Física IV

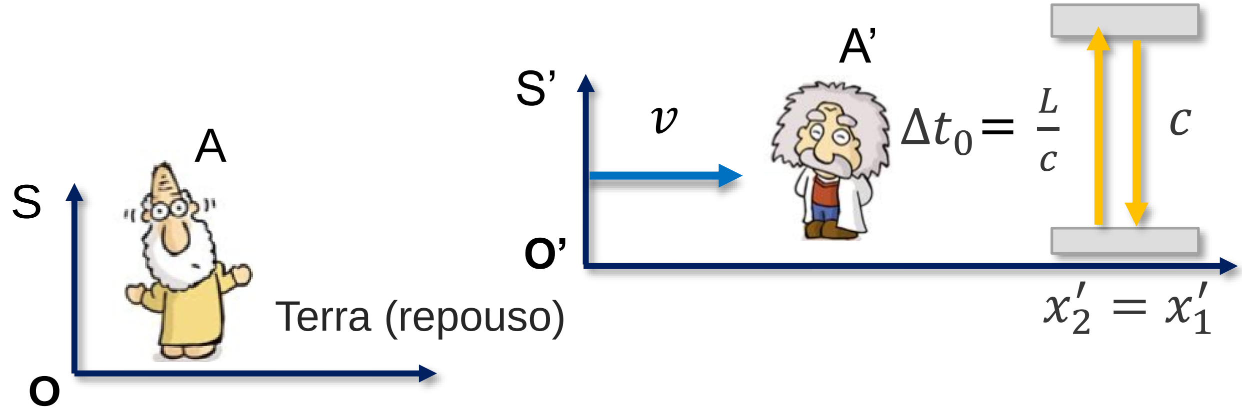
2020

Professor: Valdir Guimarães

E-mail: valdir.guimaraes@usp.br

Aula-7: Exercícios, paradoxos, adição velocidades

Dilatação do tempo



Relógio está em repouso e mede o tempo próprio.

$$\Delta t_0 = t_2' - t_1'$$

Tempo próprio.

A’ faz observação em seu próprio referencial S’.

Para A’ o relógio está parado em relação a ele.

$$x_2' = x_1'$$

A faz observação do evento que ocorre em S’ (em movimento)

A conclui que o intervalo de tempo desse evento foi:

$$\Delta t = \frac{L}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Fator de Lorentz

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > 1$$

$$\Delta t = \Delta t_0 \gamma$$

$$\Delta t > \Delta t_0$$

Houve uma dilatação do tempo.

O ponto é que A observou eventos em um sistema em movimento $x_2 \neq x_1$

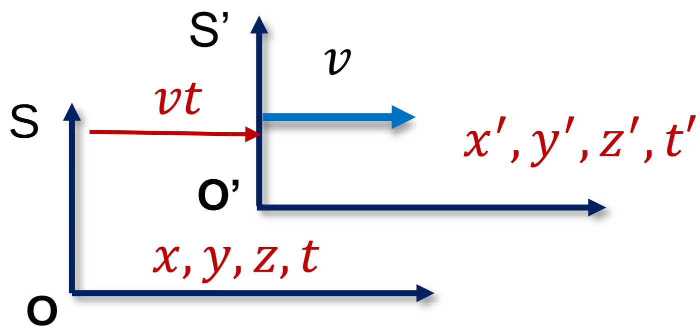
Transformadas de Lorentz

Referencial em repouso

S (x, y, z, t)

Referencial em movimento

S' (x', y', z', t')

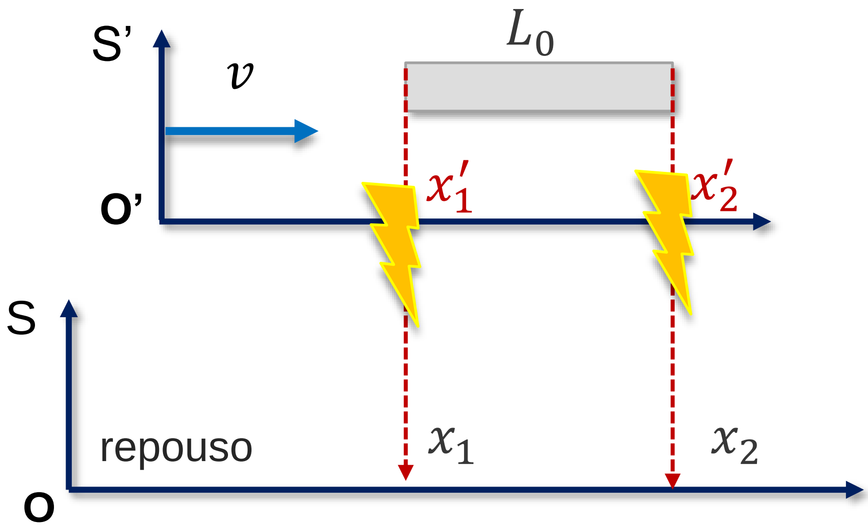


$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$x = \gamma(x' + vt')$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Contração do espaço



Observador em S': para um observador em S' a barra está em repouso e portanto:

$$L' = L_0 = x'_2 - x'_1$$

Comprimento próprio

Observador em S: para um observador em S' a barra está em movimento

$$x'_2 = \gamma(x_2(t_2) - vt_2))$$

$$x'_1 = \gamma(x_1(t_1) - vt_1))$$

$$L' = L_0 = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2(t_2) - x_1(t_1) - v(t_2 - t_1))$$

Medida Simultanea em S ⇨ $t_2 = t_1$

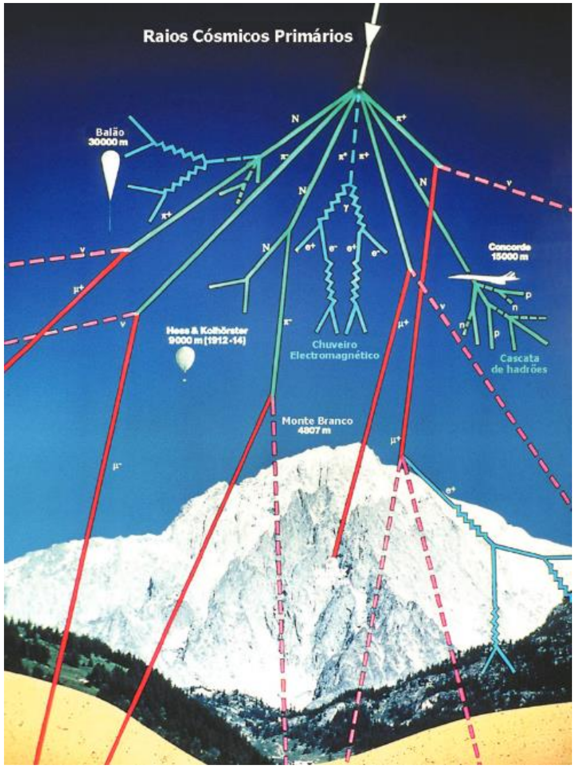
$$L_0 = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2(t_2) - x_1(t_1)) = \gamma L \quad \Rightarrow \quad L = \frac{L_0}{\gamma}$$

Como $\gamma > 1$ ⇨ $L < L_0$ **Contração do espaço ! !**

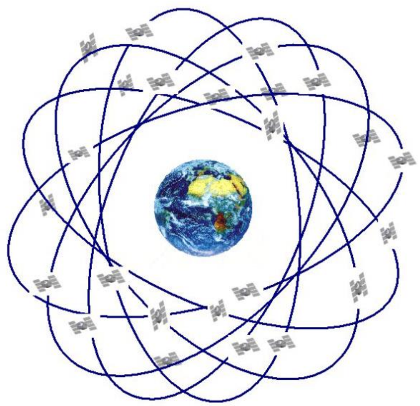
Comprovação da relatividade

Observação dos raios cósmicos

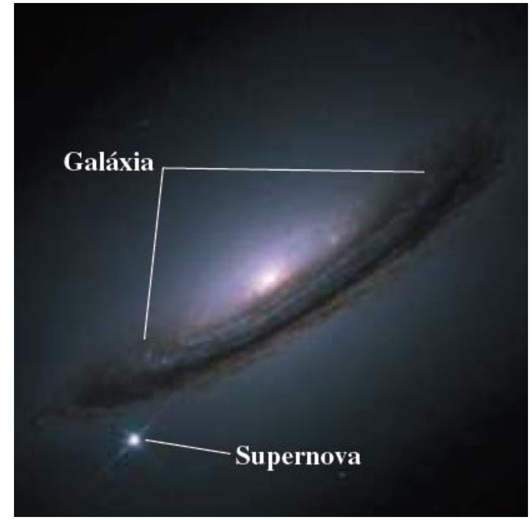
http://www.cbpf.br/~desafios/media/livro/Raios_cosmicos.pdf



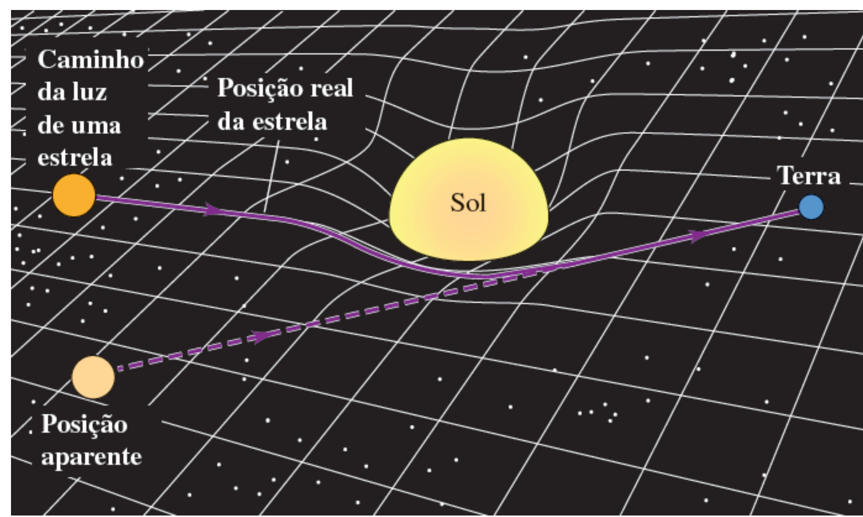
Sistema de posicionamento global (GPS)



Luminosidade de uma supernova tipo Ia (efeito doppler)



Aberração estelar



Aceleradores de partículas

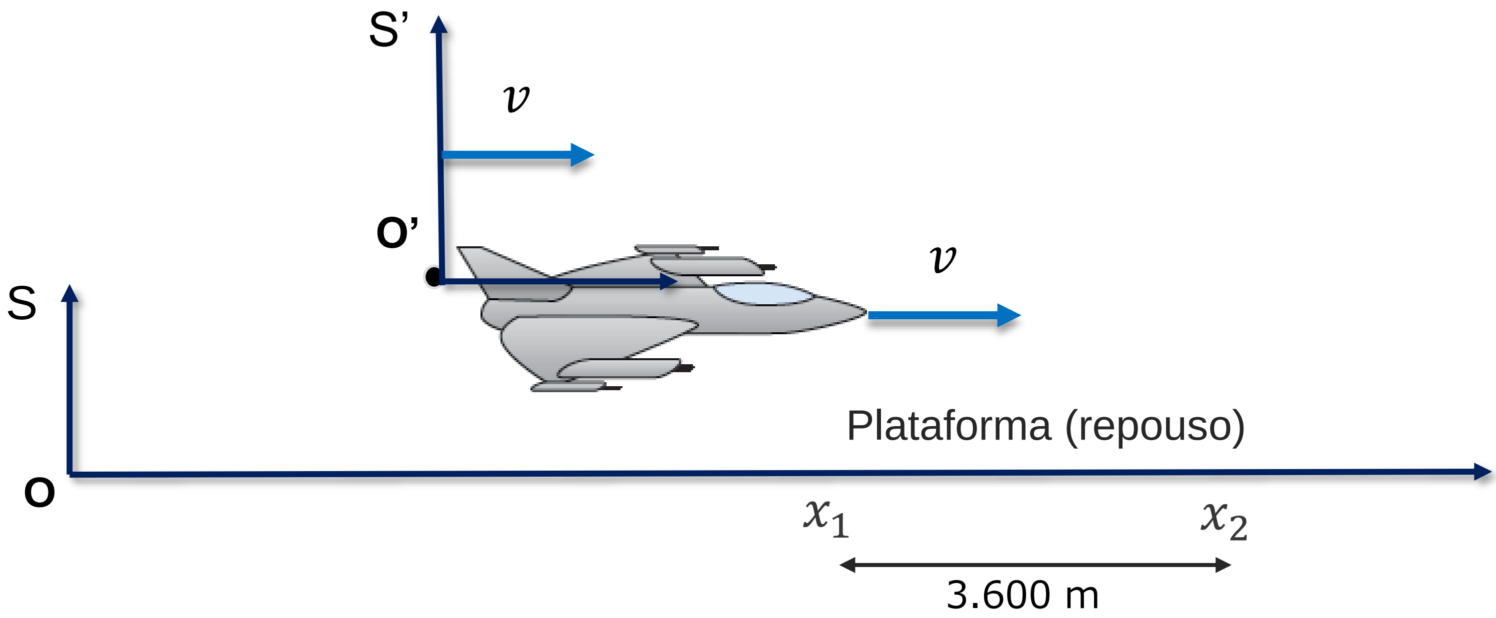
Exercício – espaçonave - plataforma

37.13 Em relação a um observador na Terra, a pista de lançamento de uma espaçonave possui 3.600 m de comprimento.

a) Qual é o comprimento da pista medido pelo piloto de uma espaçonave que se desloca com velocidade igual a 4,0 x10^{7} m/s em relação à Terra?

b) Uma observadora em repouso na Terra mede o intervalo de tempo desde o momento em que a espaçonave está diretamente sobre o início da pista até o instante em que está diretamente sobre o final da pista. Que resultado ela obtém?

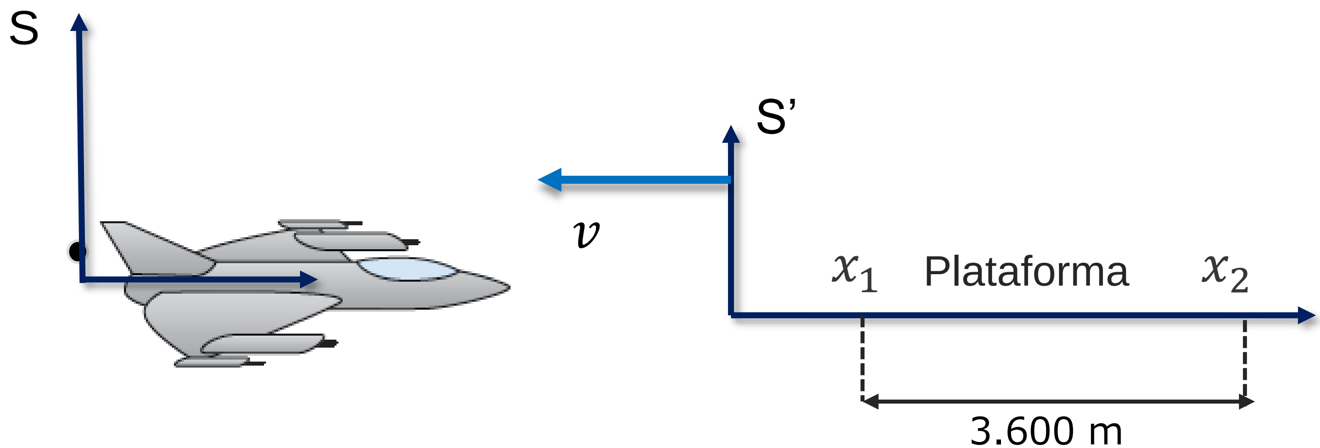
c) O piloto da espaçonave mede o intervalo de tempo desde o momento em que a espaçonave passa diretamente sobre o início da pista até o instante em que ela passa diretamente sobre o final da pista. Que resultado ele obtém?



a) Qual é o comprimento da pista medido pelo piloto de uma espaçonave que se desloca com velocidade igual a 4,0 x10[7] m/s em relação à Terra?

O piloto vai observar a plataforma se aproximando com velocidade v.

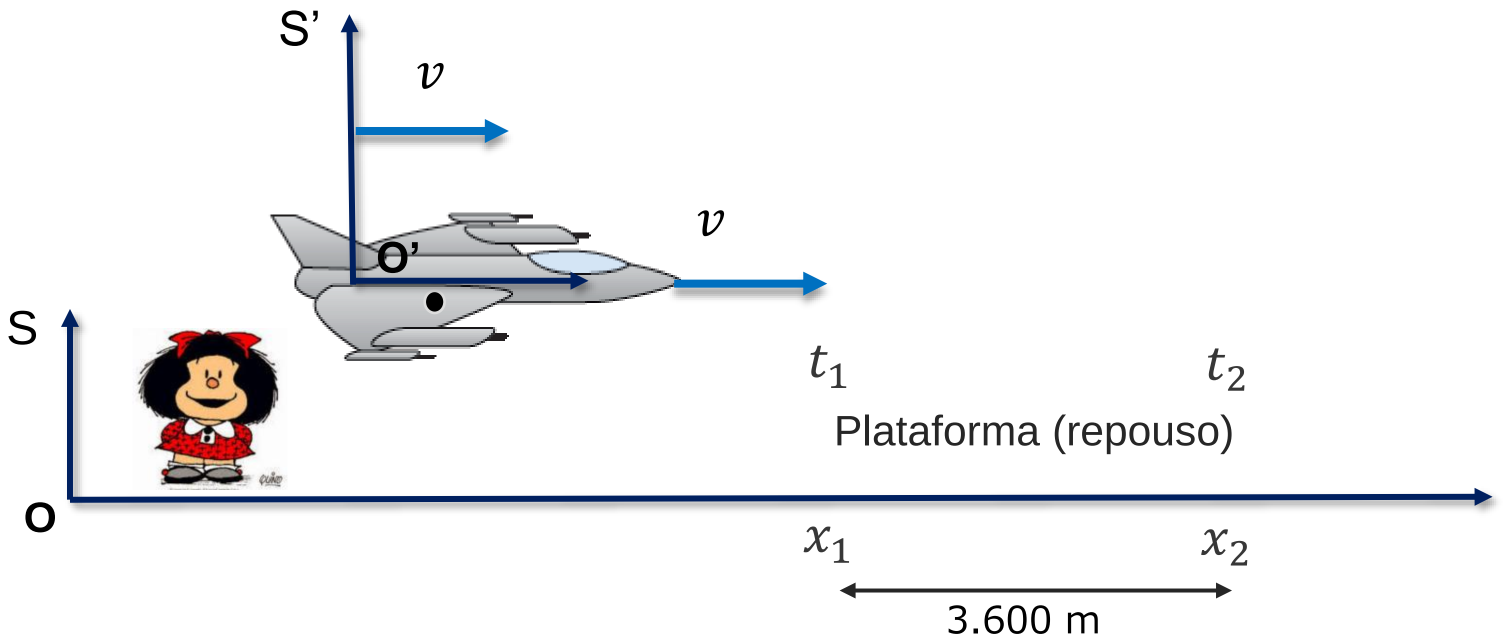
Para o piloto, ele está em repouso e é a plataforma que é o referencial S'



$$L' = L_0 = x_2' - x_1' = 3.600\ m$$ **Comprimento próprio**

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1.009 \qquad L = \frac{L_0}{\gamma} = \frac{3.300}{1.009} = 3.568\ m$$

b) Uma observadora em repouso na Terra mede o intervalo de tempo desde o momento em que a espaçonave está diretamente sobre o início da pista até o instante em que está diretamente sobre o final da pista. Que resultado ela obtém?

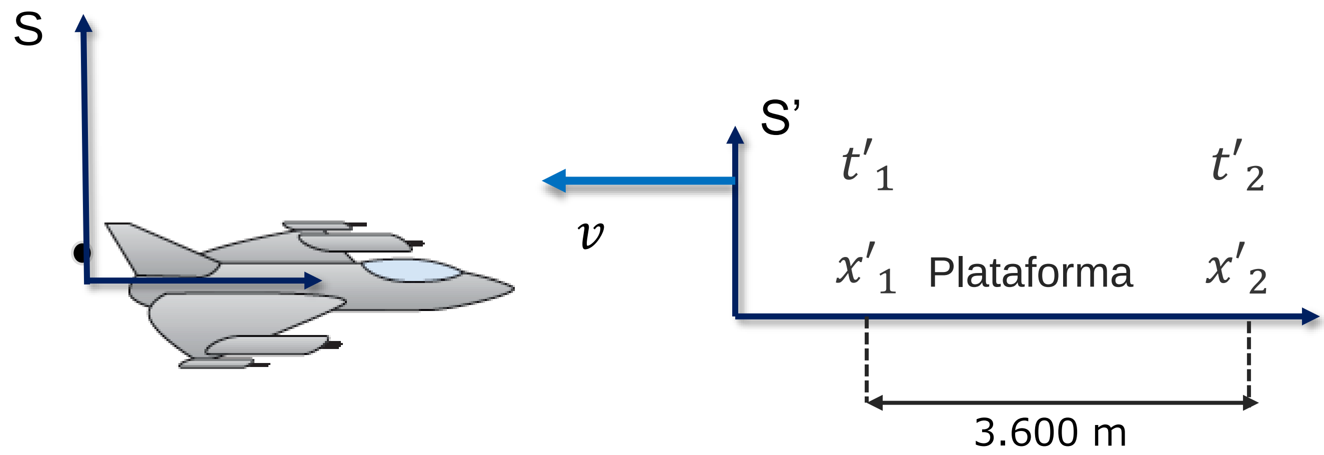


A observadora em S deve determinar t_1 e t_2

Ela deve determinar um intervalo de tempo de eventos que ocorre em seu próprio referencial

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \qquad \Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{3600}{4 \times 10^7} = 9{,}0 \times 10^{-5}\ s$$

c) O piloto da espaçonave mede o intervalo de tempo desde o momento em que a espaçonave passa diretamente sobre o início da pista até o instante em que ela passa diretamente sobre o final da pista. Que resultado ele obtém?



A piloto em S deve determinar t'_1 e t'_2

Ele deve determinar um intervalo de tempo de eventos que ocorre em um referencial em movimento

Pelas transformadas de Lorentz:

$$t'_2 = \gamma\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2\right)$$

$$t'_1 = \gamma\left(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1\right)$$

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma\left(t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)\right)$$

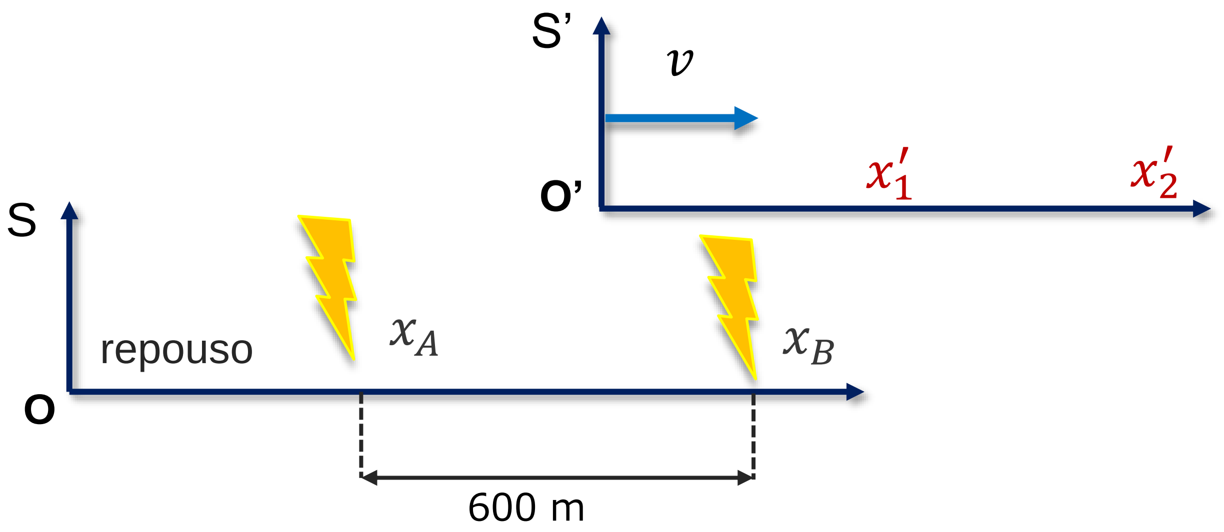
$$= 1.009 \times \left(9{,}0 \times 10^{-5} - \frac{4{,}0 \times 10^7}{(3{,}0 \times 10^8)^2}(3600)\right)$$

$$= 8{,}92 \times 10^{-5} s$$

$$\Delta t' = \frac{L'}{v} = \frac{3568}{4{,}0 \times 10^7} = 8{,}92 \times 10^{-5} s$$

Exercício – eventos causa-efeito

Quando visto de um sistema inercial S, um evento ocorre no ponto x_A sobre o eixo x e 10^{-6} s mais tarde um outro evento ocorre no ponto x_B tal que $x_B - x_A = 600$ m.



a) Existe algum referencial S', movendo-se com velocidade menor que c paralelo ao eixo x, para o qual os dois eventos são simultâneos?

Observado em S

Evento A $\quad x_A = 0 \quad t_A = 0$

Evento B $\quad x_B = 600\ m \quad t_B = 10^{-6}s$

$$\Delta x = 600m$$
$$\Delta t = 10^{-6}s$$

Transformadas de Lorentz

$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

Observado em S'

$$t'_B = \gamma\left(t_B - \frac{v}{c^2}x_B\right)$$

$$t'_A = \gamma\left(t_A - \frac{v}{c^2}x_A\right)$$

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma\left(t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)\right)$$
$$= \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)$$

Para que o evento seja simultâneo em S' => $t'_2 = t'_1$ => $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = 0$

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)$$
$$0 = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)$$

$\Rightarrow$ $$\Delta t = \frac{v}{c^2}\Delta x$$ $\Rightarrow$ $$\frac{v}{c} = c\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$\Delta x = 600m$$
$$\Delta t = 10^{-6}s$$

$\Rightarrow$ $$\frac{v}{c} = c\frac{\Delta t}{\Delta x} = 3 \times 10^8 \times \frac{10^{-6}}{600} = 0{,}5$$

E se: $\Delta x = 100m$ $$\frac{v}{c} = c\frac{\Delta t}{\Delta x} = 3 \times 10^8 \times \frac{10^{-6}}{100} = 3$$

Impossível ! ! !

se: $\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)$

Será que existe um sistema referencial em movimento relativo que inverta a ordem temporal?

$$\Delta t' =< 0$$

Para que isso aconteça: $\frac{v}{c^2}\Delta x > \Delta t$ $\Rightarrow$ $v\Delta x > c^2\Delta t$

Mas a velocidade máxima que podemos ter é: $v = c$ $\Rightarrow$ $\Delta x > c\Delta t$

Se $v = 0{,}5c$

$$v\Delta x > c^2\Delta t$$
$$0{,}5c \times \Delta x > c^2\Delta t$$
$$0{,}5 \times \Delta x > 3 \times 10^8 \times 10^{-6}$$
$$\Delta x > 600m$$

No entanto esses eventos não tem uma relação de causa e efeito

Se houver uma relação de causa e efeito a informação deve viajar de um ponto até o outro com no máximo v=c

$\frac{\Delta x}{\Delta t} \leq c$ $\Rightarrow$ $\Delta x \leq c\Delta t$

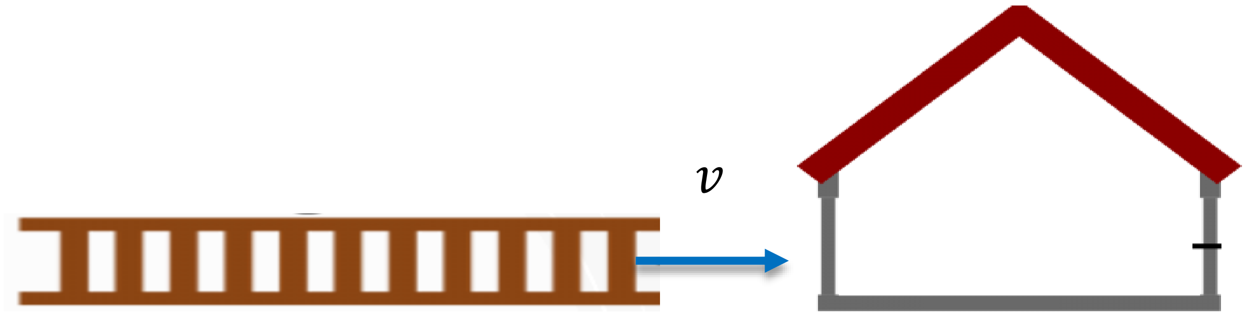
Exercício – decaimento de partículas

Um homem carrega uma escada de comprimento próprio L_{0E}=20 m, passa correndo por baixo de um celeiro de comprimento próprio L_{0C}=11 m. A situação é esquematizada na figura abaixo. A velocidade v do homem em relação ao celeiro é tal que γ=2.

a) Qual a magnitude da velocidade do homem em relação ao telhado?

b) No referencial do celeiro, por quanto tempo a escada fica totalmente debaixo do telhado?

c) No referencial do homem existe algum instante em que a escada fica totalmente debaixo do celeiro?

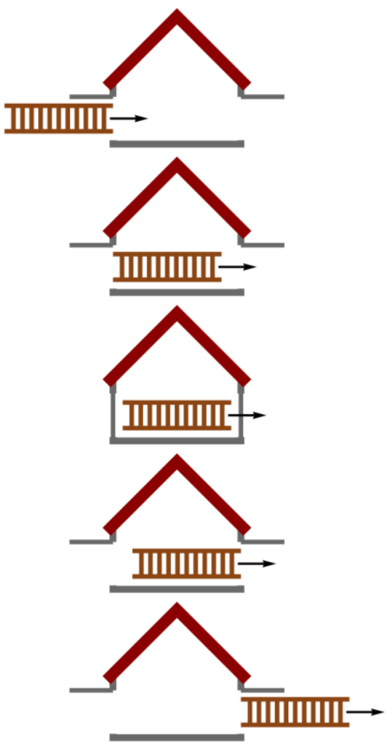


- O paradoxo é estabelecido porque de acordo com a relatividade sempre vemos o objeto em movimento contraído.
- Para o referencial da escada o celeiro estará contraído e a escada não fica em nenhum momento totalmente sob o seu teto.
- Para o referencial do celeiro a escada estará contraída e caberá totalmente debaixo.

a) Qual a magnitude da velocidade do homem em relação ao telhado?

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2.0 \qquad \frac{1}{4} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \qquad v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

b) No referencial do celeiro, por quanto tempo a escada fica totalmente debaixo do telhado?



No **referencial do celeiro** (em repouso) a escada é que se desloca com velocidade v e fica contraída:

$$L_{0E} = \textit{comprimento próprio} \text{ da escada} = 20 \text{ m}$$

$$L_E = \frac{L_{0E}}{\gamma} \qquad L_E = \frac{20}{2} = 10\ m$$

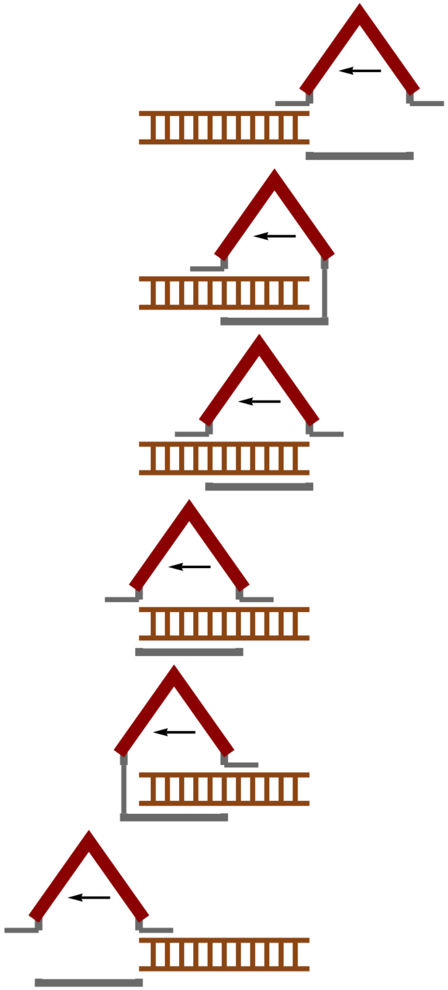
Comprimento da escada observado por alguém no celeiro

Escada cabe no celeiro ! ! !

Como o celeiro tem um comprimento de 11 m o tempo que a barra fica debaixo de seu telhado é:

$$\Delta t = \frac{11 - 10}{v} = \frac{2}{\sqrt{3}c} s$$

Para o **referencial do homem (escada)** a escada está em repouso e é o celeiro que vem em sua direção com velocidade v.

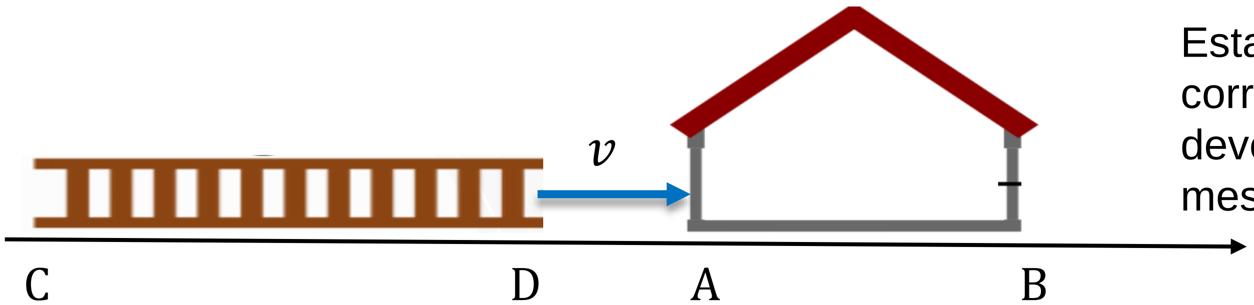


O homem verá o celeiro contraído:

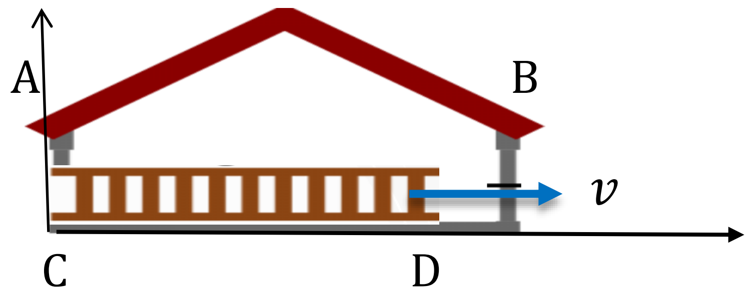
$$L_{0C} = comprimento\ próprio \text{ do celeiro} = 11 \text{ m}$$

$$L_C = \frac{L_{0C}}{\gamma} \qquad L_C = \frac{11}{2} = 5{,}5\ m$$

Portanto de acordo com o homem a **escada não cabe no celeiro**.



Estar debaixo do celeiro corresponde a dizer que C e D devem estar entre A e B ao mesmo tempo.



Seja $t_1 = t'_1 = 0$ o instante em que o extremo C da escada coincide com A

$$x_C = x_A$$

Referencial celeiro (escada contraída): $t_2 = t_1 = 0 \Rightarrow x_D = 10m$

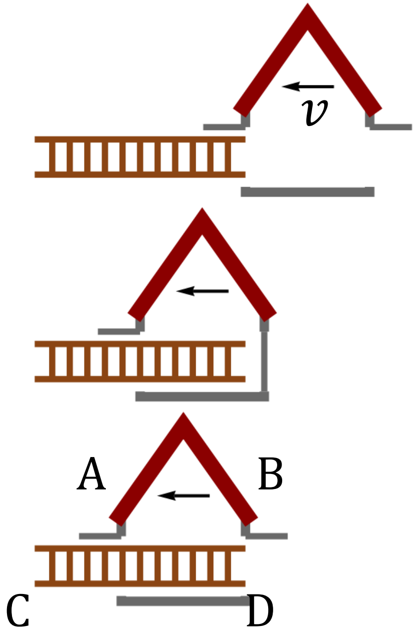
Simultâneo em S

Escada cabe no celeiro

Referencial homem (celeiro contraída): $t'_2 = \gamma\left(t_2 - \frac{v}{c^2} x_D\right)$

$$= 2\left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2} c \frac{1}{c^2} 10\right) = -10\frac{\sqrt{3}}{c}$$

Isso significa que para o homem D chegou em B antes de C chegar em A



Isso significa que para o homem D chegou em B antes de C chegar em A

Para compensar essa diferença de tempo o homem deve fazer a medida simultânea de x_A e x_B ou então adicionar a diferença de não simultaneidade

Homem mediu o comprimento do celeiro $L_C = \frac{11}{2} = 5{,}5\ m$

No entanto essa não foi uma medida simultânea de A e B. Portanto devemos compensar o comprimento do celeiro devido a diferença de tempo.

$$\Delta L = \Delta t' \times v = -10\frac{\sqrt{3}}{c} \times \frac{\sqrt{3}}{2}c = 15m$$

$$telhado\ L_{total} = 5{,}5 + 15 = 20{,}5\ m$$

Escada cabe no celeiro ! ! !

Pion (π-) possui uma vida média de 2,60x10^{-8} s (medida no sistema do píon). Quando o píon se desloca sua vida média é de 4,20x10^{-7} s.

a) Qual a velocidade do píon?
b) Qual a distância que o píon percorre no laboratório durante sua vida média.

$$T_0 = 2,6 \times 10^{-8} s$$

Tempo de decaimento próprio medido quando o píon está em repouso.

$$T = 4,2 \times 10^{-7} s$$

Tempo de decaimento quando o píon está em movimento

Medimos uma dilação do tempo para objetos em movimento

$$T = \gamma T_0$$

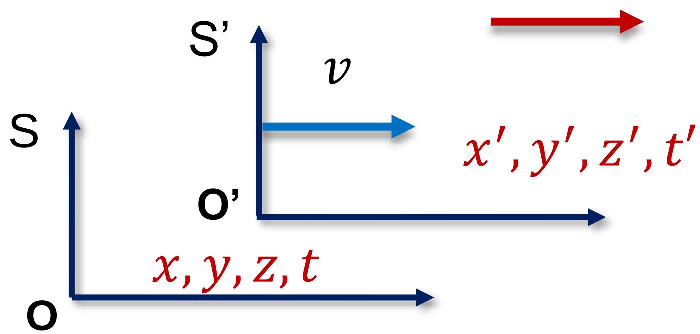
$$\gamma = \frac{T}{T_0} = \frac{4,2 \times 10^{-7}}{2,6 \times 10^{-8}} = 161,5$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0,997$$

$$\Delta L = \Delta t \times v = 4,2 \times 10^{-7} \times 0,997 \times 3,0 \times 10^{-8} = 126\, m$$

Adição de velocidades

Seja $\vec{u}$ a velocidade de um móvel medida em S e $\overrightarrow{u'}$ a velocidade medida em um referencial S’ que e move com velocidade constante em relação a S.



$$\vec{u} = u_x\vec{\imath} + u_y\vec{\jmath} + u_z\vec{k} \qquad u_x = \frac{dx}{dt} \qquad u_y = \frac{dy}{dt} \qquad u_z = \frac{dz}{dt}$$

$$\overrightarrow{u'} = u'_x\vec{\imath} + u'_y\vec{\jmath} + u'_z\vec{k} \qquad u'_x = \frac{dx\prime}{dt\prime} \qquad u'_y = \frac{dy\prime}{dt\prime} \qquad u'_z = \frac{dz\prime}{dt\prime}$$

Usando as transformadas de Lorentz:

$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$x = \gamma(x' + vt')$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d(\gamma(x - vt))}{d(\gamma(t - \frac{v}{c^2}x))} = \frac{\gamma(dx - vdt))}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx))} \times \frac{dt}{dt}$$

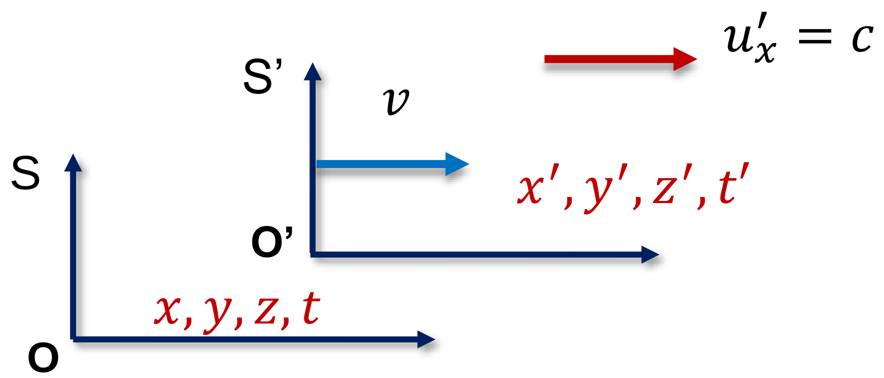
$$u'_x = \frac{u_x - v}{(1 - \frac{v}{c^2}u_x)}$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{(1 - \frac{v}{c^2}u_x)} \qquad u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - \frac{v}{c^2}u_x)} \qquad u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - \frac{v}{c^2}u_x)}$$

$$u_x = \frac{u'_x + v}{(1 + \frac{v}{c^2}u'_x)} \qquad u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + \frac{v}{c^2}u'_x)} \qquad u_z = \frac{u'_z}{\gamma(1 + \frac{v}{c^2}u'_x)}$$

importante

Demonstrar que a velocidade da luz é sempre c não importa o referencial:



$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

a) Se $u'_x = c$ quanto vale u_x

$$u_x = \frac{u'_x + v}{\left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x\right)} = \frac{c + v}{\left(1 + \frac{v}{c^2} c\right)} = \frac{c + v}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)} = c$$

b) Se $u'_x = 0$ $\quad u'_y = c$ $\quad u'_z = 0$ quanto vale u_x

$$u_x = \frac{u'_x + v}{\left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x\right)} = \frac{0 + v}{\left(1 + \frac{v}{c^2} 0\right)} = v$$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x\right)} = \frac{c}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2} 0\right)} = \frac{c}{\gamma}$$

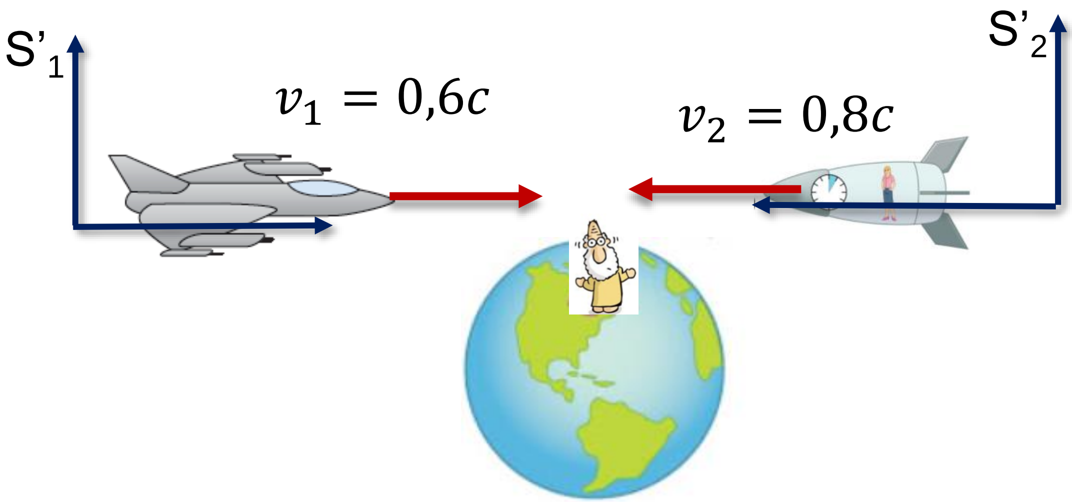
$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x\right)} = 0$$

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = \sqrt{v^2 + \left(\frac{c}{\gamma}\right)^2 + 0}$$

$$= \sqrt{v^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) c^2 + 0}$$

$$= \sqrt{v^2 + c^2 - v^2 + 0} = c$$

Um astronauta na Terra observa duas espaçonaves viajando em direção a ele com sentidos opostos. Uma das espaçonaves S1 se aproxima com velocidade 0,6c enquanto que a outra S2 com velocidade v=0,8c. Com que velocidade um observador em S_2 vê a espaçonave S_1 e aproximando?



S_2 é o referencial S' em movimento com relação a Terra com velocidade

$$v = -v_2 = -0{,}8c$$

Queremos determinar então a velocidade de S_1 visto por S' $\Rightarrow u_1'$

$u_1' \Rightarrow velocidade\ visto\ por\ \ S_2$

$u_1 \Rightarrow velocidade\ visto\ por\ alguem\ na\ Terra$

$$u_1' = \frac{u_1 - v}{(1 - \frac{v}{c^2} u_1)} \Rightarrow u_1' = \frac{v_1 - (-v_2)}{(1 - \frac{-v_2}{c^2} v_1)} = \frac{0{,}6c + 0{,}08c}{(1 + \frac{0{,}6c \times 0{,}8c}{c^2})} = \frac{1{,}4}{1{,}48} c \Rightarrow u_1' = 0{,}95c$$