Física IV

2020

Professor: Valdir Guimarães

E-mail: valdir.guimaraes@usp.br

Aula 11 - Exercícios

Questão 4 P1 2019

Questão 4

Considere dois referenciais inerciais S e S', com origens O e O', respectivamente. O referencial S' move-se com velocidade de $\vec{v} = \frac{4}{5}c\hat{i}$ em relação a S.

(a) (1,5 ponto) Se um foguete é lançado de S com velocidade $\vec{u} = \frac{c}{2}\hat{i} + \frac{2}{5}c\hat{j}$, qual é a velocidade de lançamento $\vec{u}'$ do foguete para um observador em repouso em S'?

(b) (1,0 ponto) Supondo agora que dois pulsos de luz sejam enviados simultaneamente em S dos pontos $x_A = 600$m e $x_B = 800$m na direção de um detector colocado na origem O. Obtenha os intervalos de tempo entre as detecções dos pulsos de luz em O, medidos por observadores nos sistemas S e S'?

Solução da questão 4

(a) As componentes u'_x, u'_y e u'_z das velocidades em S' podem ser calculadas a partir das expressões

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2},$$
$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - v u_x/c^2)},$$
$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - v u_x/c^2)},$$

respectivamente. Como $v = \frac{4}{5}c$, obtemos $\gamma = \frac{5}{3}$. Por outro lado, tendo em vista que $u_x = \frac{c}{2}$, $u_y = \frac{2c}{5}$ e $u_z = 0$, as componentes u'_x, u'_y e u'_z em S$'$ são obtidas, por substituição, de forma que $\vec{u}' = -\frac{c}{2}\hat{\imath} + \frac{2}{5}c\hat{\jmath}$.

(b) Sejam A e B os eventos correspondentes a detecção dos pulsos de luz na origem. Para um observador em S, o intervalo de tempo $\Delta t = t_B - t_A$ é dado por $\Delta t = (x_B - x_A)/c = \frac{2}{3}.10^{-6}$s. Para um observador em S', podemos relacionar Δt e $\Delta t'$ por meio das transformações de Lorentz, de forma que $\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)$. Como os eventos são detectados em $\Delta x = 0$, temos $\Delta t' = \gamma \Delta t = \frac{10^{-5}}{9}$s.

Questão 3 P1 2017

Questão 3

Uma espaçonave parte da Terra no instante $t = 0$ e mantém sua jornada em linha reta com velocidade escalar v em direção a uma estação espacial que se localiza a uma distância D da Terra segundo observadores na Terra. Considere v próxima à velocidade da luz e despreze efeitos de aceleração da espaçonave.

(a) (1,0 ponto) Calcule o tempo necessário para a espaçonave atingir a estação segundo seu comandante.

(b) (1,5 ponto) No instante em que atinge a estação, a espaçonave emite um sinal luminoso na direção da Terra e continua sua viagem em linha reta. Segundo o comandante, qual é o intervalo de tempo entre a emissão e a chegada deste sinal à Terra e quanto a espaçonave se afastou da estação espacial neste mesmo intervalo de tempo?

Solução da questão 3

(a) Para o comandante da nave a partida da Terra e a chegada à estação espacial são dois eventos que ocorrem no mesmo ponto. O intervalo de tempo entre eles é o tempo próprio ΔT_0 que se relaciona com o intervalo $\Delta T_{Terra} = D/v$ medido na Terra através de

$$\Delta T_{Terra} = \frac{\Delta T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Longrightarrow \boxed{\Delta T_0 = \frac{D\sqrt{1 - v^2/c^2}}{v}}$$

Outra forma: o comandante vê uma distância menor (contração do espaço) dada por $D' = D/\gamma$

$\Delta T_0 = D'/v = D/v\gamma =$

(b) Para o comandante, o sinal de luz vai percorrer a distância contraída $D' = D\sqrt{1 - v^2/c^2}$ mais o quanto a Terra se afastou até o sinal chegar até ela. Assim,

$$\Delta t' = \frac{D\sqrt{1 - v^2/c^2} + v\Delta t'}{c} \Longrightarrow \boxed{\Delta t' = \frac{D}{c}\sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}},$$

ou usando transformações de Lorentz

$$\left.\begin{array}{ll} \underline{\text{emissão luz em S}}: & (x_E, t_E) = (D, D/v), \\ \underline{\text{chegada da luz em S}}: & (x_C, t_C) = (0, D/v + D/c). \end{array}\right\} \Longrightarrow (\Delta x, \Delta t) = (-D, D/c),$$

Portanto,

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(\frac{D}{c} + \frac{vD}{c^2}\right) \Longrightarrow \boxed{\Delta t' = \frac{D}{c}\sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}}.$$

No intervalo de tempo $\Delta t'$, segundo o comandante, a nave estará a uma distância

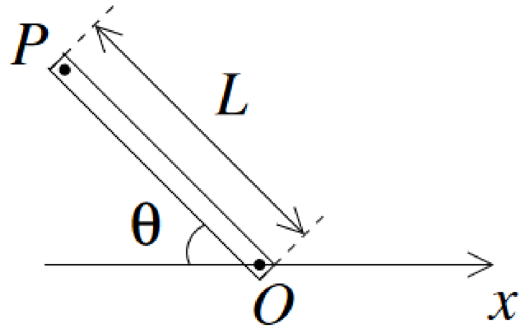
$$\boxed{d' = v\Delta t' = \frac{Dv}{c}\sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}}$$

da estação espacial.

Questão 4 P1 2017

Questão 4

Uma barra de comprimento próprio L, orientada segundo um ângulo θ em relação ao eixo x está em repouso em um sistema inercial S, conforme a figura. Considere um sistema S' que se move com velocidade constante $\vec{v} = u\,\hat{\imath}$ em relação a S. Nos itens abaixo expresse suas respostas em termos de L, u, V, θ e da velocidade da luz c.



(a) (1,0 ponto) Qual é o comprimento L' da barra no sistema S'?

(b) (1,0 ponto) Qual é o ângulo de orientação θ' da barra no sistema S'?

(c) (0,5 ponto) Suponha agora que uma partícula relativística se move ao longo da barra com velocidade V, medida em S, no sentido de P para O. Quais são as componentes do vetor velocidade desta partícula para um observador em S'?

Solução da questão 4

(a) No sistema S' o comprimento da barra é $L' = \sqrt{L_x'^2 + L_y'^2}$, onde L_x' e L_y' são as projeções de L' sobre eixos x' e y', respectivamente.

$$L_y' = L_y = L \operatorname{sen}\theta; \quad L_x' = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\, L\cos\theta$$

$$\Longrightarrow L' = \sqrt{L_y'^2 + L_x'^2} = \boxed{L\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}\cos^2\theta}}.$$

(b) O ângulo θ' é obtido de

$$\tan\theta' = \frac{L_y'}{L_x'} = \frac{L \operatorname{sen}\theta}{L\cos\theta\sqrt{1 - u^2/c^2}} \Longrightarrow \boxed{\theta' = \arctan\left(\frac{\tan\theta}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\right)}.$$

(c) A velocidade da partícula em S é

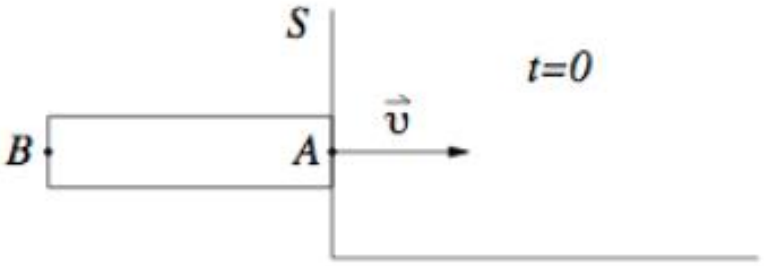
$$\vec{V} = V\cos\theta\,\hat{\imath} - V\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\jmath}.$$

Usando as fórmulas de transformação de velocidades obtemos

$$V_x{}' = \frac{V_x - u}{1 - uV_x/c^2} = \boxed{\frac{V\cos\theta - u}{1 - uV\cos\theta/c^2}},$$

$$V_y{}' = \frac{V_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - uV_x/c^2} = \boxed{\frac{-V\,\mathrm{sen}\,\theta\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - uV\cos\theta/c^2}}.$$

Uma barra de comprimento próprio ℓ_0 move-se com velocidade constante $\vec{v} = v\hat{\imath}$ relativamente ao sistema S conforme a figura. A extremidade A da barra passa pela origem de S no instante $t = 0$. Neste instante é emitido de A um sinal de luz que viaja de A para B.



(a) Em que instante t'_B medido num referencial em repouso em relação à barra o sinal chega a B?

(b) Em que instante t_B medido no referencial S o sinal chega a B?

a) Solução:

- A e B são extremidades da barra
- No ref. S' (barra em repouso), o sinal percorre a distância l_0 com vel. c. Logo,

E_B: luz chega em B ocorre no instante

$$t'_B = \frac{l_0}{c}$$

$$\rightarrow \quad ct_B = \gamma\left(ct'_B + \beta x'_B\right)$$

$$\rightarrow \quad t_B = \gamma\left(t'_B + \frac{v}{c^2}x'_B\right)$$

A posição de E_B em S' é

$$x'_B = -l_0$$

$$\rightarrow \quad t_B = \gamma\left(\frac{l_0}{c} - \frac{v}{c^2}l_0\right)$$

$$= \frac{\gamma l_0}{c}\left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

$$= \frac{l_0}{c}\left(\frac{c-v}{c+v}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Um feixe luminoso de 100 W incide sobre um corpo negro de massa m=2,0 g durante um intervalo de tempo de $\Delta t = 1{,}0\times10^{4}$ s. O corpo negro se encontra inicialmente em repouso numa região sem gravidade e sem atrito.

a) Determine a energia absorvida pelo corpo negro

b) Determine o momento infringido (absorvido) no corpo negro.

c) Calcule a energia cinética do corpo negro no final do processo.

d) Explique a diferença, se houver, entre as energias computadas nos itens anteriores.

Dado: $P_{Laser} = 100\text{W}$, $m = 2,0\text{g}$ e $\Delta t = 10000\text{s}$.

a) Energia absorvida:

$$\Delta U = P_{Laser}\Delta t = 1 \times 10^6\text{J} = 1\text{MJ};$$

Momento linear:

$$\Delta p = \Delta U/c = \frac{1}{300}\text{J} \cdot \text{s/m};$$

] b) Energia cinética:

$$T = \frac{(\Delta p)^2}{2m} = \frac{1}{360}\text{J};$$

ΔU e T são diferentes porque parte da energia é absorvida na forma de calor.

Questão 1 P2 2019

Questão 1

Uma partícula com energia cinética de 200 MeV e massa de repouso m_0=300 MeV/c^2 colide inelasticamente com outra partícula de mesma massa em repouso, resultando em uma única partícula após a colisão.

(a) (1,0 ponto) Encontre a razão entre a velocidade inicial da partícula incidente e a velocidade da luz.

(b) (1,0 ponto) Encontre a razão entre a velocidade da partícula resultante e a velocidade da luz.

(c) (0,5 ponto) Encontre a razão entre massa de repouso da partícula resultante M_0 e m_0.

(a) A energia cinética K de uma partícula relativística é dada pela expressão $K = (\gamma - 1)m_0c^2$, de forma que sua velocidade é dada por

$$v^2 = c^2\left(1 - \frac{1}{(K/m_0c^2+1)^2}\right)$$

Substituindo os valores K=200MeV e m_0 =300MeV/c^2, encontramos $\boxed{v/c = 4/5}$.

(b) A velocidade v_f e massa de repouso finais M_0 da partícula podem ser obtidas por meio das relações de conservação da energia e momento relativístico:

$$\gamma m_0c^2 + m_0c^2 = \gamma' M_0c^2 \tag{1}$$

e

$$\gamma m_0 v = \gamma' M_0 v_f,$$

onde $\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_f^2}{c^2}}}$. Tomando a razão entre as equações acima, obtemos que $v_f = \frac{\gamma}{\gamma+1}v$. Uma vez que $\gamma = 5/3$, encontramos $\boxed{v_f/c = 1/2}$.

(c) Uma vez que $v_f = c/2$, encontramos $\gamma' = 2/\sqrt{3}$. Utilizando a equação (1), temos que $M_0/m_0 = (\gamma+1)/\gamma'$. Obtemos então que $\boxed{M_0/m_0 = 4/\sqrt{3}}$.

Questão 3 P2 2016

Questão 3

(I) Um farol A emite luz vermelha de frequência $f_1 = 4 \times 10^{14}$ Hz. Outro farol B, em repouso em relação ao farol A, emite luz verde de frequência $f_2 = 6 \times 10^{14}$ Hz. Um observador que se move ao longo da linha que une os farois A e B, com velocidade v em relação a eles, vê as luzes emitidas por A e B com a mesma cor.

(a) (0,5 ponto) Em que sentido se move o observador? De A para B, ou de B para A? Justifique.

(b) (1,0 ponto) Calcule a velocidade do observador em relação à velocidade da luz.

(II) (1,0 ponto) A emitância espectral $I(\lambda, T)$ de uma estrela atinge o máximo num comprimento de onda igual a 600 nm. Calcule a temperatura da estrela. Se ela tem raio $R = 10^9$ m calcule a potência total emitida pela estrela. Suponha que a estrela emite radiação como um corpo negro.

(I) Efeito Doppler

(a) A mudança na frequência da luz dos faróis é devida ao efeito Doppler. Para as frequências das luzes dos farois se tornarem iguais a frequência do farol A deve aumentar e a do farol B diminuir, portanto o observador deve se aproximar de A e se afastar de B. Assim, o sentido do movimento é de B para A.

(b) Denotando f a frequência da luz observada, temos

$$f = f_1\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = f_2\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \implies \frac{f_1}{f_2} = \frac{1-\beta}{1+\beta}$$

onde $\beta = v/c$. Portanto,

$$\frac{2}{3} = \frac{1-\beta}{1+\beta} \implies \beta = \frac{1}{5} \implies \boxed{v = \frac{1}{5}c}.$$

(II) Potência emitida pela estrela

A lei de deslocamento de Wien permite relacionar $\lambda_{\text{máx}}$ com a temperatura T.

$$\lambda_{\text{máx}}T = 3 \times 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K} \Longrightarrow T = \frac{3 \times 10^{-3}}{6 \times 10^{-7}} = \boxed{5 \times 10^{3}\ \text{K}}.$$

A potência emitida pela estrela é

$$P = 4\pi R^2 I,$$

onde a intensidade total I é dada pela lei de Stefan-Boltzmann

$$I = \sigma T^4.$$

Portanto,

$$P = 4\pi R^2 \sigma T^4 = 4\pi (10^9)^2 (6 \times 10^{-8})(5 \times 10^3)^4 = \boxed{15\pi \times 10^{25}\ \text{W}}.$$