto onde o elétron atinge a tela ?

c) O efeito da incerteza afeta significantemente a nitidez da imagem?

(Use expressões não relativísticas para o movimento dos elétrons.)

39.52



$$\Delta y \, \Delta P_y \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta v_y = \frac{\Delta P_y}{m} = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{m \Delta y}$$

$$\Delta v_y = \frac{6{,}63 \times 10^{-34}}{2 \times 2 \times 3{,}1415} \frac{1}{(9{,}11 \times 10^{-31}\, kg)} \frac{1}{(0{,}5 \times 10^{-3}\, m)}$$

$$\Delta v_y = 0{,}115 \; m/s$$

Δr no screen

$$\Delta r = \Delta v_y \times t$$

t = tempo que demora para chegar na tela

$$t = \frac{x}{v_x} = \frac{0{,}3\, m}{\sqrt{2K/m}} = \frac{0{,}3}{\sqrt{\dfrac{2 \times 15 \times 10^{3}\, eV \times 1{,}6 \times 10^{-19} \frac{J}{eV}}{9{,}11 \times 10^{-31}\, kg}}}$$

$$t = \frac{0{,}3}{\sqrt{5{,}27 \times 10^{+15}}} = \frac{0{,}3}{\sqrt{52{,}7}} =$$

$$t = 0{,}041 \times 10^{-7}$$

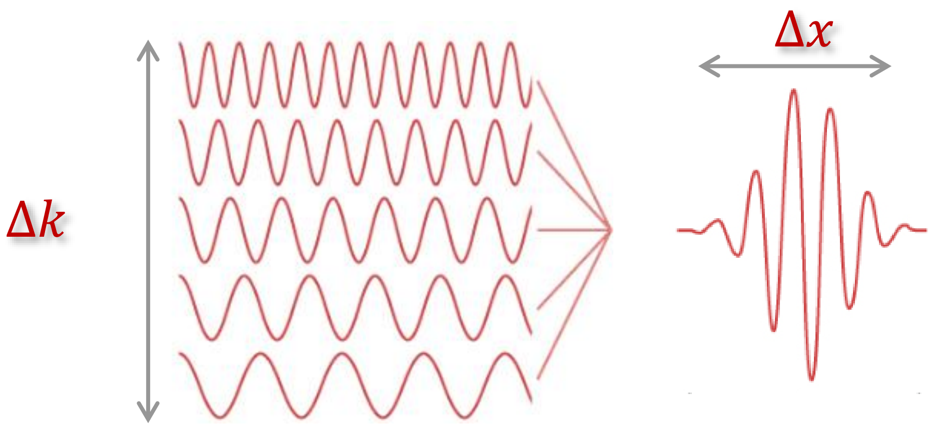
$$\Delta r = 0{,}115 \times 4{,}1 \times 10^{-9} = 4{,}7 \times 10^{-10}\, m$$

↓

muito pequeno

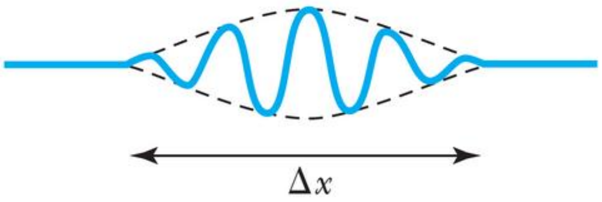
Se somarmos várias ondas podemos obter um pacote de ondas mais localizado.

Uma soma de várias ondas com k_1, k_2, k_3 + ... numa faixa de largura Δk produz um pacote de onda localizado num intervalo $\Delta x = 2\pi/\Delta k$



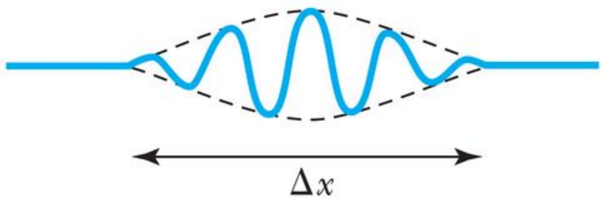
Na mecânica quântica utilizamos a função de onda.

Para descrever uma partícula mais localizada podemos então considerar a ideia de analise de Fourier e somar várias funções de onda.



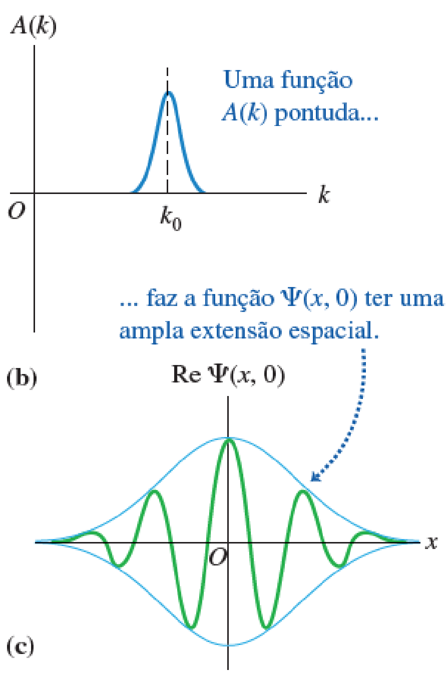
$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)\, e^{i(kx-\omega t)}\, dk$$

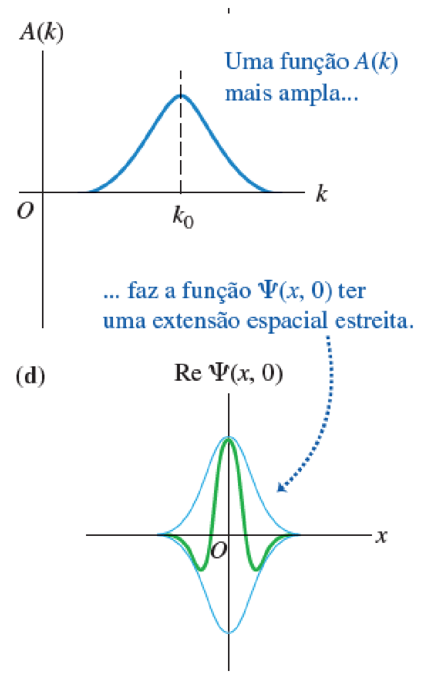
Pacote de onda na mecânica quântica.



$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)\, e^{i(kx-\omega t)}\, dk$$

A amplitude A(k) define como será a localização em momento que por sua vez define como será a localização em posição da função de onda resultante.





- Valor esperado para posição:

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x\Psi^*(x,t)\Psi(x,t)\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)\,dx}$$

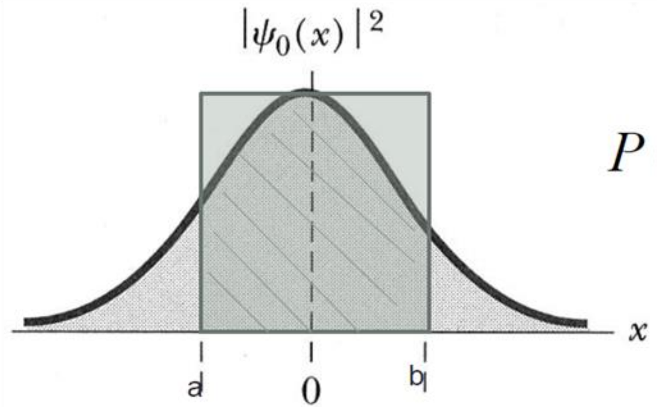
Se a função de onda for devidamente normalizada:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*\,\Psi\,dx = 1$$ **ou** $$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\Psi^*(x,t)\Psi(x,t)\,dx$$

Probabilidade de encontrar uma partícula entre x_1 e x_2.

$$P = \int_{x_1}^{x_2} \Psi^*\,\Psi\,dx$$



$P =$ constante

39.29

Considere a função de onda dada por $\psi(x) = A \text{ sen } kx$, com $k = 2\pi/\lambda$ e A uma constante real.

a) Para quais valores de x ocorre a probabilidade máxima de encontrar a partícula?

b) Para quais valores de x a probabilidade é igual a zero?

39.29

$\psi(x) = A \operatorname{sen} kx$

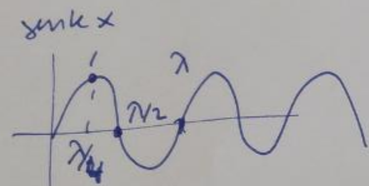
densidade de probabilidade

$$\rho = |\psi(x)|^2 = A^2 \operatorname{sen}^2 kx$$

a)

a probabilidade vai ser máxima para

$$\operatorname{sen} kx = 1 \Rightarrow kx = m\frac{\pi}{2}$$

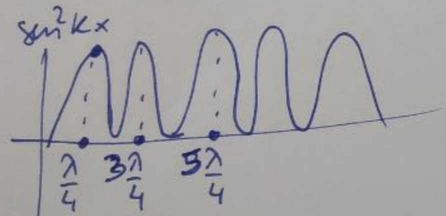


$$x\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{m\pi}{2}$$

$$\boxed{x = m\frac{\lambda}{4}}$$

$m = 1, \cancel{2}, 3, 4$

$m = 1, 3, 5 \ldots$



b) probabilidade será nula para $|\psi^2| = 0$

$\operatorname{sen} kx = 0 \qquad kx = m\pi$

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = m\pi$$

$$x = m\frac{\lambda}{2} \qquad m = 0, 1, 2 \ldots$$

39.66

Uma partícula é descrita por uma função de onda normalizada dada por:

$$\psi(x, y, z) = Axe^{-\alpha x^2} e^{-\beta y^2} e^{-\gamma z^2}$$

Onde, A, α, β e γ são constantes positivas e reais.

A probabilidade de que a partícula seja encontrada no volume infinitesimal dxdxdz centralizado no ponto (x_0,y_0,z_0) é dada por:

$$|\psi(x_0, y_0, z_0)|^2 \, dx \, dy \, dz.$$

a) Em que valores de x_0 é mais provável encontrar a partícula?

b) Em que valores de x_0 a probabilidade de encontrar a partícula seja igual a zero?

$\boxed{39.66}$

$$\psi(x,y,z) = A\,x\,e^{-\alpha x^2} e^{-\beta y^2} e^{-\gamma z^2}$$

$$P = |\psi|^2 = A^2 x^2 e^{-2\alpha x^2} e^{-2\beta y^2} e^{-2\gamma z^2}$$

$$= A^2 x^2 e^{-2\alpha x^2} f(y,z)$$

$$= A^2 u\, e^{-2\alpha u}$$

a)

$$\frac{\partial}{\partial u}|\psi|^2 = 0 \qquad \text{máximo}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}|\psi^2| = (1-2\alpha u)\,|\psi|^2$$

o máximo ocorre para $u = \frac{1}{2\alpha}$

$$u = x^2 \Rightarrow \boxed{x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}}$$

b) $|\psi|^2$ é nula para $x = 0$

$|\psi|^2 = 0$ para $x = 0$ e para $x = \pm\infty$