Física IV

2020

Professor: Valdir Guimarães

E-mail: valdir.guimaraes@usp.br

Aula-6: Transformadas de Lorentz

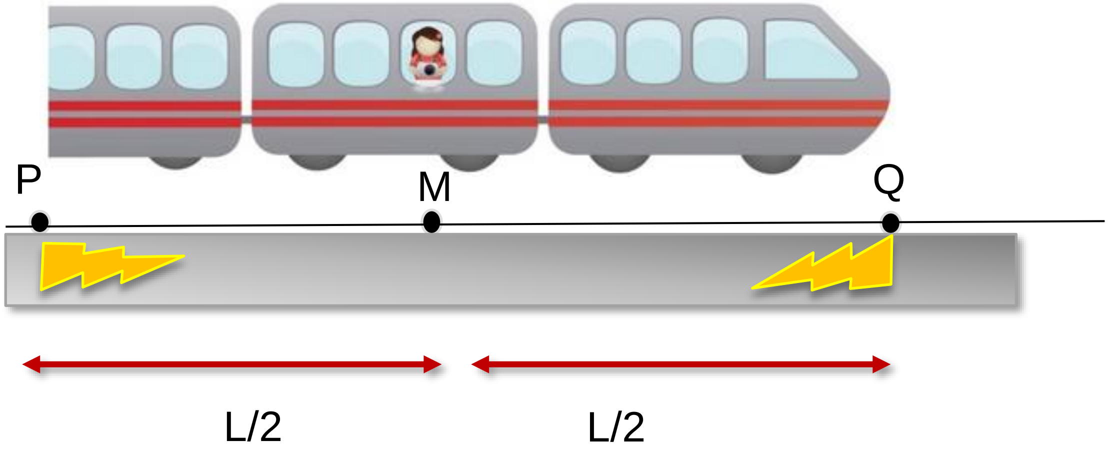
Simultaneidade

Eventos simultâneos são eventos que ocorrem ao mesmo tempo:

- ❑ **Trem chega na estação.**
- ❑ **Relógio marca 10:10 hs.**
- ❑ **Homem espirra.**

Esses eventos podem ou não ter relação de causa-efeito mas isso veremos mais adiante.

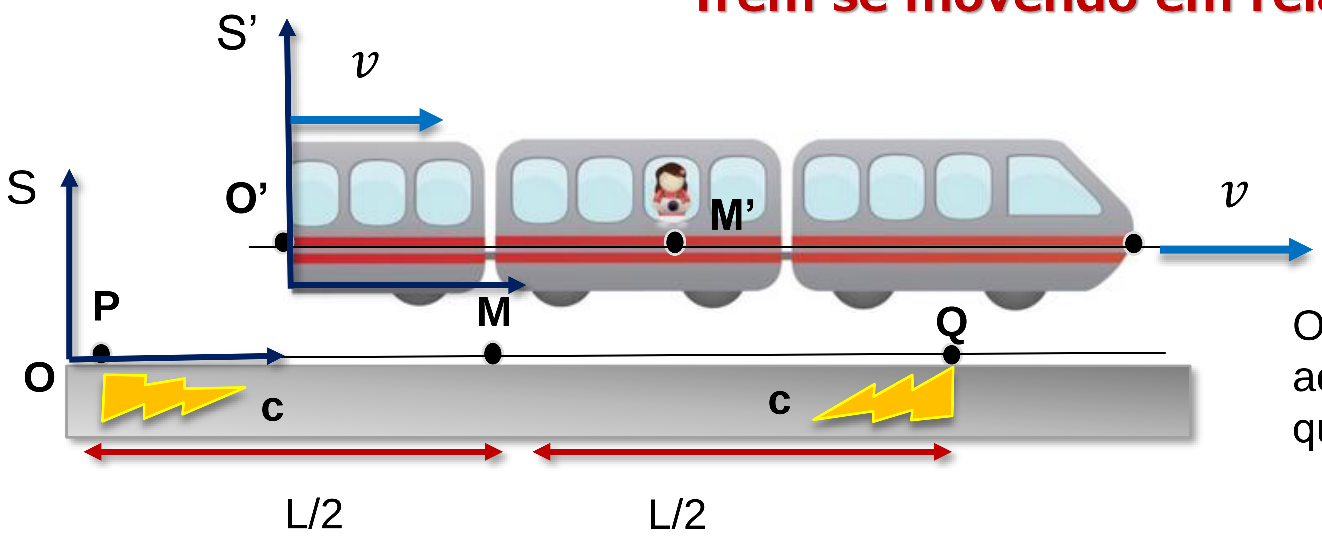
Trem parado na estação



Se os eventos em P e Q saem ao mesmo tempo de P e Q e chegam ao mesmo tempo em M. Os eventos são simultâneos.

$$t_P^M = t_Q^M$$

Trem se movendo em relação a plataforma



Os sinais em P e Q saem ao mesmo tempo quando O=O'

$t_P^{M'}$ Tempo para o sinal sair de P e chegar em M'

$t_Q^{M'}$ Tempo para o sinal sair de Q e chegar em M'

$$t_P^{M'} = \frac{L}{2}\frac{1}{(c-v)}$$

$$t_Q^{M'} = \frac{L}{2}\frac{1}{(c+v)}$$

$$t_P^{M'} - t_Q^{M'} = \frac{L}{2}\left(\frac{1}{(c-v)} + \frac{1}{(c+v)}\right) = L\frac{v}{c^2}\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$$

Para alguém no referencial S' o evento P ocorre depois do evento Q por um intervalo de tempo

$$\Delta t' = t_P^{M'} - t_Q^{M'}$$

Um evento que é simultâneo em um referencial não é simultâneo em outro referencial em movimento relativo

Para $v \ll c$ $$\Delta t' = t_P^{M\prime} - t_Q^{M\prime} = L\frac{v}{c^2}\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} \approx 0$$

Mas o que acontece com o espaço e tempo para referenciais relativos ?

Galileo
(mecânica clássica)

Intervalos de tempo e espaço são absolutos e a velocidade da luz é relativa

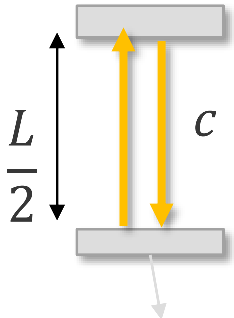
Einstein
(relatividade restrita)

Velocidade da luz c é absoluta

Tempo e espaço são relativos e dependem do referencial

Dilatação do tempo

Considere um relógio que funciona a base de pulsos de luz.



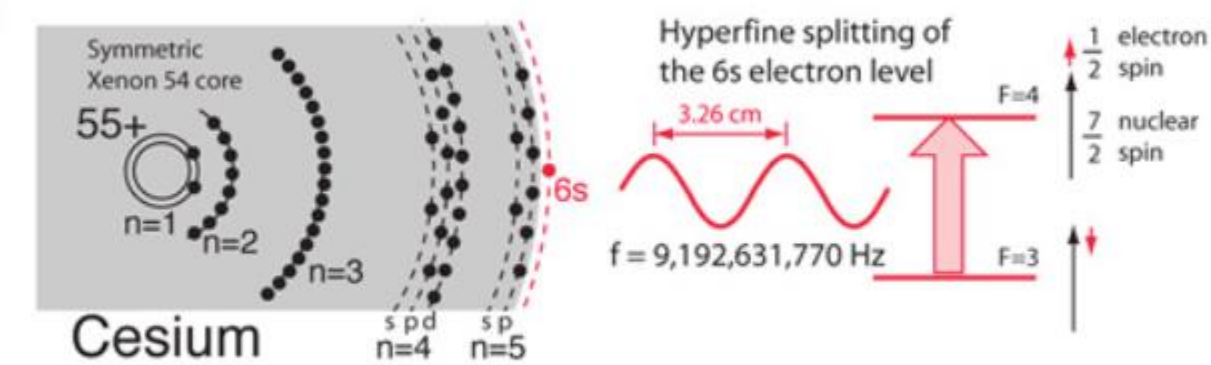
Célula fotoelétrica

Intervalo de tempo entre a saída e chegada:

$$\Delta t_0 = \frac{L}{c}$$

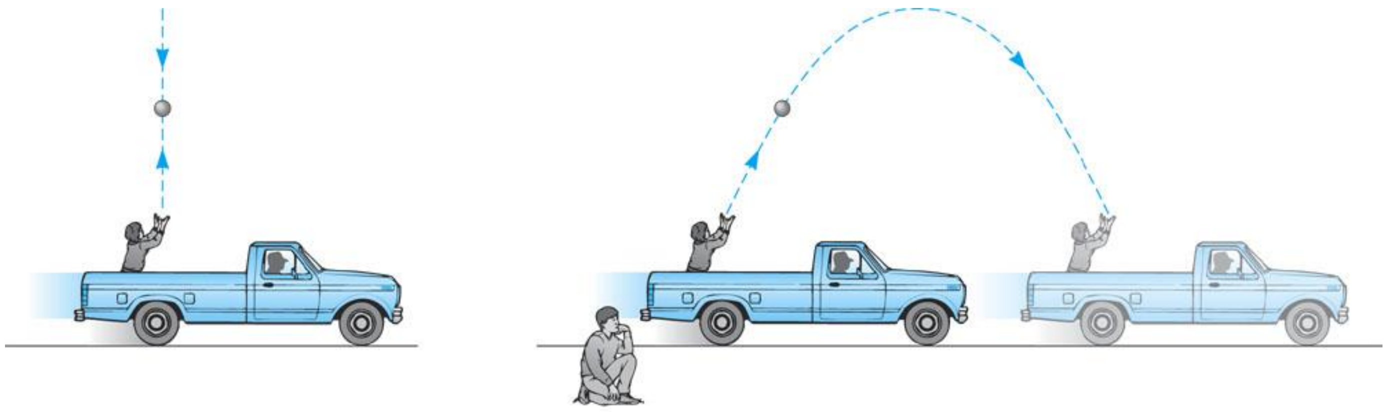
Intervalo de tempo medido com o relógio em repouso é chamado **tempo próprio.**

Relógio atômico é dado pela transição entre um estado atomico e outro do 133Cs.



1 segundo = 9,192, 631,770 ciclos da transição de estados do Cs-133

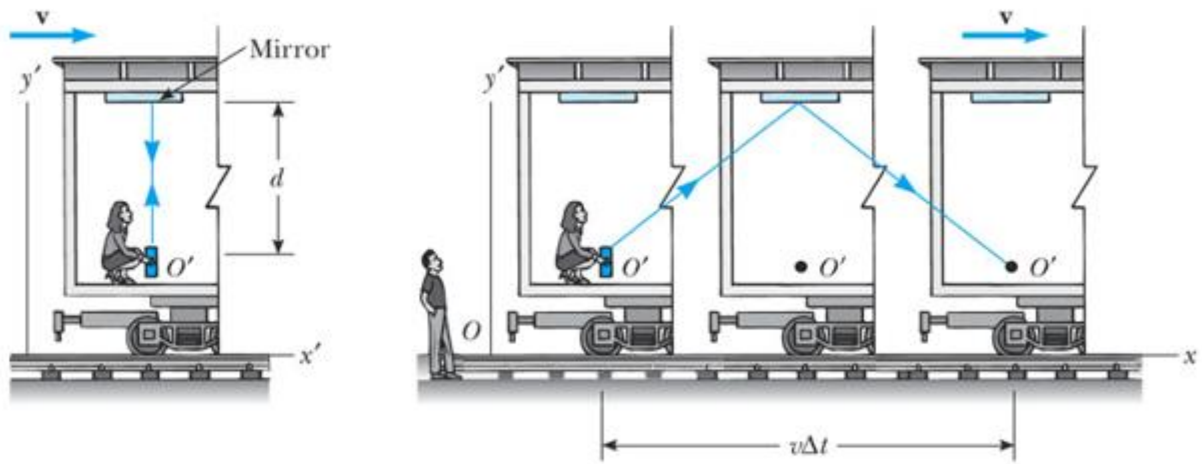
Dilatação do tempo



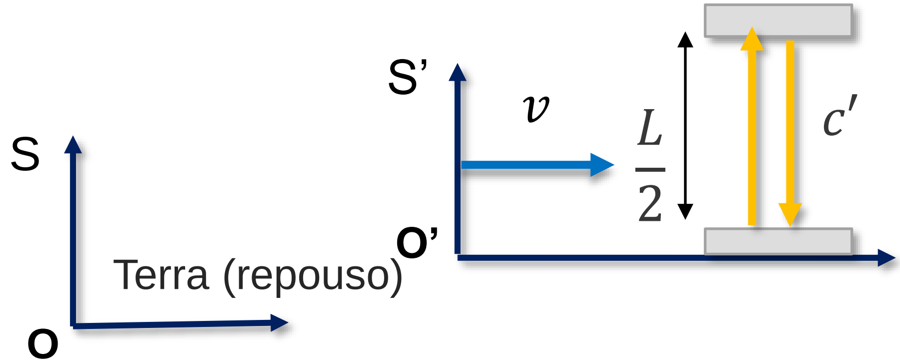
(a) (b)

Observador em S'

Observador em S



Pela Mecânica Clássica

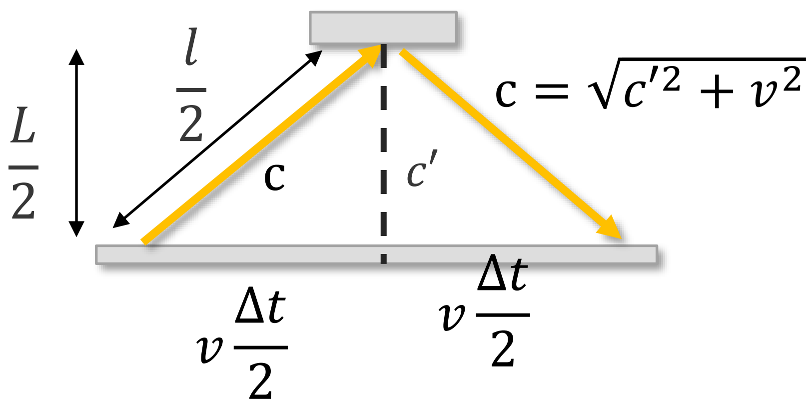


c' é a velocidade da luz observada pelo observador em S'

$$\Delta t_0 = \frac{L}{c'}$$

Observador em S' para um observador em S' o relógio está parado e portanto: $\Delta t' = \Delta t_0 = \frac{L}{c'}$

Observador em S



Distância percorrida pela luz observada por S => l

Intervalo de tempo observado por S => $\Delta t = \frac{l}{c}$

$$\Delta t = \frac{l}{\sqrt{c'^2 + v^2}}$$

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2$$

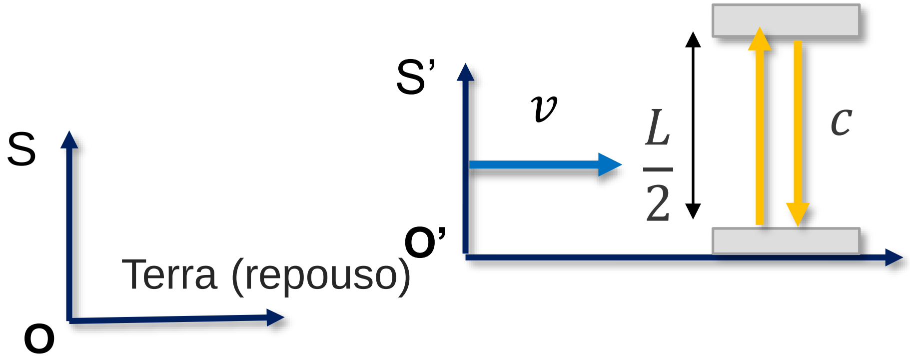
$$l^2 = L^2 + (v\Delta t)^2$$

$$\Delta t^2(c'^2 + v^2) = l^2$$

$$\Delta t^2 c'^2 + \Delta t^2 v^2) = L^2 + (v\Delta t)^2 \Rightarrow \Delta t = \frac{L}{c'}$$

Mesmo intervalo de tempo que observado em S'

Pela relatividade



c é a velocidade da luz observada em qualquer referencial

$$\Delta t' = \frac{L}{c}$$

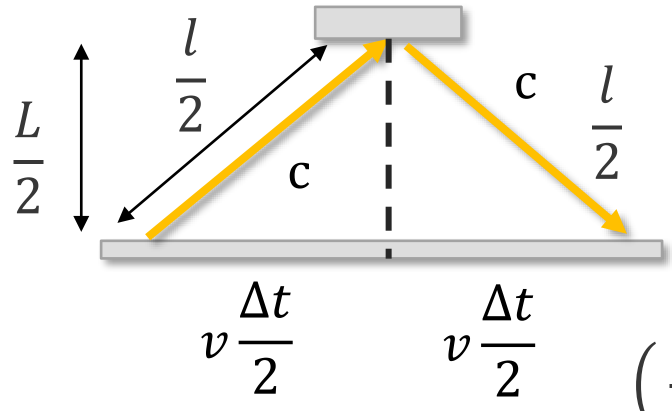
Observador em S' para um observador em S' o relógio está parado e portanto o tempo próprio é dado por:

$$\Delta t' = \Delta t_0 = \frac{L}{c}$$

Pela relatividade

Observador em S’ $\Delta' t = \Delta t_0 = \frac{L}{c}$

Observador em S



Distância percorrida pela luz observada por S => l

Intervalo de tempo observado por S => $\Delta t = \frac{l}{c}$

$$\Delta t = \frac{l}{c} \Rightarrow (c\Delta t)^2 = l^2$$

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 \Rightarrow l^2 = L^2 + (v\Delta t)^2$$

$$(c\Delta t)^2 = L^2 + (v\Delta t)^2$$

$$\Delta t^2\,(c^2 - v^2) = L^2$$

$$\Delta t = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 1} \Rightarrow \Delta t > \Delta t'$$

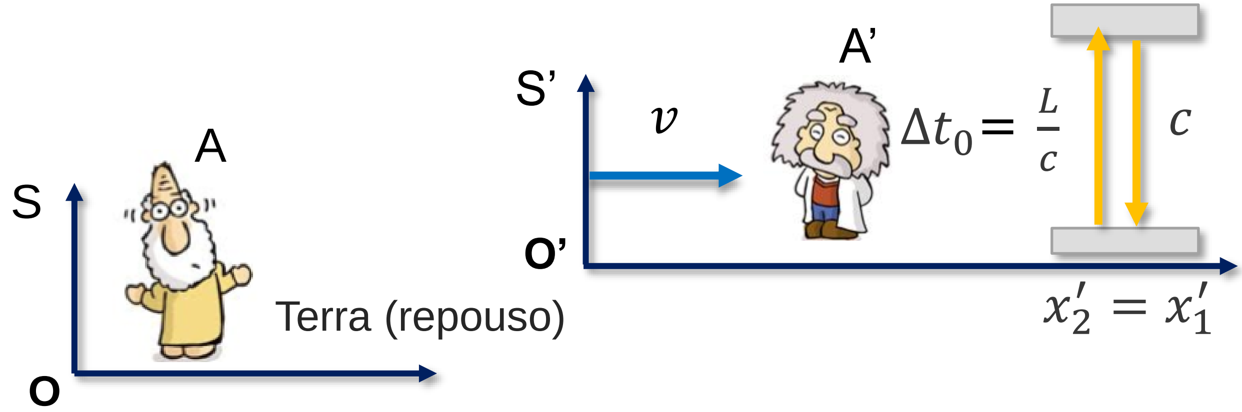
$$\Delta t > \Delta t_0$$

$$\Delta t = \frac{L}{c}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Houve uma dilatação do tempo.

Período de oscilação do relógio visto por S é maior do que visto em S’

Dilatação do tempo



Relógio está em repouso e mede o tempo próprio.

$$\Delta t_0 = t_2' - t_1'$$

A' faz observação em seu próprio referencial S'.

Para A' o relógio está parado em relação a ele.

$$x_2' = x_1'$$

A faz observação do evento que ocorre em S' (em movimento)

A conclui que o intervalo de tempo desse evento foi:

$$\Delta t = \frac{L}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Fator de Lorentz

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > 1$$

$$\Delta t = \Delta t_0 \gamma$$

$$\Delta t > \Delta t_0$$

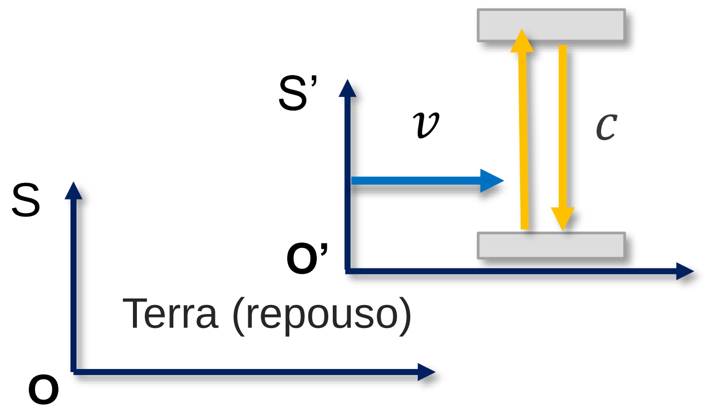
Houve uma dilatação do tempo.

O ponto é que A observou eventos em um sistema em movimento $x_2 \neq x_1$

Um relógio funciona durante um ano em um referencial em repouso fixo na Terra. Um outro relógio se move com uma velocidade v em relação a Terra. Qual a diferença em segundos que esse relógio varia em relação ao relógio fixo na Terra.

$$c = 3 \times 10^8\ s$$

$$v = 3 \times 10^6\ s$$



Visto de S' $\Delta t_0 =$ 1 ano $= 1 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 = 31.536.000\ s$

Tempo próprio

Visto de S se passa $\Delta t = \Delta t_0 \gamma = 31.536.000 \times 1.00005 = 31.537.577$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1.00005$$

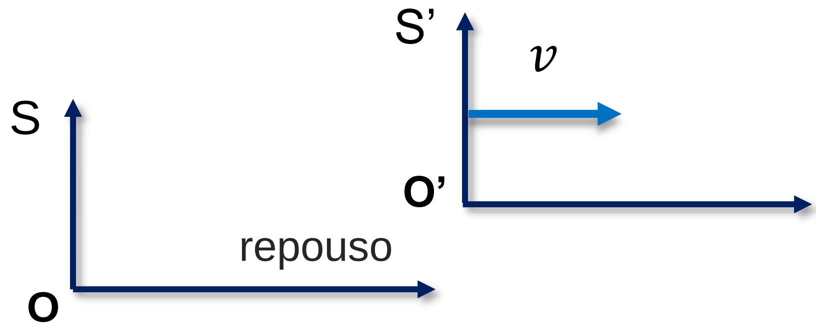
$$\Delta t - \Delta t_0$$

$$\Delta t - \Delta t_0 = \Delta t_0 \gamma - \Delta t_0 = \Delta t_0(\gamma - 1) = 31.536.000 \times 0.00005 = 1577\ s$$

Transformadas de Lorentz

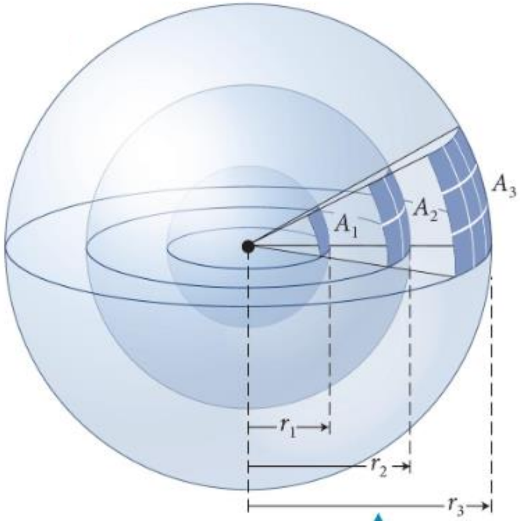
Devemos então obter um conjunto de equações que possa relacionar o tempo e o espaço em um referencial em repouso e outro em movimento.

Referencial em repouso	Referencial em movimento
S	S’
(x, y, z, t)	(x', y', z', t')



- Tempo é homogêneo e Espaço é isotrópico
- Como consequência as equações de transformações devem ser lineares.
- Para $v = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x' \quad y = y' \quad z = z'$
- A luz deve se propagar com velocidade c em ambos referenciais

- Sinal luminoso se propaga como uma onda esférica



$$c = \frac{\Delta r}{\Delta t} \qquad c = \frac{r}{t} \qquad \mathrm{r} = ct$$

$$r^2 = c^2t^2$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2$$

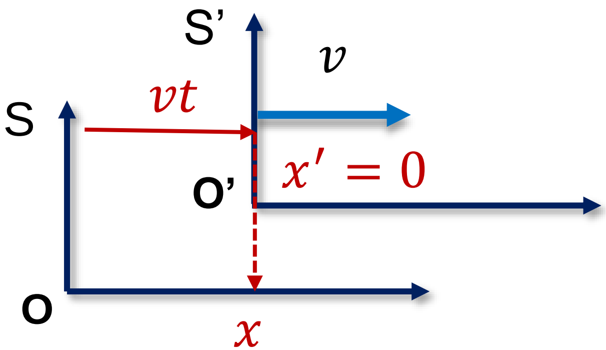
- **Ideia do quadri-vetores (quarta dimensão)**

Referencial em repouso ⟺ Referencial em movimento

S (x, y, z, t) ⟺ S' (x', y', z', t')

- Equações lineares entre tempo e espaço

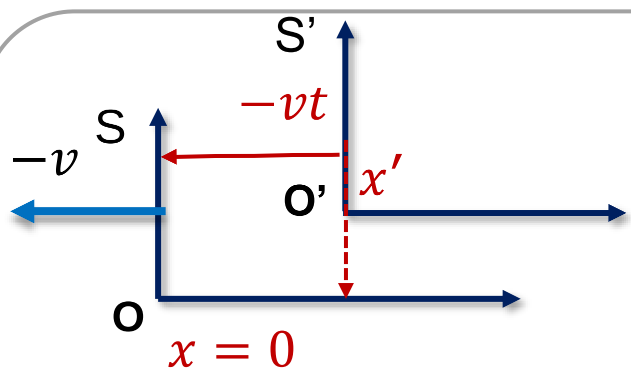
$$x' = \gamma\, x + bt$$
$$t' = Ax + Bt$$



Observador em S

para $x' = 0$ ⇨ $x = vt$

$$\begin{aligned} x' &= \gamma\, x + bt \\ 0 &= \gamma\, vt + bt \end{aligned} \Rightarrow \boldsymbol{b = -\gamma v} \Rightarrow x' = \gamma(x - vt)$$



Observador em S'

para $x = 0$ ⇨ $x' = -vt'$

$$\begin{aligned} x' &= \gamma\, x + bt \\ -vt' &= 0 - \gamma vt \end{aligned} \Rightarrow t' = \gamma t$$

$$\begin{aligned} t' &= Ax + Bt \\ t' &= 0 + Bt \end{aligned} \Rightarrow t' = Bt$$

⇨ $\boldsymbol{B = \gamma}$

Referencial em repouso ⟺ Referencial em movimento

S (x, y, z, t) S' (x', y', z', t')

- Equações lineares entre tempo e espaço

$$x' = \gamma\, x + bt$$
$$t' = Ax + Bt$$

$$\boldsymbol{b = -\gamma v}$$

$$\boldsymbol{B = \gamma}$$

$$x' = \gamma\, x - \gamma v t = \gamma(x - vt)$$

$$t' = Ax + \gamma t$$

$$x = ct$$
$$x' = ct'$$

$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$ct' = \gamma(ct - vt) = \gamma t(c - v) \qquad \text{(I)}$$

$$t' = Ax + \gamma t$$
$$t' = Act + \gamma t = (Ac + \gamma)t$$
$$ct' = (Ac^2 + \gamma c)t \qquad \text{(II)}$$

Combinando (I) e (II): $\gamma t(c - v) = (Ac^2 + \gamma c)t$ ⇒ $\boldsymbol{A = -\dfrac{v\gamma}{c^2}}$

Referencial em repouso

S (x, y, z, t)

Referencial em movimento

S' (x', y', z', t')

- Equações lineares entre tempo e espaço

$$x' = \gamma\, x + bt$$
$$t' = Ax + Bt$$

$$\boldsymbol{b = -\gamma v}$$

$$\boldsymbol{B = \gamma}$$

$$\boldsymbol{A = -\frac{v\gamma}{c^2}}$$

$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x)$$

$$x = \gamma(x' + vt')$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x')$$

$$x' = \gamma(x - vt) = \gamma x - \gamma vt = \gamma\,\gamma(x' + vt') - \gamma vt$$
$$= \gamma^2 x' + \gamma^2 vt' - \gamma vt$$
$$= \gamma^2 x' + \gamma^2 vt' - \gamma v(\gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right))$$
$$= \gamma^2 x' + \gamma^2 vt' - \gamma^2 vt' - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}x'$$
$$= \gamma^2 x' - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}x'$$
$$= \gamma^2 x'(1 - \frac{v^2}{c^2})$$

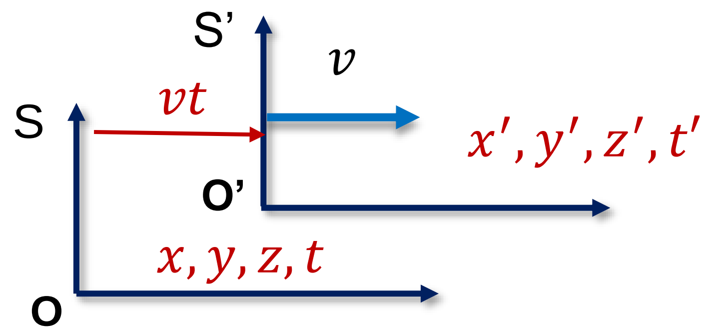
$$\boldsymbol{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

Referencial em repouso

S (x, y, z, t)

Referencial em movimento

S' (x', y', z', t')



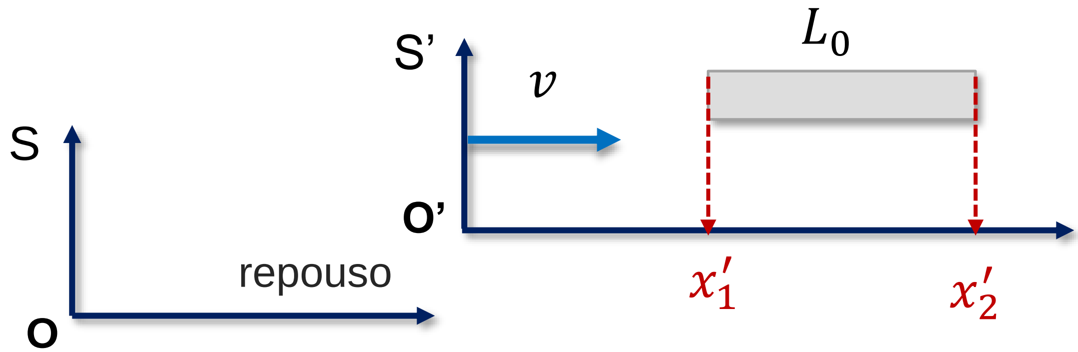
Transformadas de Lorentz

$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$x = \gamma(x' + vt')$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

$$\boldsymbol{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

Contração do espaço



Observador em S' para um observador em S' a barra está em repouso e portanto:

$$L' = L_0 = x'_2 - x'_1$$ **Comprimento próprio**

Para medirmos o comprimento de algo que está parado, determinamos as extremidades ao mesmo tempo $t'_2 = t'_1$

Tanto a barra quanto o referencial S' se movem com velocidade v

Observador em S Para medir o comprimento da barra em S precisamos medir as extremidades da barra simultaneamente em S.

$$L = x_2(t_2) - x_1(t_1)$$

Simultaneo em S corresponde: $t_2 = t_1$

O que é simultâneo em um referencial não é simultâneo em outro referencial em movimento.

Transformadas de Lorentz

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$x = \gamma(x' + vt')$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

$$x_2' = \gamma(x_2 - vt_2) \qquad x_2' = \gamma(x_2(t_2) - vt_2))$$

$$x_1' = \gamma(x_1 - vt_1) \qquad x_1' = \gamma(x_1(t_1) - vt_1))$$

$$L' = L_0 = x_2' - x_1' = \gamma(x_2(t_2) - x_1(t_1) - v(t_2 - t_1))$$

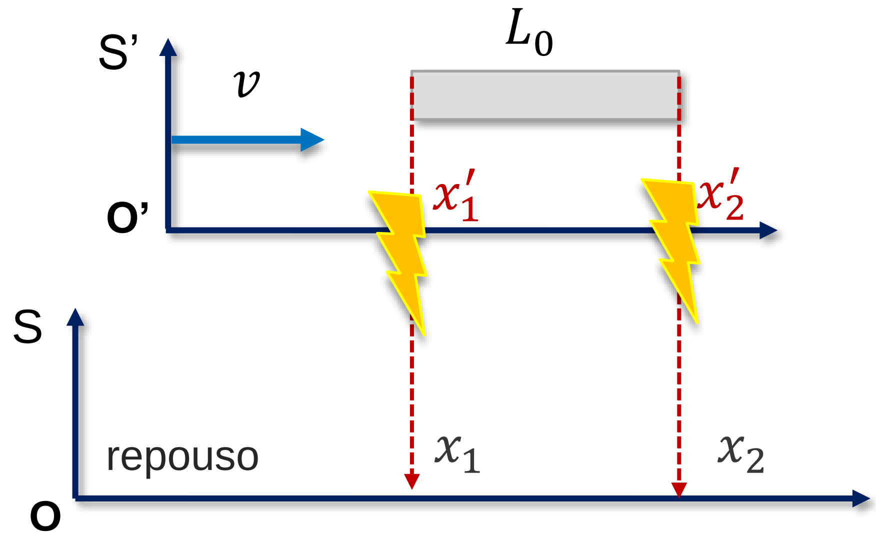
Medida Simultanea em S $\Rightarrow$ $t_2 = t_1$

$$L_0 = x_2' - x_1' = \gamma(x_2(t_2) - x_1(t_1)) = \gamma L \Rightarrow L = \frac{L_0}{\gamma}$$

Como $\gamma > 1$ $\Rightarrow$ $L < L_0$ **Contração do espaço ! !**

Problema de simultaneidade, o que é simultâneo em um referencial não é em outro

O fenômeno é simétrico: A barra observada em movimento é sempre menor que a barra em repouso



Facho de luz sendo emitido simultaneamente em S' $\quad t_2' = t_1'$

Vamos medir esses fachos de luz em S em x_1 e x_2

Usando as transformadas de Lorentz

$$x_2 = \gamma(x_2'(t_2') + vt_2')$$

$$x_1 = \gamma(x_1'(t_1') + vt_1')$$

$$x_2 - x_1 = \gamma(x_2'(t_2') - x_1'(t_1') + v(\cancel{t_2' - t_1'}))$$

Simultaneo em S'

$$L = \gamma L_0$$

Diferente do que foi obtido anteriormente

Devido a diferença de tempo da chegada dos sinais em S

Os fachos de luz foram emitidos simultaneamente em S'.

O observador em S observa que os fachos de luz não chegaram simultâneos em S.

A diferença de tempo pode ser obtida pelas transformadas e Lorentz para o tempo.

Transformadas de Lorentz

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x)$$

$$x = \gamma(x' + vt')$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x')$$

$$t_2 = \gamma(t_2' + \frac{v}{c^2}x_2')$$

$$t_1 = \gamma(t_1' + \frac{v}{c^2}x_1')$$

$$t_2 - t_1 = \gamma(\cancel{t_2' - t_1'} + \frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')$$

Simultaneo em S'

diferença de tempo devido a não simultaneidade

$$\Delta t = \gamma \frac{v}{c^2} L_0$$

Se subtraírmos o comprimento a mais que foi medido devido a não simultaneidade podemos obter a comprimento da barra obtido anteriormente.

Medida Simultânea em S ⇨ $t_2 = t_1$ ⇨ $L = \frac{L_0}{\gamma}$ **Contração do espaço ! !**

Emissão simultânea em S’ mas medida não simultânea em S

A barra andou a mais um comprimento $v\Delta t$ devido a essa medida não simultânea

$$
\begin{aligned}
x_2 - x_1 &= L - v\Delta t \\
&= \gamma L_0 - v\gamma \frac{v}{c^2} L_0 \\
&= \gamma L_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} L_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\
&= L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\
&= \frac{L_0}{\gamma}
\end{aligned}
$$

⇨ $L = \frac{L_0}{\gamma}$