Física IV

2º Semestre de 2017

Instituto de Física - Universidade de São Paulo

Professor: Valdir Guimarães
E-mail: valdirg@if.usp.br

Aula -3: Rede de Difração e difração de raio-X

Rede de Difração

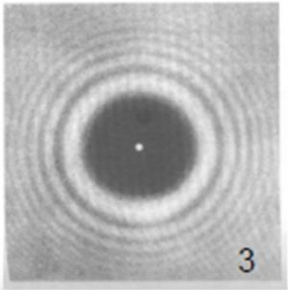
Grande número de fendas (ranhuras)

Augustin Fresnel (1788-1827)

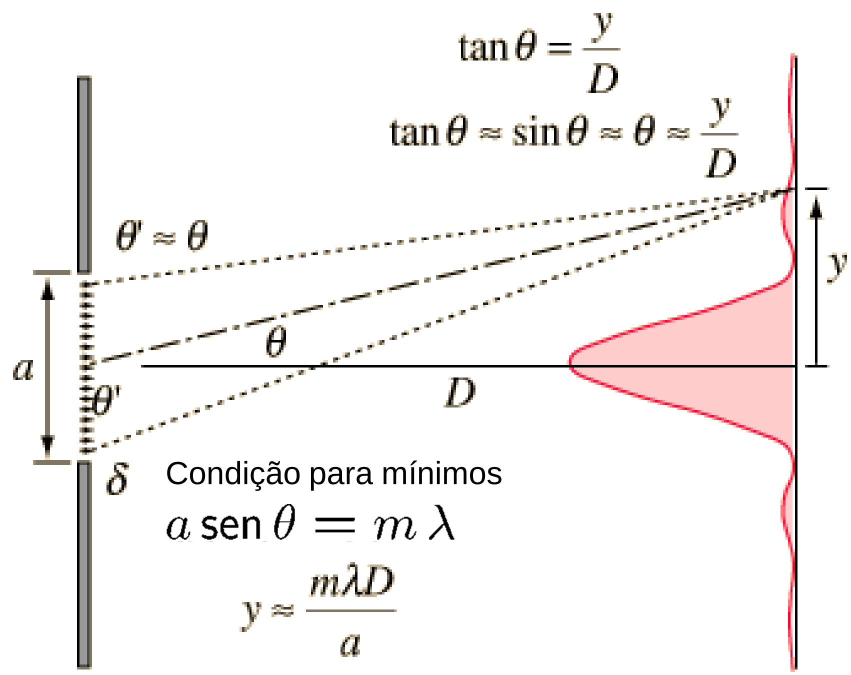
- Dez anos mais novo que T. Young, A. Fresnel foi um engenheiro civil francês que se interessou por estudos de ótica.
- Ele não participava do círculo acadêmico de Paris e não conhecia o trabalho de Young.
- <u>Fresnel estudou o efeito da passagem de luz por uma fenda.</u>

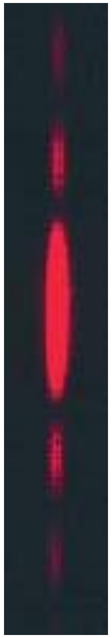
• Em 1819 a Academia Francesa ofereceu um prêmio ao melhor trabalho experimental sobre difração, que apresentasse um modelo teórico explicando o efeito. Fresnel apresentou um trabalho de 135 páginas (modelo de ondas). O júri era composto por S.-D. Poisson, J. B. Biot, e P. S. Laplace, todos Newtonianos que apoiavam a teoria corpuscular da luz. Poisson calculou, usando a teoria de Fresnel, algo que parecia inconsistente.

Feito o experimento, Fresnel estava correto!!!

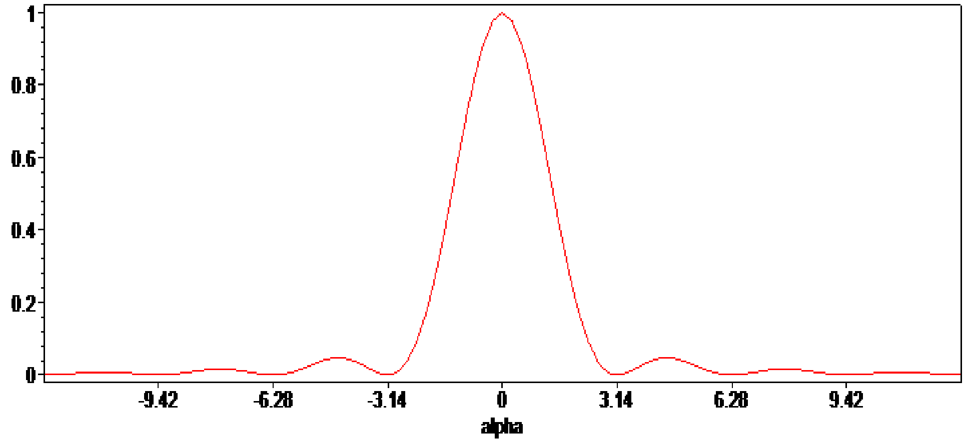


Uma fenda de abertura finita $a \geq \lambda$





difração



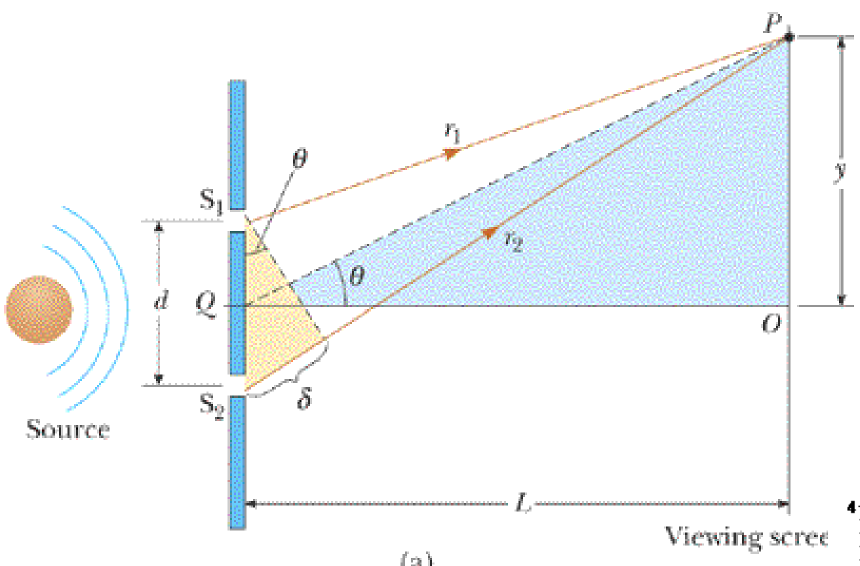
$$\boxed{I(\theta) = I_m\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta}$$

Duas fendas de abertura desprezível $a << \lambda$

Interferência construtiva $\delta = d sen\theta_{brilhante} = m\lambda$

Interferência destrutiva $\delta = d sen\theta_{escuro} = (m + \frac{1}{2})\lambda$



$$\boxed{\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta}$$

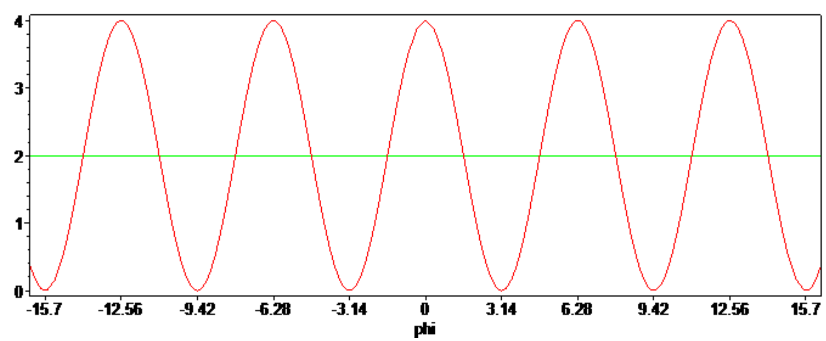
$$\boxed{I_p = 4I_0 \cos^2\frac{\phi}{2}}$$

interferência

Diferença de caminho

$$\delta = r_2 - r_1$$

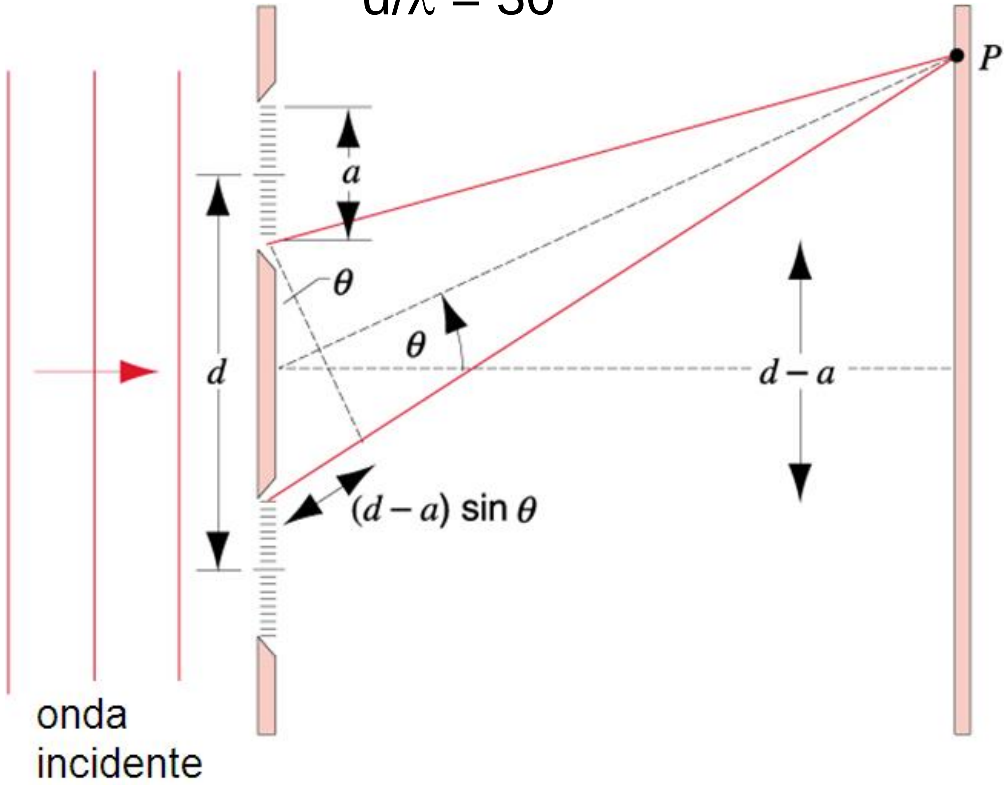
Harcourt, Inc. items and derived i



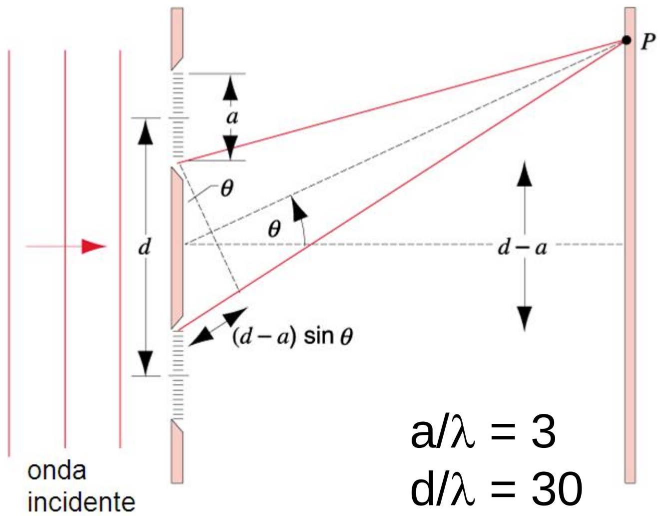
O que acontece com duas fendas de tamanho finito $a \geq \lambda$?

Quando a fenda tem abertura finita $\cancel{a \leq \lambda}$ elas se comportam como fontes puntiformes e na tela se forma a figura de interferência de Young

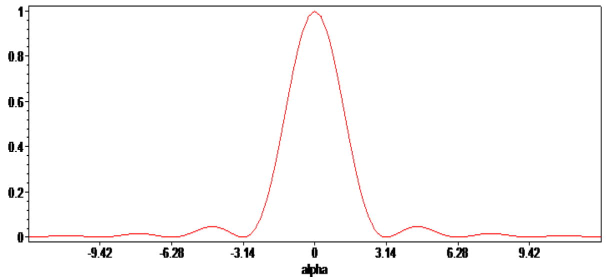
$a/\lambda = 3$
$d/\lambda = 30$



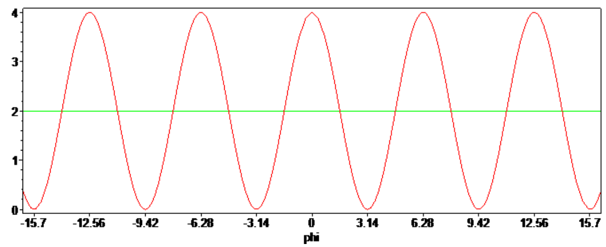
Duas fendas de tamanho finito $a \geq \lambda$



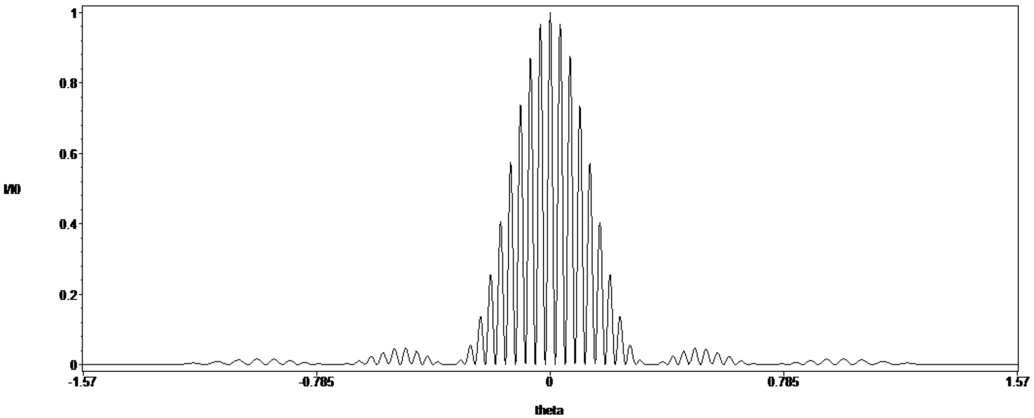
difração



interferência



Convolução dos dois padrões



$$I(\theta) = I_m (\cos\beta)^2 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$$

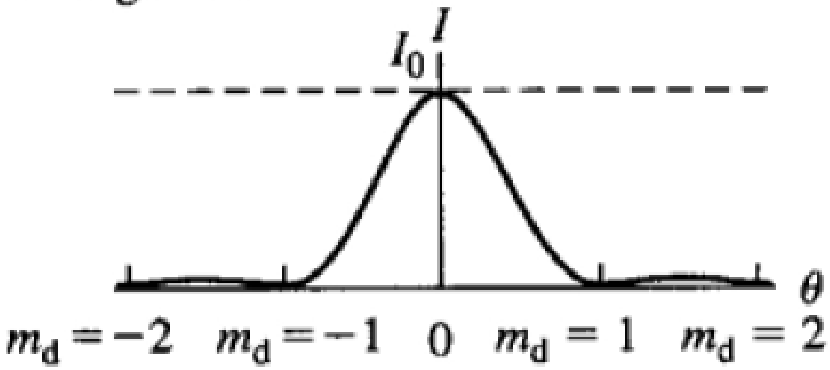
$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta \qquad \alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$$

Difração primeiro mínimo m=1

$$a sen\theta_m = m\lambda$$

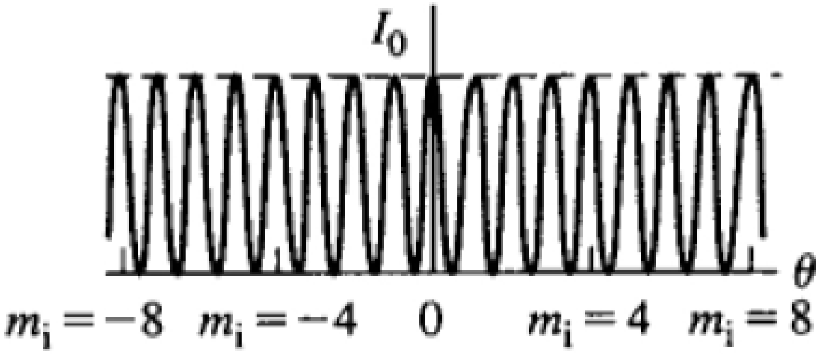
$$a sen\theta_1 = \lambda$$

(a) Figura de difração para uma fenda única de largura a.

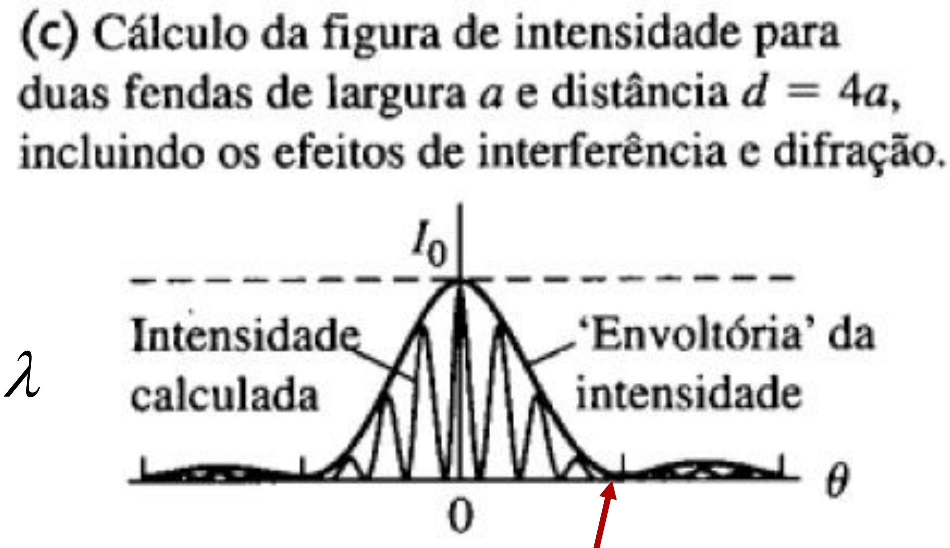


Interferência construtiva

(b) Figura de interferência para duas fendas estreitas separadas por uma distância d igual a quatro vezes a largura da fenda indicada em (a).



$$\delta = d sen\theta_{brilhante} = m\lambda$$



Máximo da interferência que coincide com o primeiro mínimo da difração

$$\frac{d sen\theta}{a sen\theta} = \frac{m\lambda}{\lambda} \Rightarrow \frac{d}{a} = m = 4$$

Pico central da difração tem 2(m-1) picos de interferência mais o pico central da interferência

A intensidade da figura é dada por:

$$\boxed{I(\theta) = I_m(\cos^2\beta)\left(\frac{sen\,\alpha}{\alpha}\right)^2 \;;\; I_m = 4I_0}$$

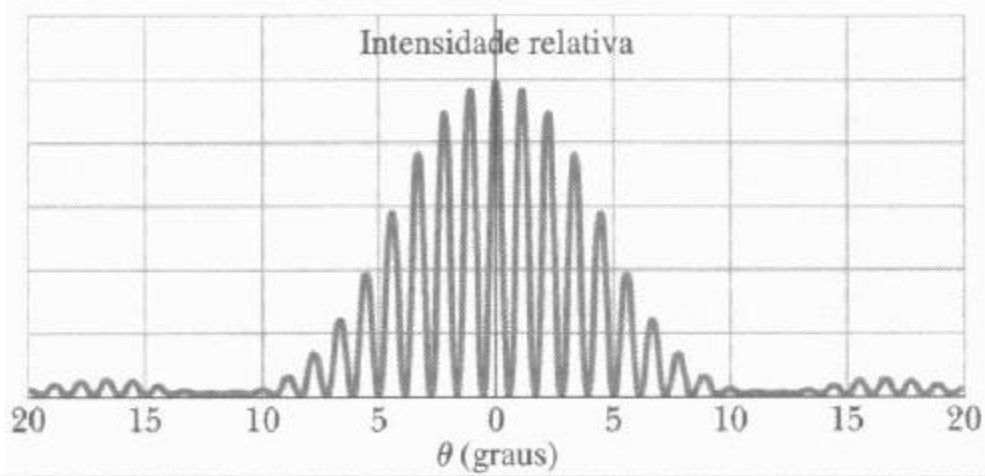
$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda} sen\,\theta \qquad \alpha = \frac{\pi a}{\lambda} sen\,\theta$$

No limite $a/\lambda \rightarrow 0$, Resultado da experiência de fenda dupla de Young:

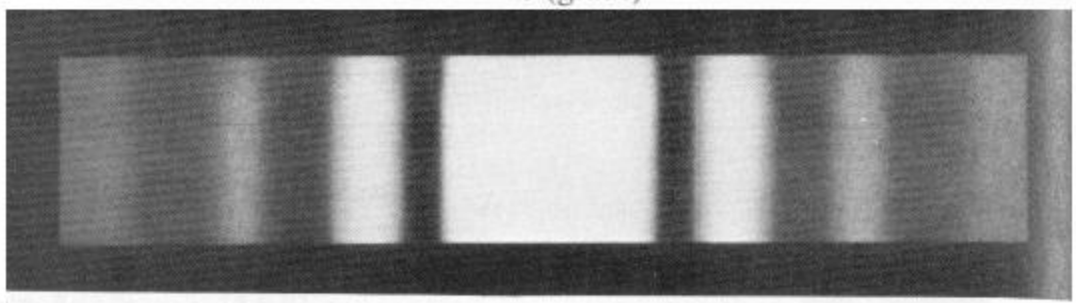
$$I(\theta) = I_m \cos^2\beta$$

No limite $d/\lambda \rightarrow 0$ Equação para o caso de fenda única

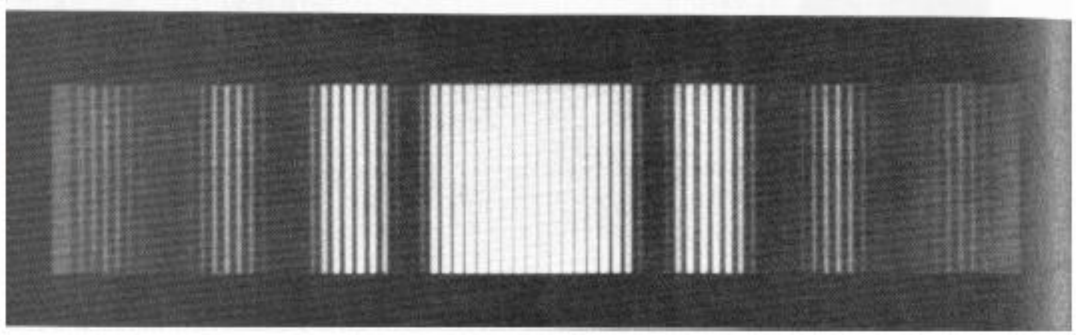
$$I(\theta) = I_m\left(\frac{sen\,\alpha}{\alpha}\right)^2$$



uma fenda



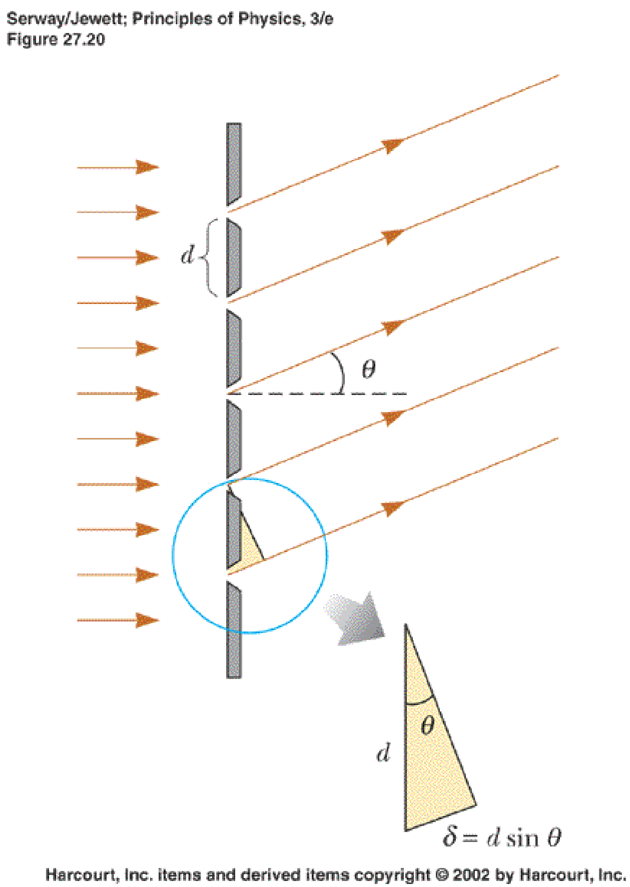
duas fendas



Rede de Difração

Situação onde temos multiplas fendas estreitas

Aplicação em espectroscopia



- ❑ Fendas separadas por d
- ❑ Larguras iguais "a"
- ❑ Com $a < \lambda$

cada fenda é uma fonte puntiforme e os efeitos de difração são desprezíveis.

Interferência se deve a diferença de caminho entre raios vizinhos

Interferência construtiva:

$$\delta = d sen\theta_{brilhante} = m\lambda$$

Resultado para a rede de Difração

- Máximos ocorrem nas mesmas posições com duas fendas.
- Com aumento do número de fendas os máximos principais ficam mais estreitos e intensos
- Entre quaisquer dois máximos existe mais de um mínimo, e esse número cresce com o número de fendas (N-1).

$$I = I_0\left(\frac{sen\,\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{sen(N\beta)}{N\beta}\right.$$

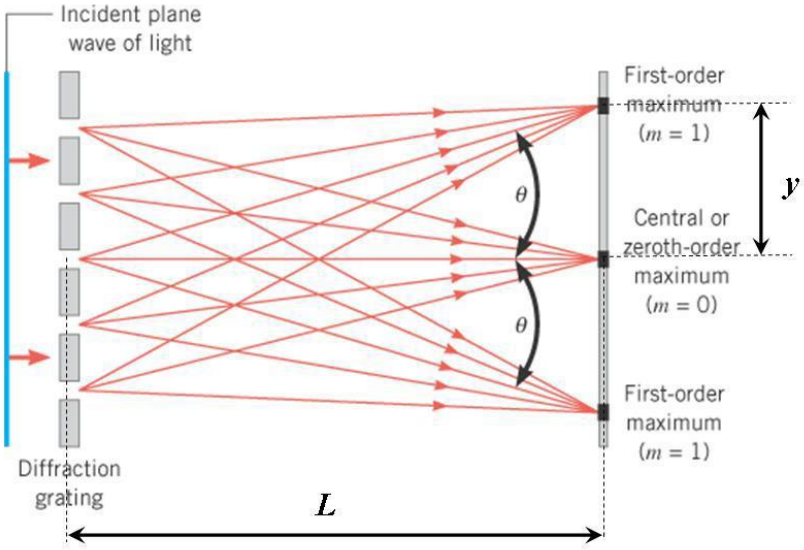
$$a < \lambda$$

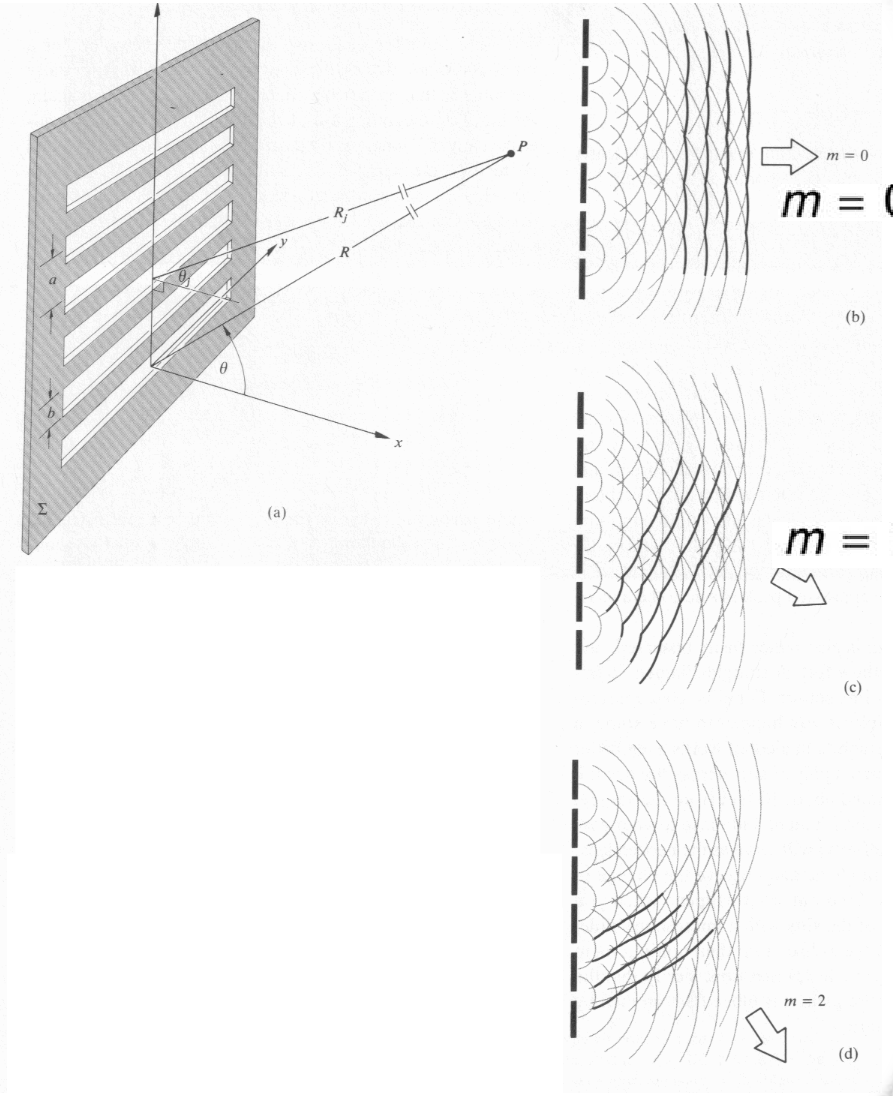
- Intensidade $I=N^2I_0$
- Largura dos máximos = 1/N

$$I = I_o\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\operatorname{sen}(N\beta)}{\operatorname{sen}(\beta)}\right)^2 \quad \text{onde} \quad \alpha = \frac{k\,a\operatorname{sen}\theta}{2} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{k\,d\operatorname{sen}\theta}{2}$$

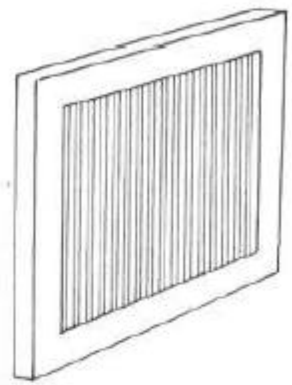
O termo $\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)^2$ é chamado de ***fator de difração*** (FD) e o termo $\left(\frac{\operatorname{sen}(N\beta)}{\operatorname{sen}(\beta)}\right)^2$ é chamado de ***fator de interferência*** (FI).

A ordem dos máximos m :

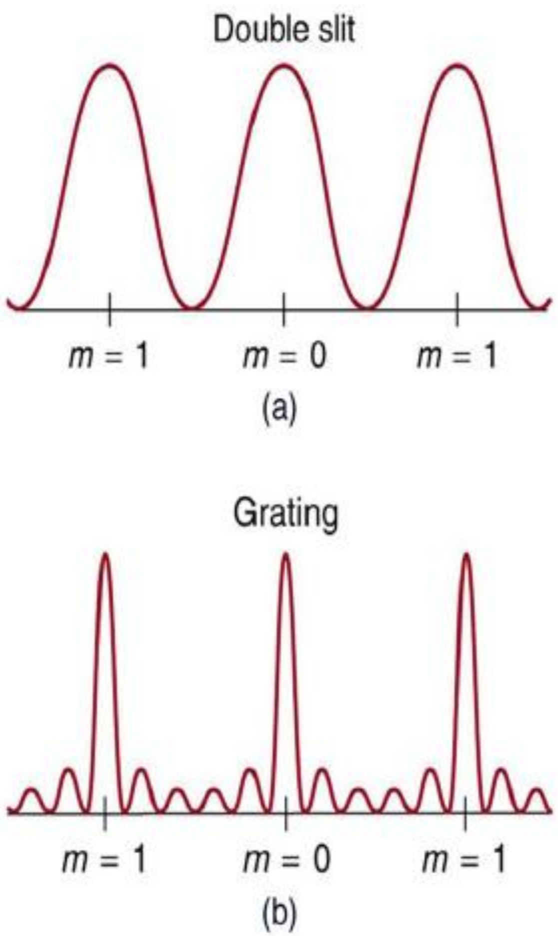


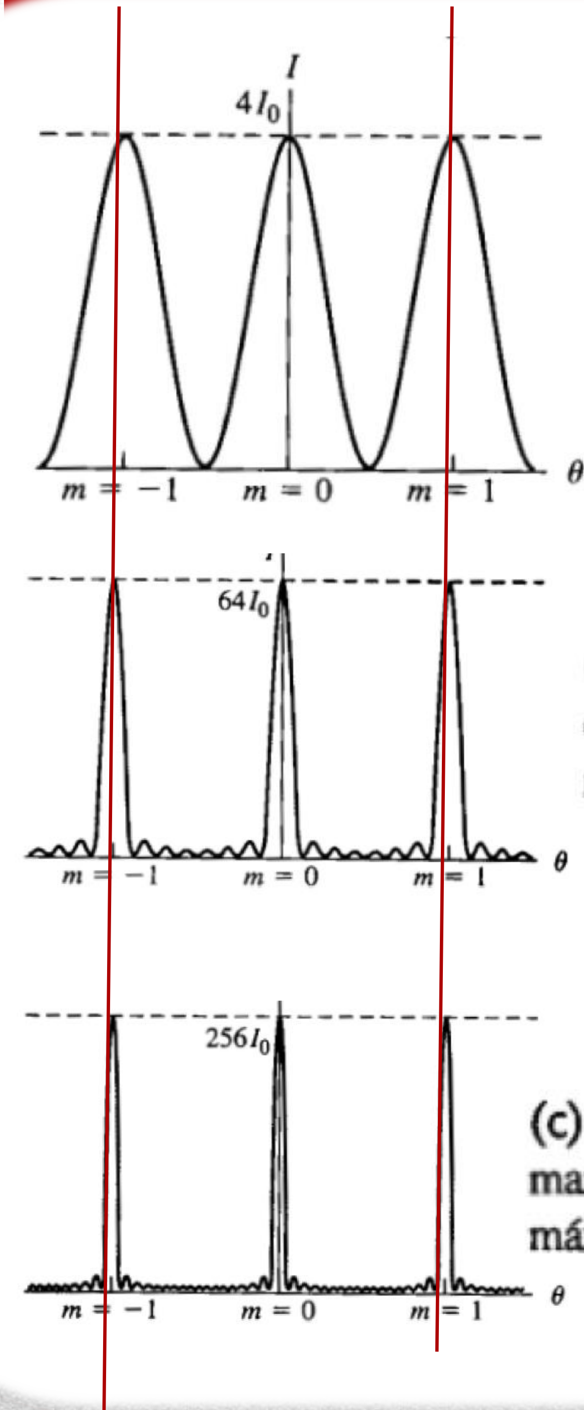


Quando aumentamos o número de fendas, ...



Rede de difração



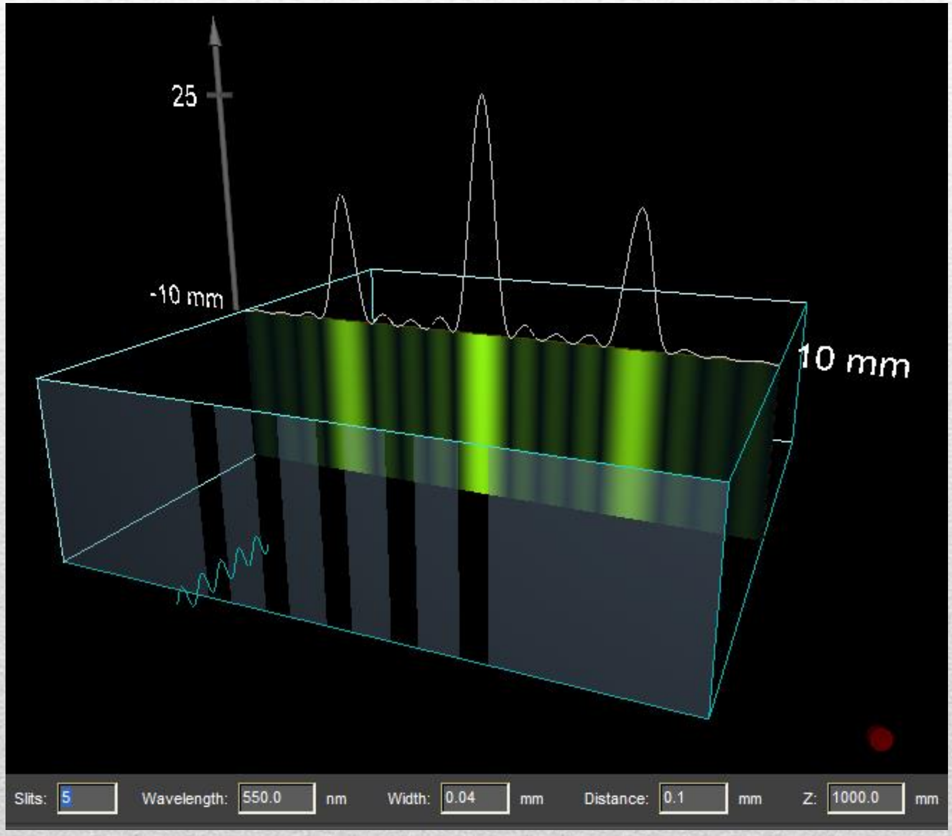


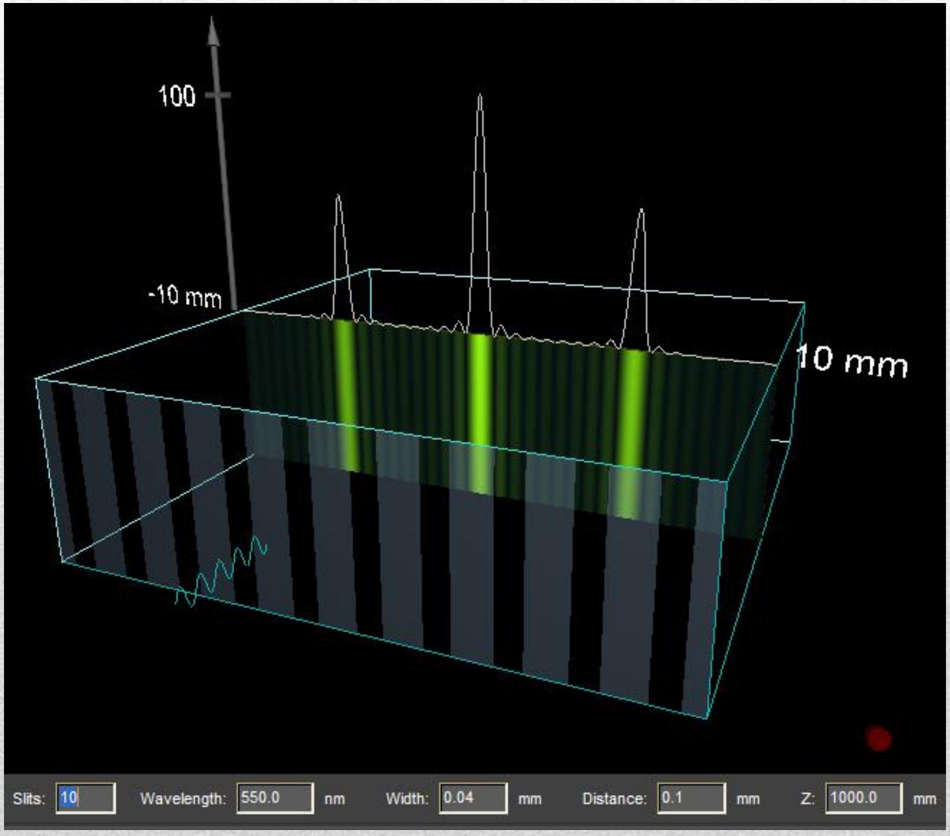
(a) $N = 2$: duas fendas produzem um mínimo entre dois máximos adjacentes.

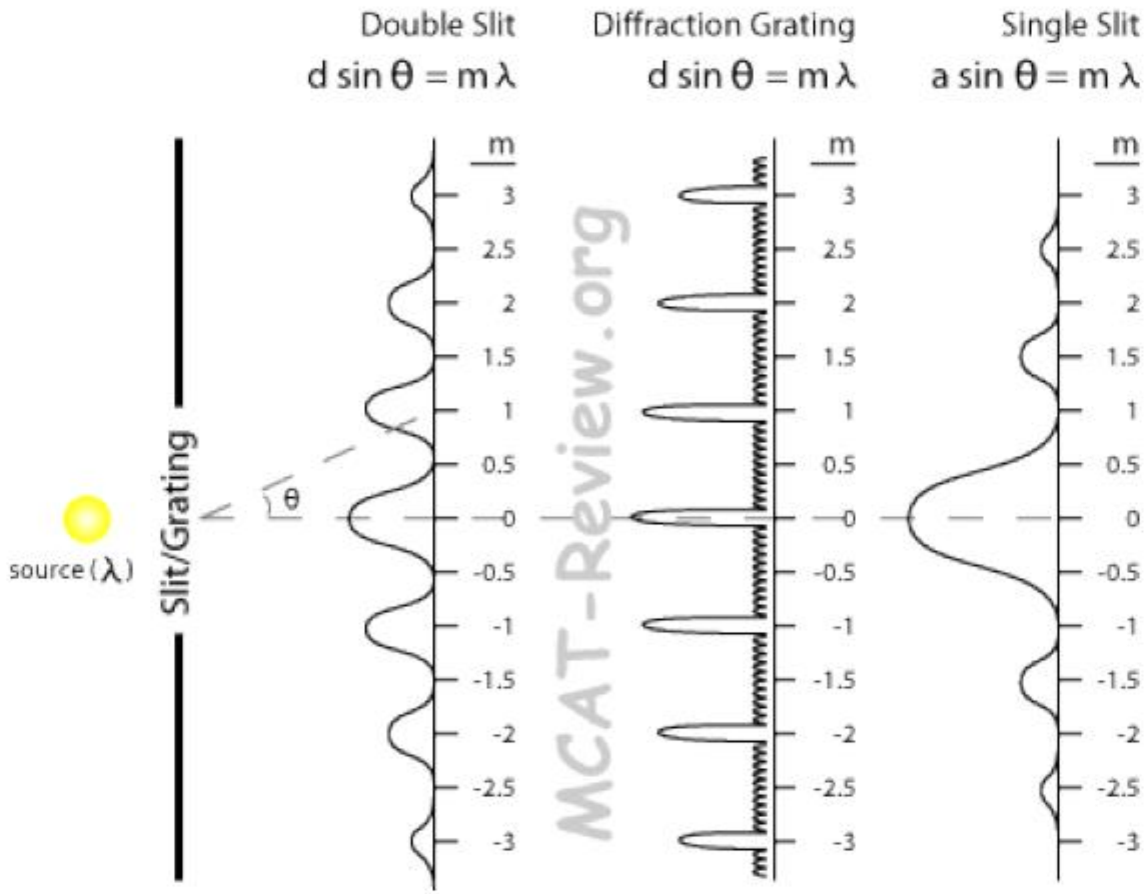
(b) $N = 8$: oito fendas produzem sete mínimos entre dois máximos adjacentes mais agudos e mais estreitos nos mesmos lugares.

(c) $N = 16$: com dezesseis fendas, os máximos são ainda mais agudos e estreitos, com mais mínimas entre dois máximos adjacentes.

5 fendas **10 fendas**

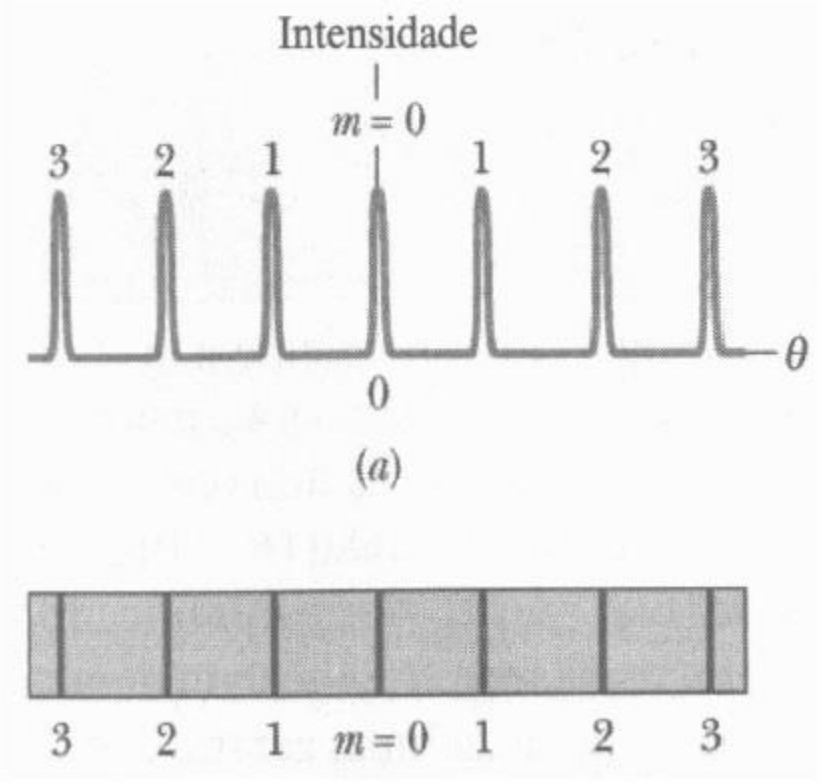





Double Slit
d sin θ = m λ
Diffraction Grating
d sin θ = m λ
Single Slit
a sin θ = m λ
m
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
θ
source (λ)
Slit/Grating
MCAT-Review.org

Rede de difração tem uma resolução muito melhor do que uma fenda dupla

Picos estreitos rotulados pelos
Números m da ordem.



Linhas = franjas claras

Rede de difração pode ser utilizada para determinar um comprimento de desconhecido a partir do ângulo medido.

$$d\,\mathrm{sen}\theta = m\lambda$$

$$\boxed{\theta = arcsen\left(\frac{m\,\lambda}{d}\right)}$$

Espectrômetro de a rede de Difração

Rede de difração é uma forma de se medir comprimentos de onda com alta precisão.

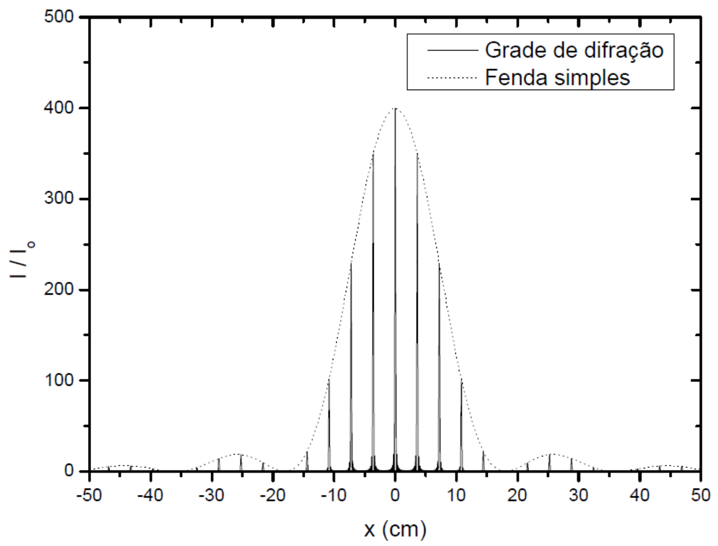
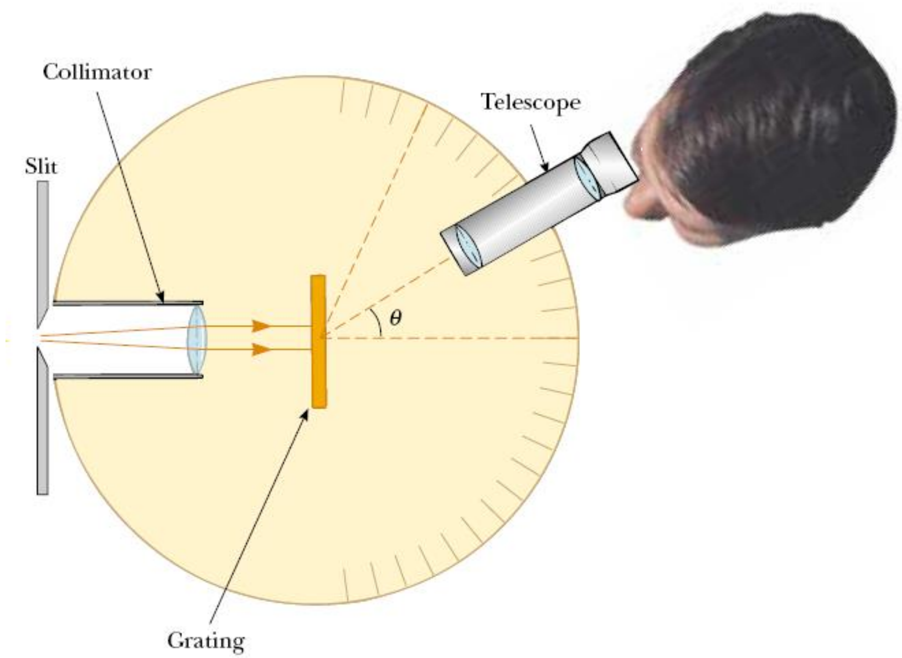


Figura 5 – Padrão de difração de uma grade de difração (com $N = 20$, $d = 1/600$ mm, $a = d/5$, $L = 1$ m, $\lambda = 600$ nm), e o padrão de difração de uma fenda simples de mesma abertura a.



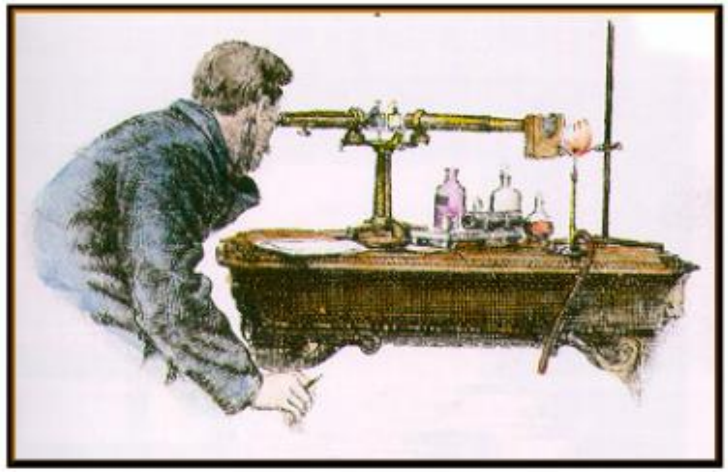
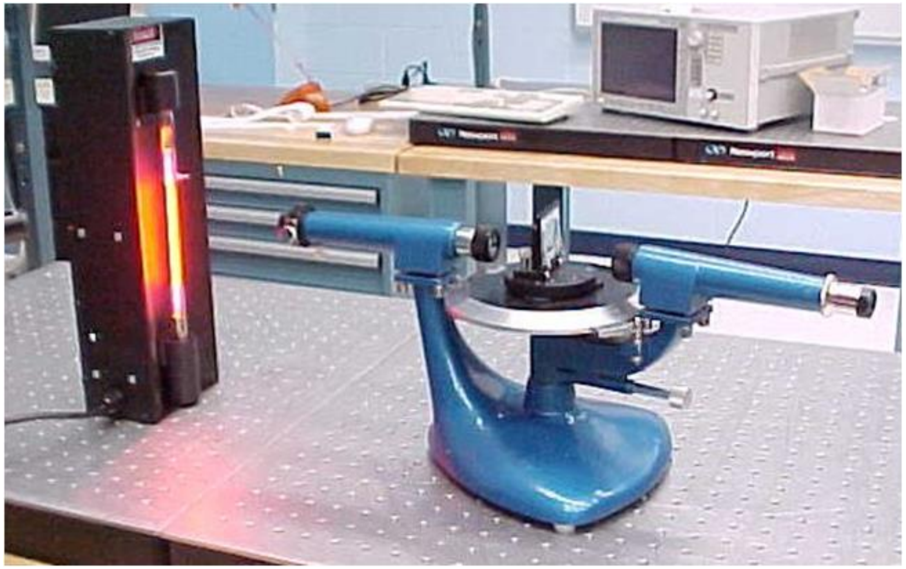
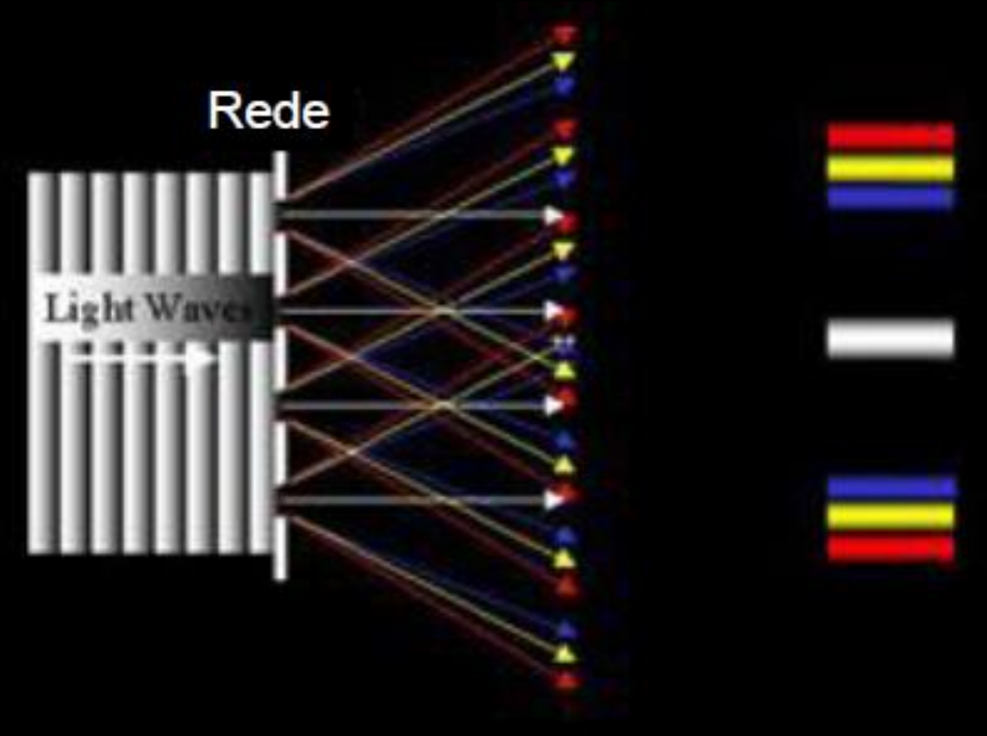
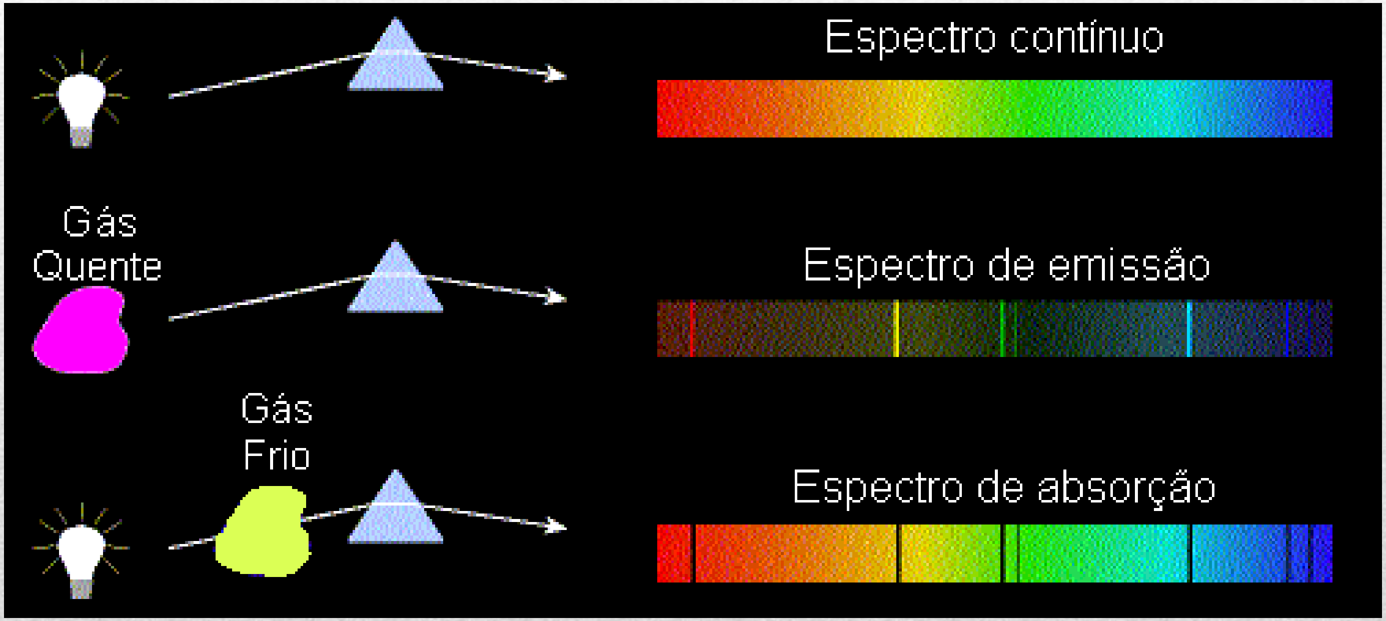


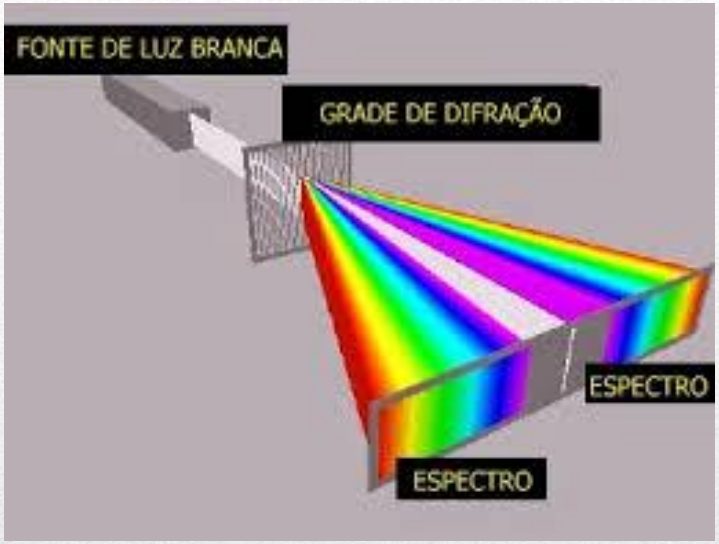
Fig. 6 - Ilustração de Kirchhoff observando espectros.



Para cada λ, a interferência construtiva ocorre para um θ:

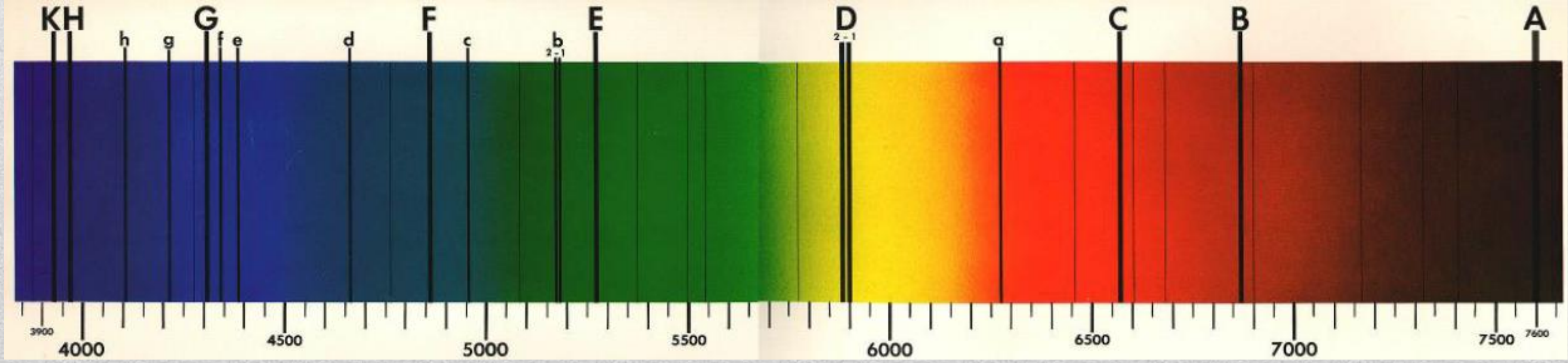


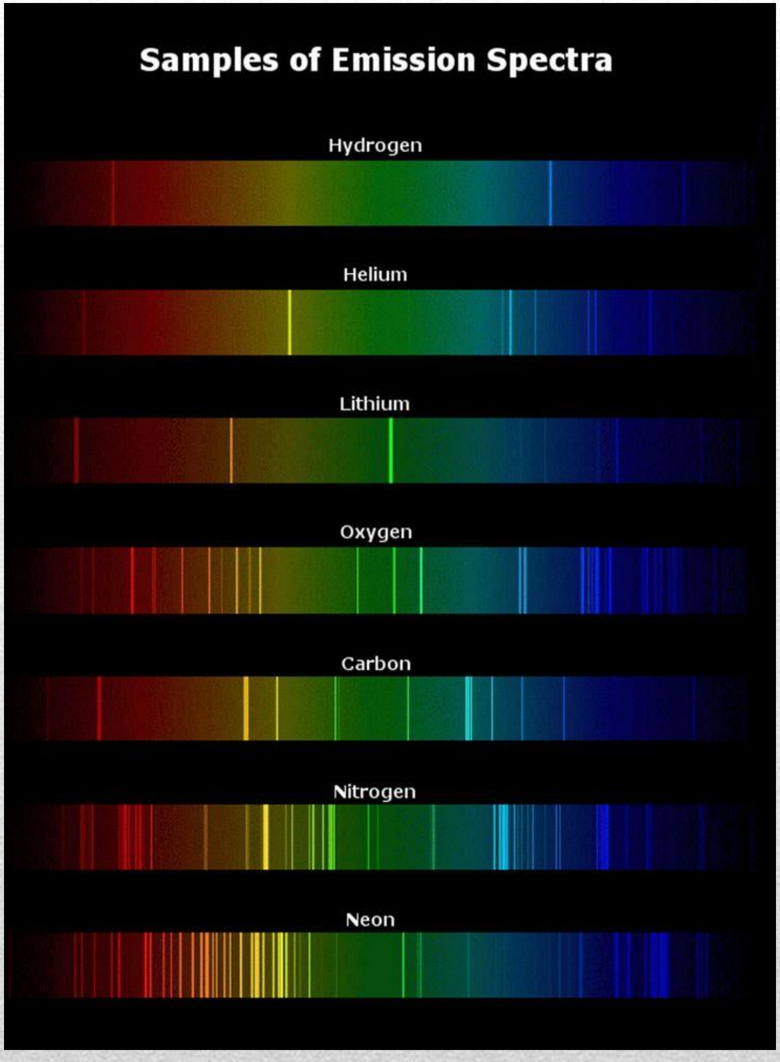

Espectro contínuo
Gás
Quente
Espectro de emissão
Gás
Frio
Espectro de absorção

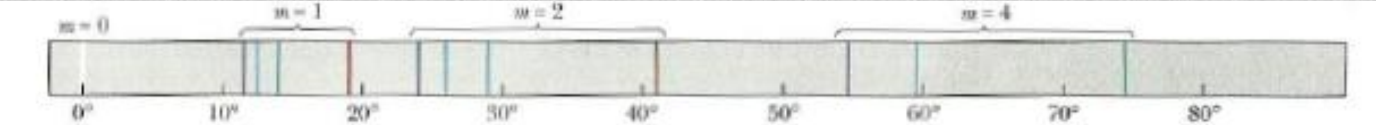


Espectro observado do Sol

Fraunhofer observou 35 linhas hoje sabemos que existem mais de um milhão







36-24 Linhas de emissão do hidrogênio na faixa da luz visível, até a quarta ordem.

Exemplo

A luz monocromática de uma luz de laser de hélio-neônio (632,8 nm) incide normalmente sobre uma rede de difração contendo 6000 linhas/cm. Encontre os ângulos nos quais podem ser observados os máximos de primeira e segunda ordem.

Interferência construtiva:

$$\delta = d\,sen\,\theta_{brilhante} = m\lambda$$

Espaçamento entre as fendas

$$d = \left(\frac{1}{6000}\right)10^{-2}\,m = 1667\,nm$$

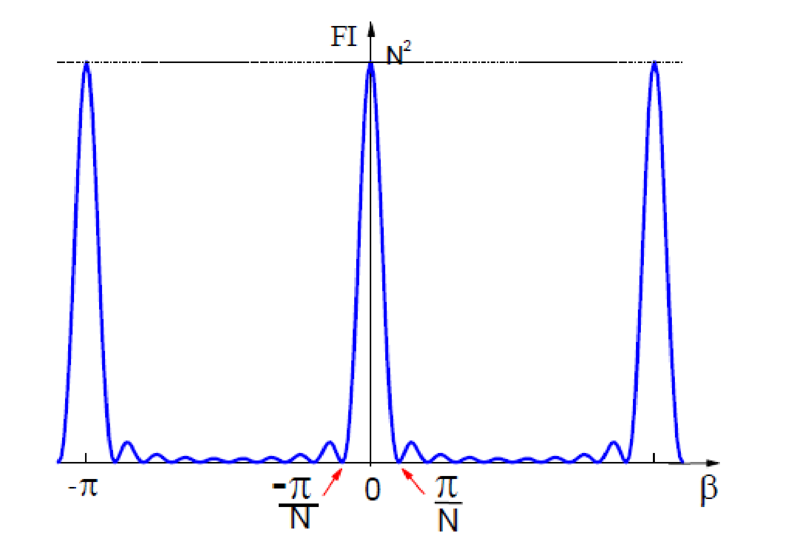
Para m=1 (primeira ordem) $sen\,\theta_1 = 1\times\frac{\lambda}{d} = \frac{632{,}8\,nm}{1667\,nm} = 0.379$ $\theta_1 = 22{,}3^0$

Para m=2 (segunda ordem) $sen\,\theta_2 = 2\times\frac{\lambda}{d} = 2\,\frac{632{,}8\,nm}{1667\,nm} = 0.759$ $\theta_2 = 49{,}4^0$

Resolução e dispersão numa rede de difração

- A rede de difração é útil para se medir comprimentos de onda.
- É mais precisa do que prismas para dispersar espectro em seus componentes.
- Separa melhor duas ondas com comprimentos de onda próximo, ou seja tem melhor resolução.
- Vimos os picos de interferência construtiva ficam mais finos conforme aumentamos o número de linhas.

$$I = I_0\left(\frac{sen\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{sen(N\beta)}{N\beta}\right)^2 N^2$$



$$\boxed{\beta = \frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta}$$

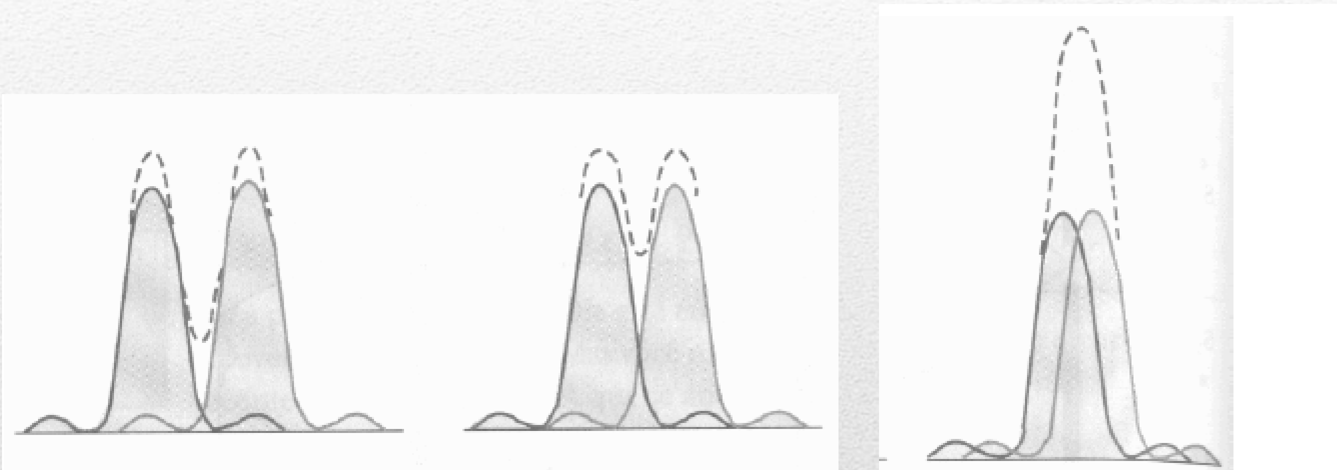
Mínimo para:

$$sen(N\beta) = 0$$

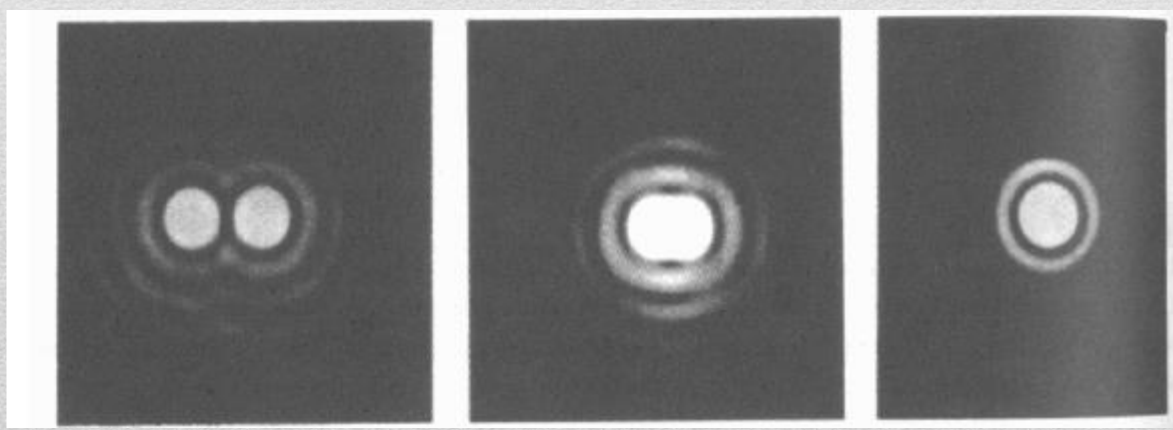
$$N\beta = m\pi$$

$$\beta = m\frac{\pi}{N}$$

Sistemas oticos (microscopios, telescópios, olho humano são caracterizados pelo poder de resolução.



$$1/\Delta\theta_R$$



Larguras das linhas numa rede de difração:

Verificamos no estudo da difração por uma fenda com abertura "a" que a posição do primeiro minimo é dada por:

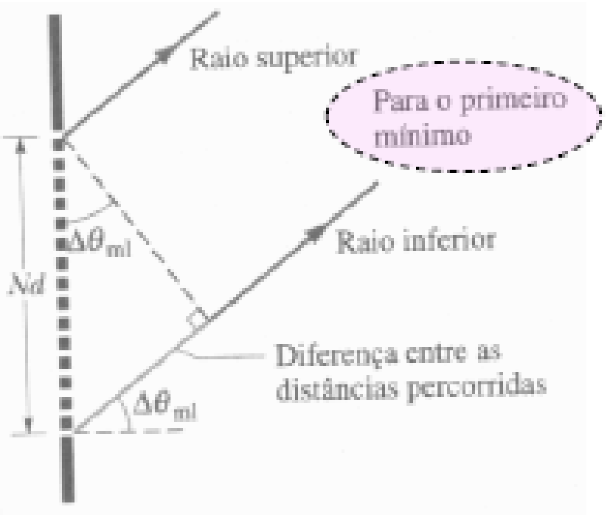
$$sen\alpha = m\pi$$

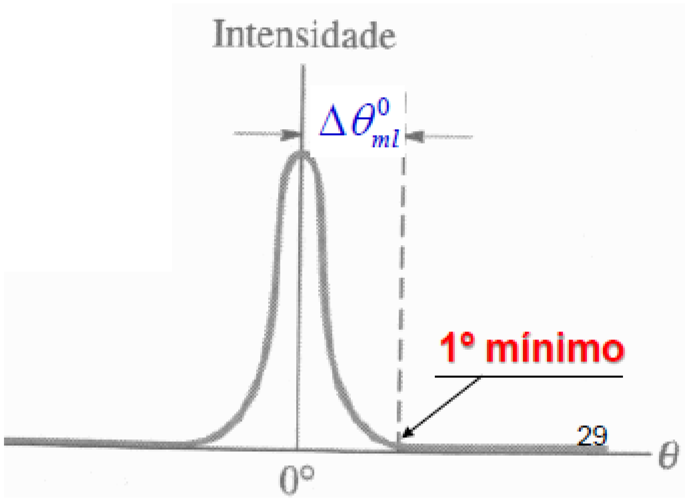
$$I = I_0 (\frac{sen\alpha}{\alpha})^2$$

$$\alpha = \pi \frac{a}{\lambda} sen\theta = m\pi$$

$$\lambda = asen\theta$$

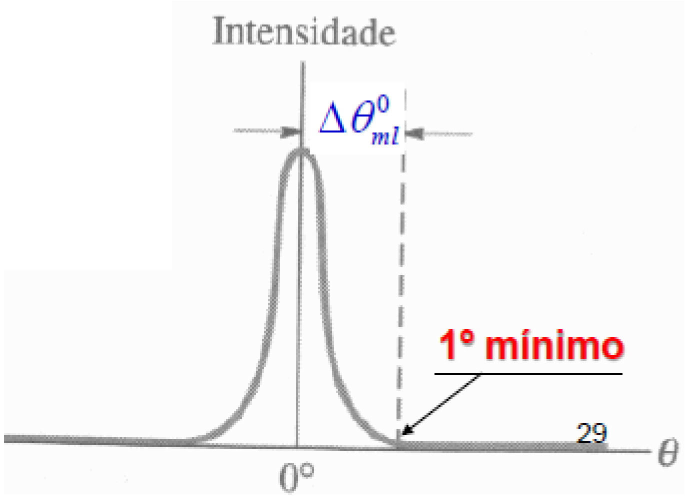
Para uma rede de difração podemos fazer a analogia a~Nd





$$a \approx Nd$$

$$\lambda = Nd sen \Delta\theta_m$$



$$\Delta\theta_m \approx 0$$

$$\Delta\theta_m = \frac{\lambda}{Nd}$$

Largura das linhas em geral

$$\Delta\theta_m = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta}$$

Dispersão

Medida do afastamento angular de duas ondas com comprimentos de onda próximo

$$D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda}$$

$\Delta\theta$ separação angular entre duas linhas que diferem de $\Delta\lambda$.

$$\lambda = \frac{d\,sen\,\theta}{m}$$

$$\frac{d\lambda}{d\theta} = \frac{d}{m}\cos\theta$$

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta} \Rightarrow D = \frac{m}{d\cos\theta}$$

Resolução

A capacidade de separar o comprimento de onda de duas ondas

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

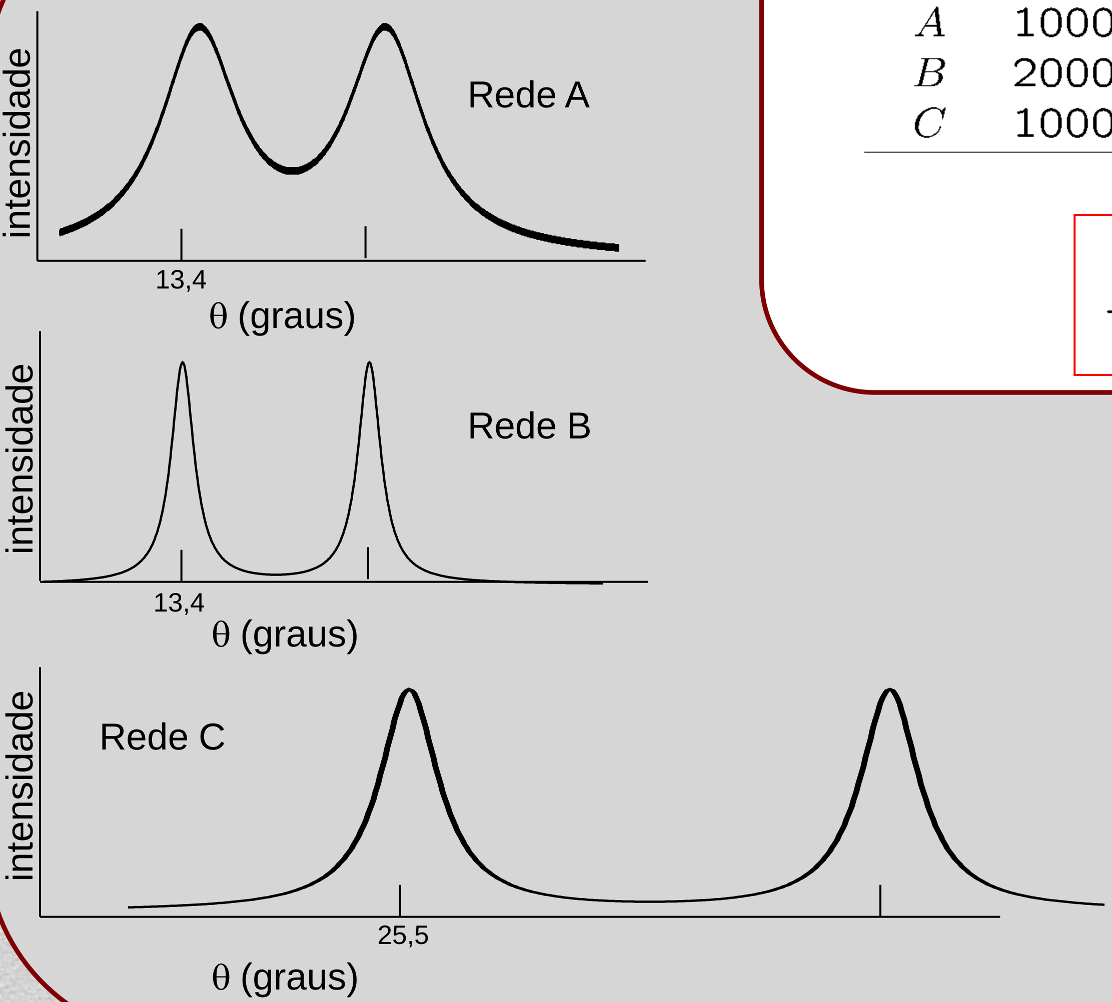
$\Delta\lambda$. menor diferença de comprimento de onda que pode ser resolvido

Menor angulo: $\Delta\theta_{ml}^{\theta} \approx \frac{\lambda}{Nd\cos\theta}$ dispersão: $D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta}$

$$\frac{\lambda}{Nd\cos\theta}\frac{1}{\Delta\lambda} \approx \frac{m}{d\cos\theta} \Rightarrow R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \approx \frac{Nd\cos\theta m}{d\cos\theta} = Nm$$

Para m=0 (ordem zero) todos os comprimentos de ondas são indistinguíveis (R=0)

Comparação entre dispersão e resolução



λ = 589 nm e m = 1

$Rede$	N	$d(nm)$	θ	$D(^\circ/\mu m)$	R
A	10000	2540	$13,4^\circ$	23,2	10000
B	20000	2540	$13,4^\circ$	23,2	20000
C	10000	1370	$25,5^\circ$	46,3	10000

$$D = \frac{m}{d\cos\theta}$$

$$R = Nm$$

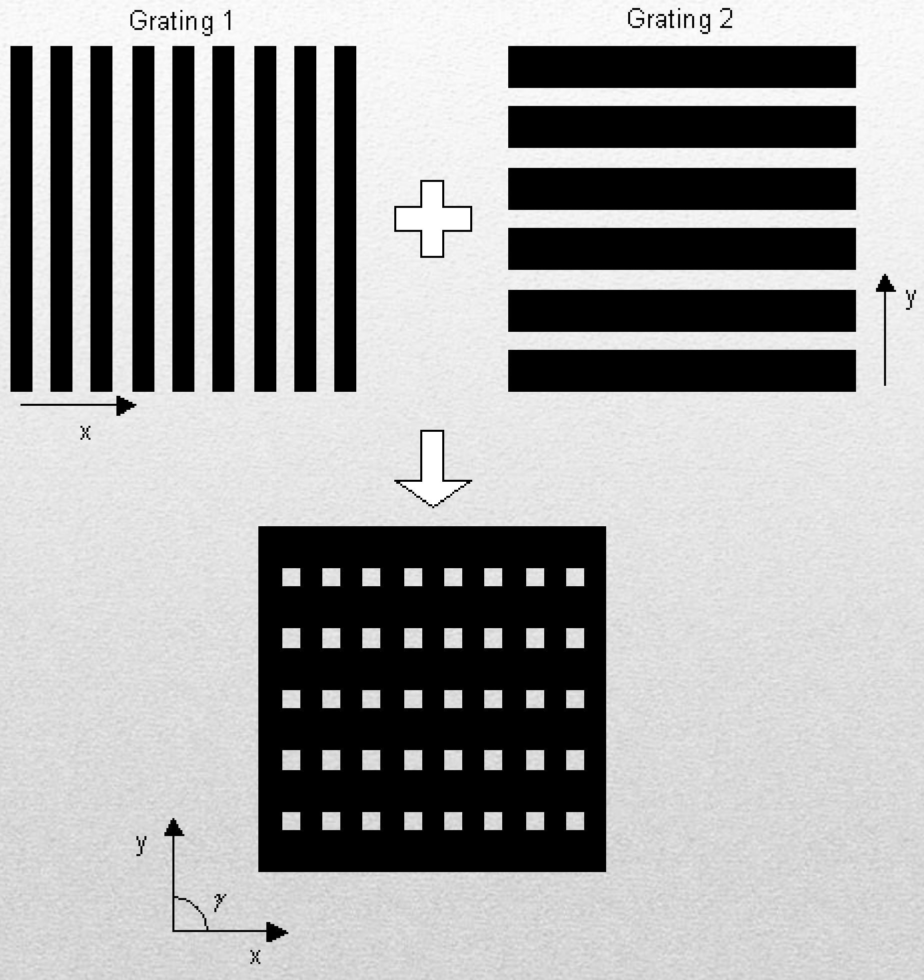
$$D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta}$$

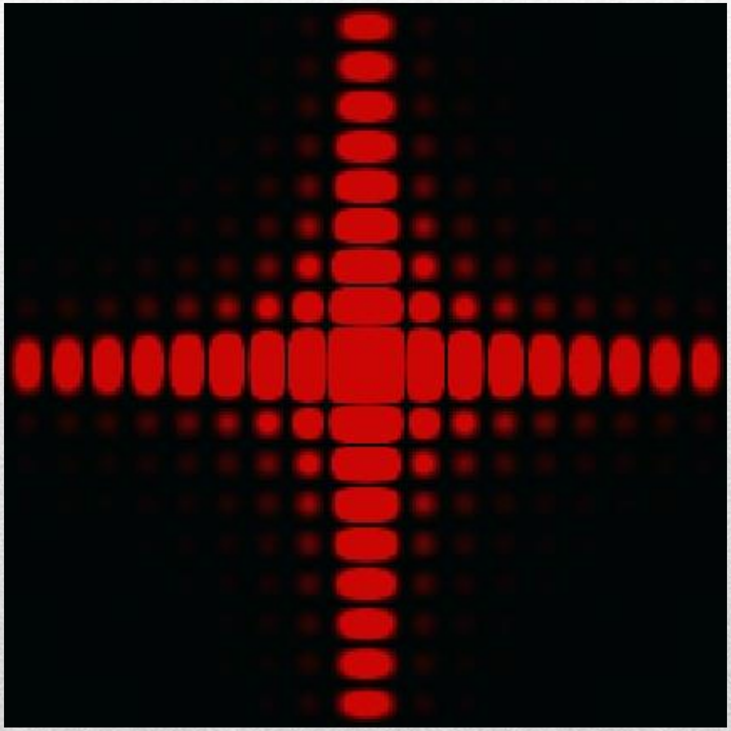
A dispersão melhora com a diminuição de d

$$R = \frac{\lambda_{med}}{\Delta\lambda} = Nm$$

Resolução aumenta com N, número de ranhuras

Rede 2-dim (periodicidade em duas direções)





MaX Von Laue - Difração de raios-x

Physics

The Nobel Prize in Physics 1914

"for his discovery of the diffraction of X-rays by crystals"

Max von Laue

Germany

Frankfurt-on-the-Main University
Frankfurt-on-the-Main, Germany

b. 1879
d. 1960

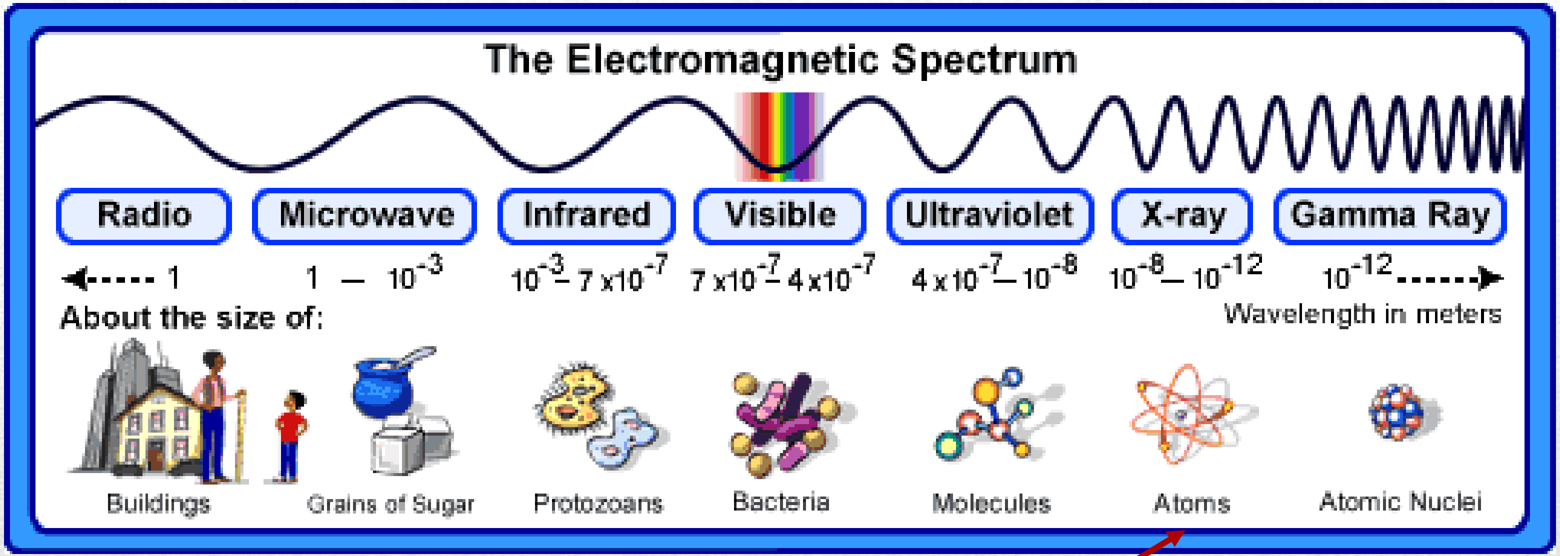
MAX VON LAUE

Concerning the detection of X-ray interferences

Nobel Lecture, November 12, 1915

Max von Laue sugeriu que rede regular de átomos num cristal poderia agir como se fosse uma rede de difração tridimensional para estudar os raios-X

Raio-X

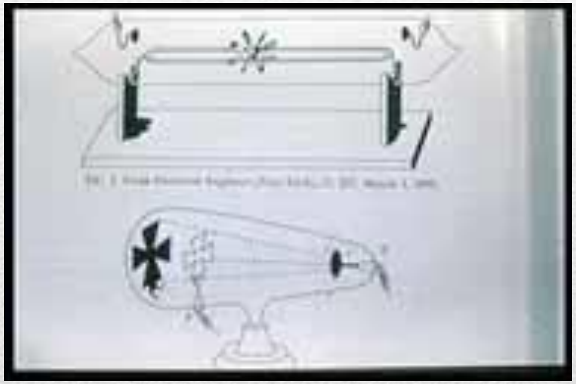


raios X corresponde a radiação eletromagnética de comprimentos de onda ao redor de 0.1 a 10 A, ou seja 10^{-10}m.

$$\text{raio-x} \Rightarrow \lambda \approx 1\ \text{Å}$$

Os raios X tem então comprimento de onda da mesma ordem de grandeza que os átomos.

Os raios X foram descobertos acidentalmente por W. C. Roentgen em 1895 quando ele estava trabalhando com tubos de raios catódicos.



Para estudar os raios X precisamos então de uma rede de difração com espaçamento da ordem de distâncias atômicas ! ! !

$$\text{R-x} \Rightarrow \lambda \approx 1\,\text{Å}$$

Difração de raio-X

- Podemos determinar comprimento de onda da luz com uma rede de difração que tem um número conhecido de linhas por unidade de comprimento.

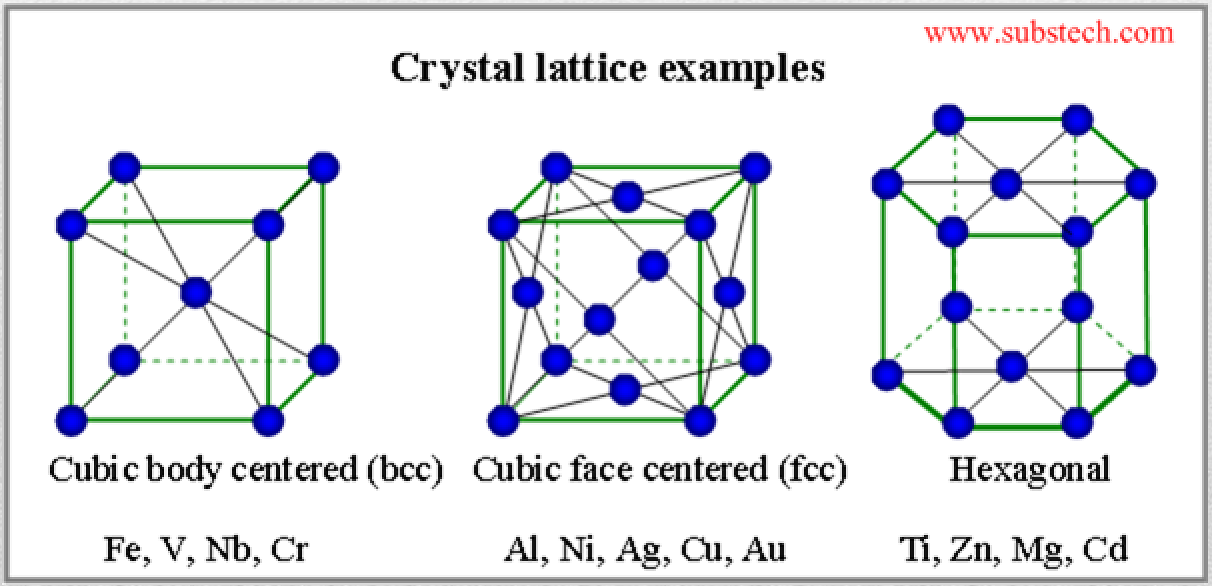
- O comprimento de onda de qualquer radiação eletromagnética pode ser determinada dependendo do espaçamento da rede.

interferência, a=largura → $a \ll \lambda$

difração → difração a rede deve ter um espaçamento da ordem do comprimento de onda. ($d \sim \lambda$)

Rede 3-dim (periodicidade em três direções)

CRISTAIS

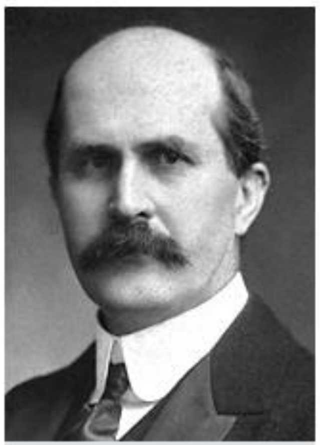


Lei de Bragg

Physics

The Nobel Prize in Physics 1915

"for their services in the analysis of crystal structure by means of X-rays"



Sir William Henry Bragg

1/2 of the prize

United Kingdom

London University
London, United Kingdom

William Lawrence Bragg

1/2 of the prize

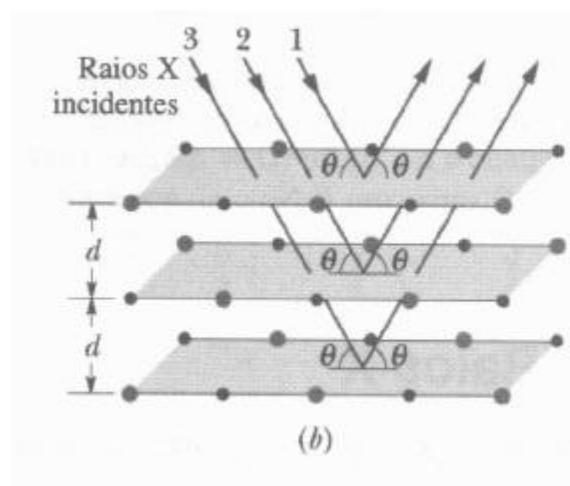
United Kingdom

Victoria University
Manchester, United Kingdom

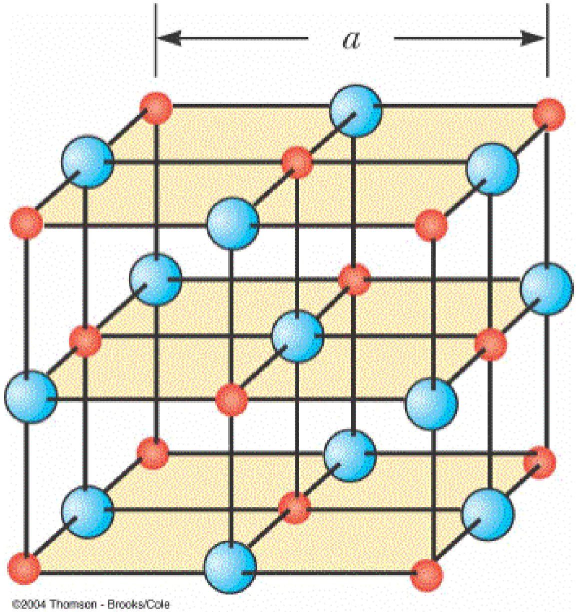
WILLIAM LAWRENCE BRAGG

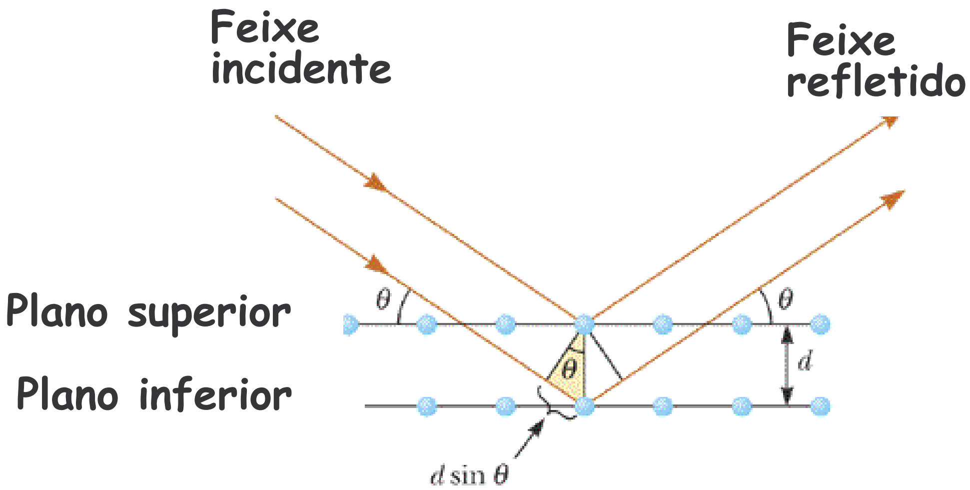
The diffraction of X-rays by crystals

*Nobel Lecture, September 6, 1922**



Lei de Bragg





(lei de Bragg)

$$\boxed{2d\,\mathrm{sen}\,\theta = m\lambda \quad , \quad m = 1, 2, 3, \ldots}$$

Exercícios

Raios-X de comprimento de onda de 0,12 nm sofrem reflexão de segunda ordem em um cristal de fluoreto de lítio para um ângulo de Bragg de 28°. Qual é a distância interplanar dos planos cristalinos responsáveis pela reflexão?

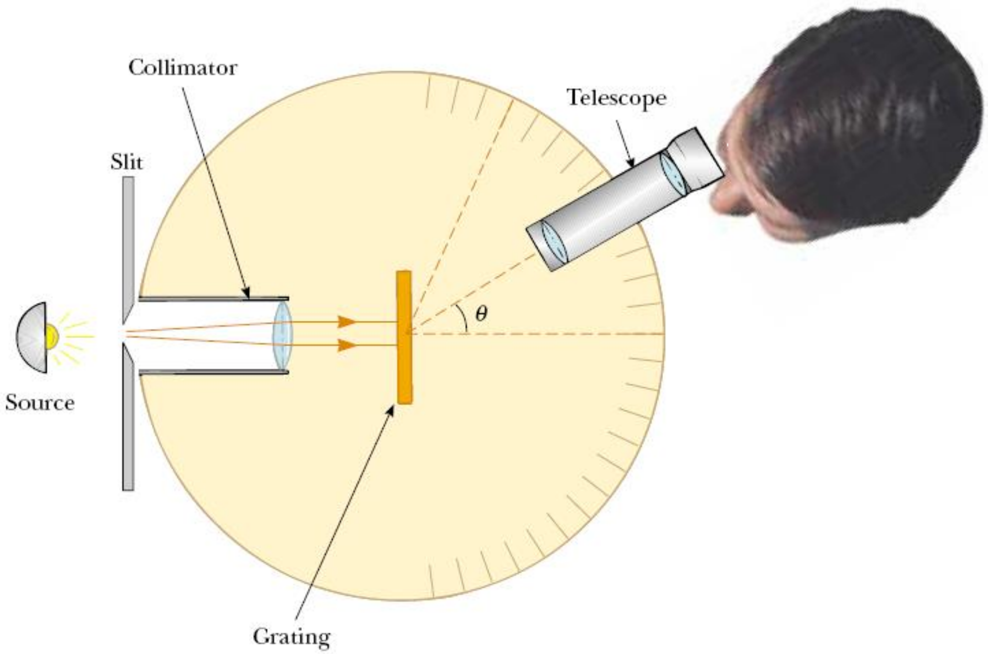
$$2d \operatorname{sen} \theta = m\lambda \quad , \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

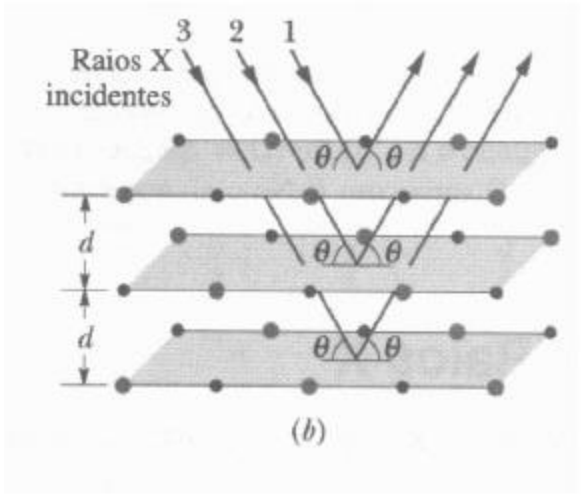
11-53. A lei de Bragg fornece a condição de máximos como sendo

$$2dsen\theta = m\lambda, \tag{42}$$

onde d é o espaçamento dos planos do cristal e λ é o comprimento de onda. O ângulo é medido a partir da normal aos planos. Para reflexão de segunda ordem usamos $m = 2$, encontramos

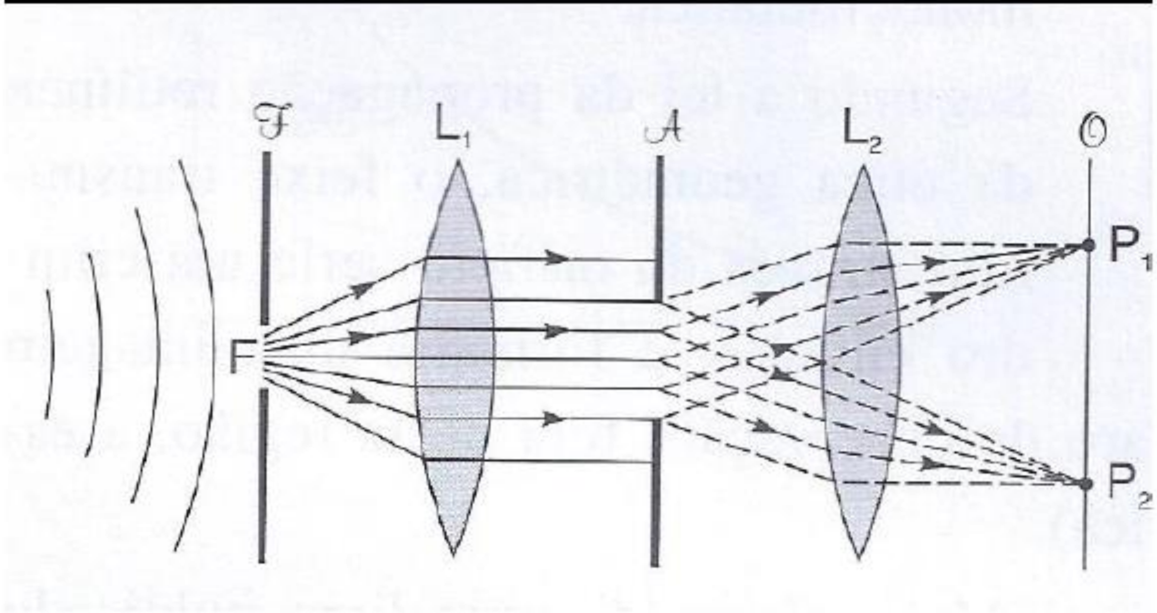
$$d = \frac{m\lambda}{2sen\theta} = \frac{(2)(0,12 \times 10^{-9})}{2sen28°} = 0,26nm. \tag{43}$$



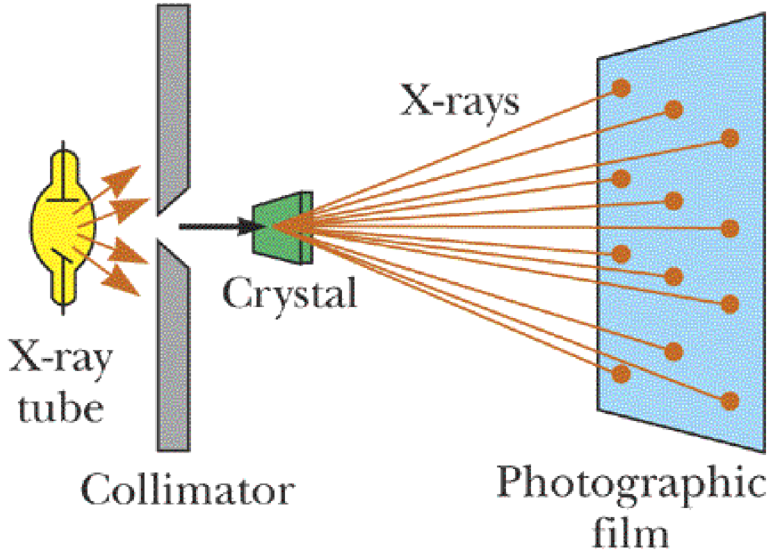


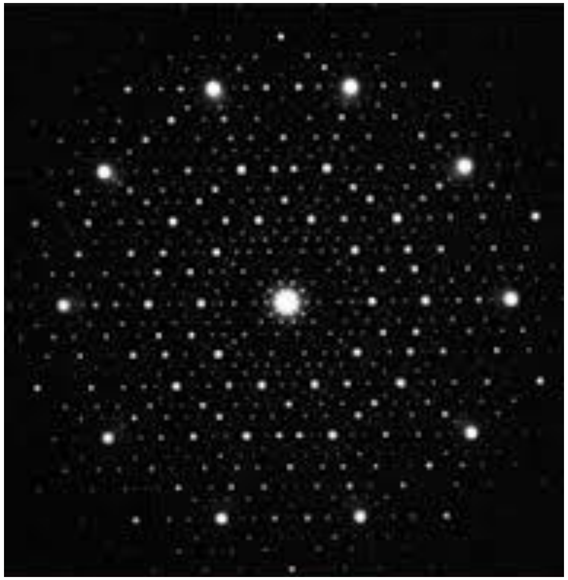
$$2d\,\mathrm{sen}\,\theta = m\lambda \quad , \quad m = 1, 2, 3, ...$$

Sistema de Lentes para a Difração: com ele, os raios que saem da fenda são paralelos.



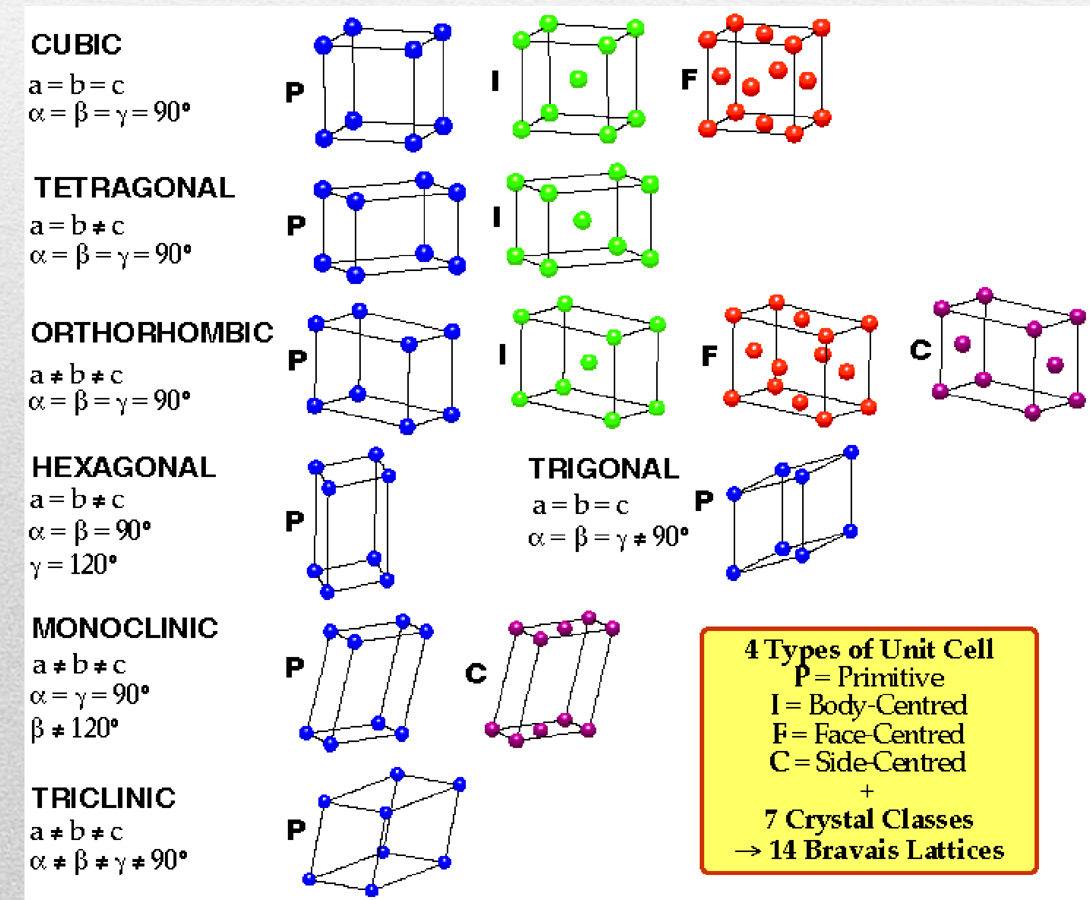
Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 27.23

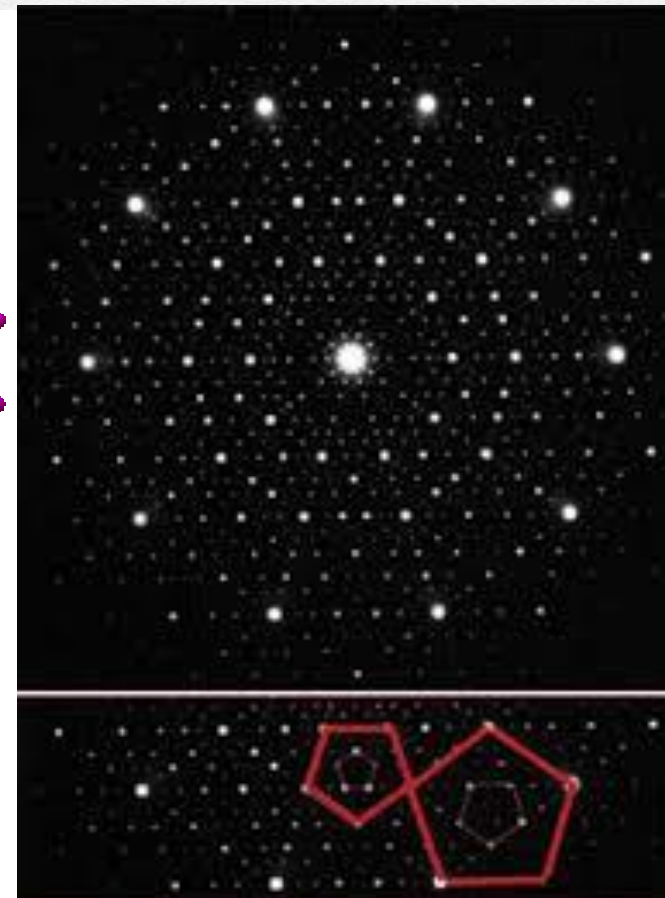




Difração de raio-x

Com uma radiação de raio-X de comprimento de onda conhecido podemos estudar a estrutura de um cristal utilizando a lei de Bragg.





Planos de difração

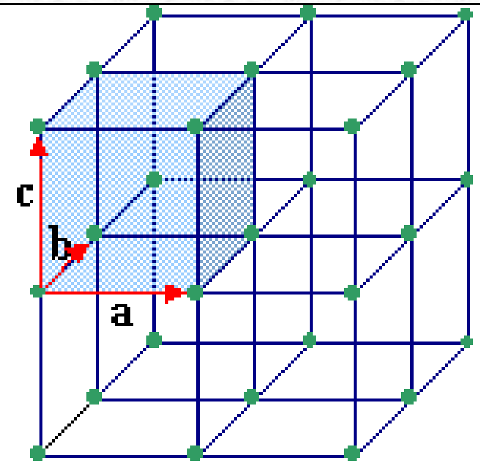
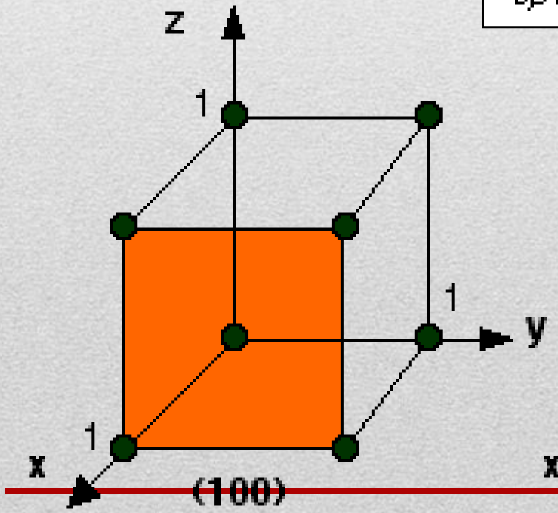
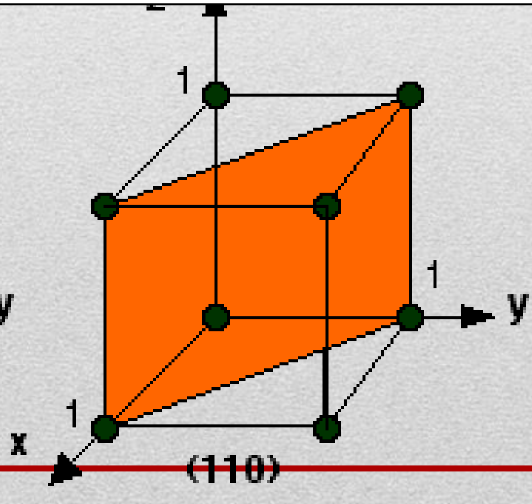
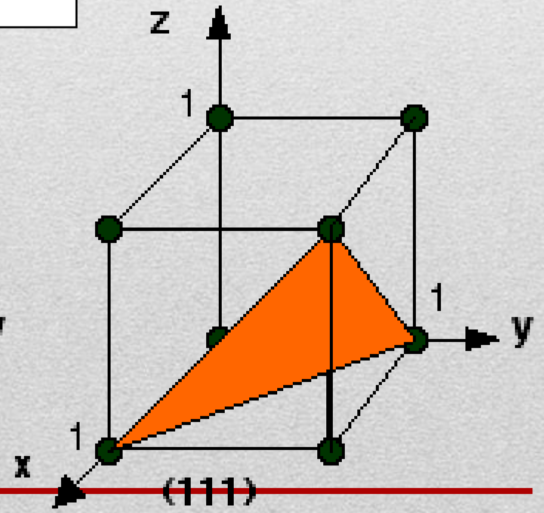
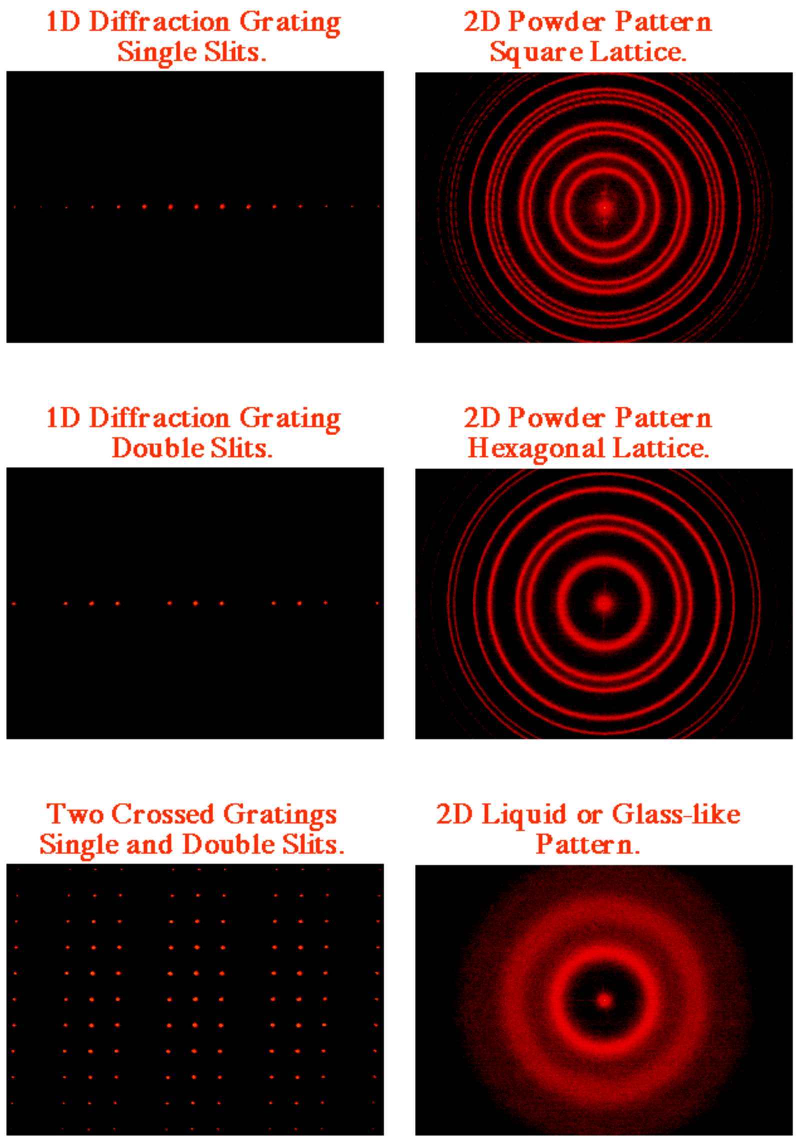


Figure 3(b): Primitive cell of a space lattice in 3-dimensions.

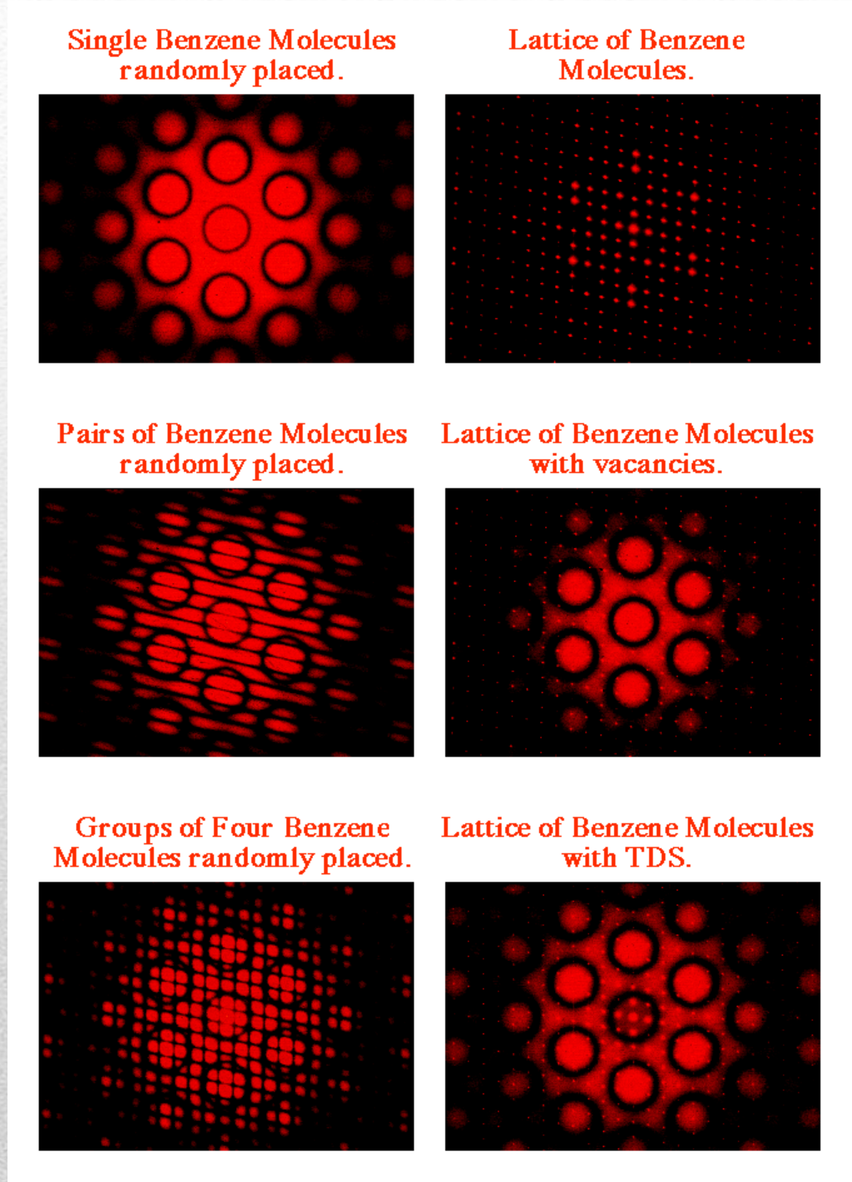


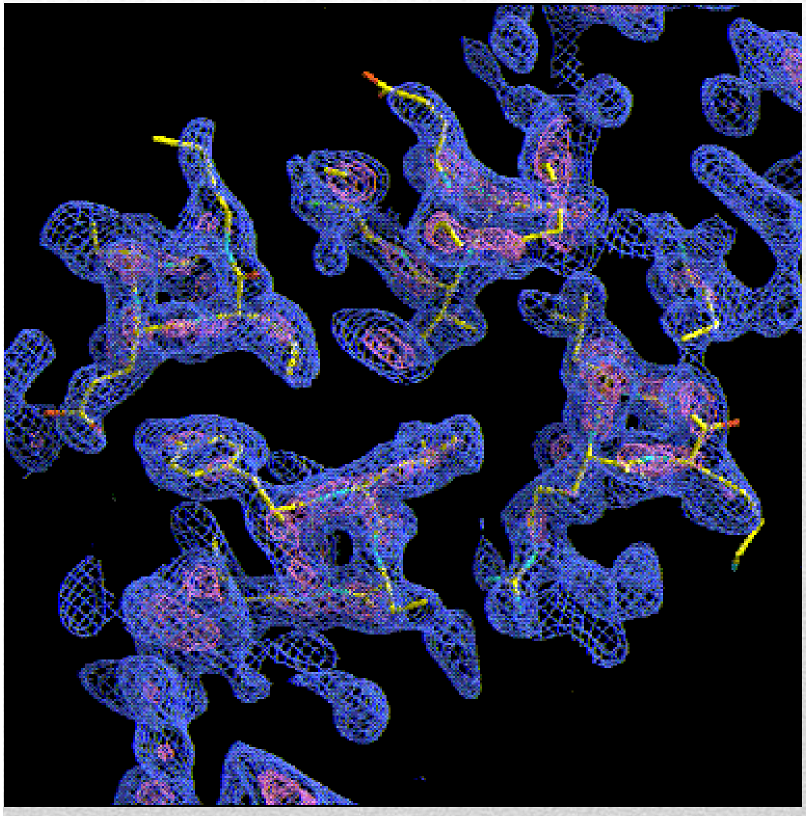





1D Diffraction Grating
Single Slits.
2D Powder Pattern
Square Lattice.
1D Diffraction Grating
Double Slits.
2D Powder Pattern
Hexagonal Lattice.
Two Crossed Gratings
Single and Double Slits.
2D Liquid or Glass-like
Pattern.

Moléculas de benzeno





Exercício Cap. 27 - 33

Uma rede de difração tem 800 linhas/mm. Um feixe de luz contendo comprimentos de onda de 500 a 700 nm incide sobre a rede. Os espectros de diferentes ordens se sobrepõem ?

$$2d\,\text{sen}\,\theta = m\lambda \quad , \quad m = 1, 2, 3, ...$$

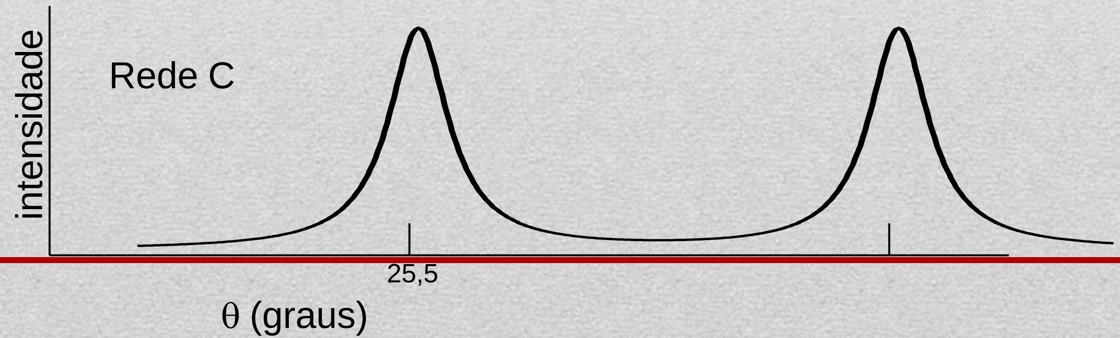
Exercício Cap. 27 - 34

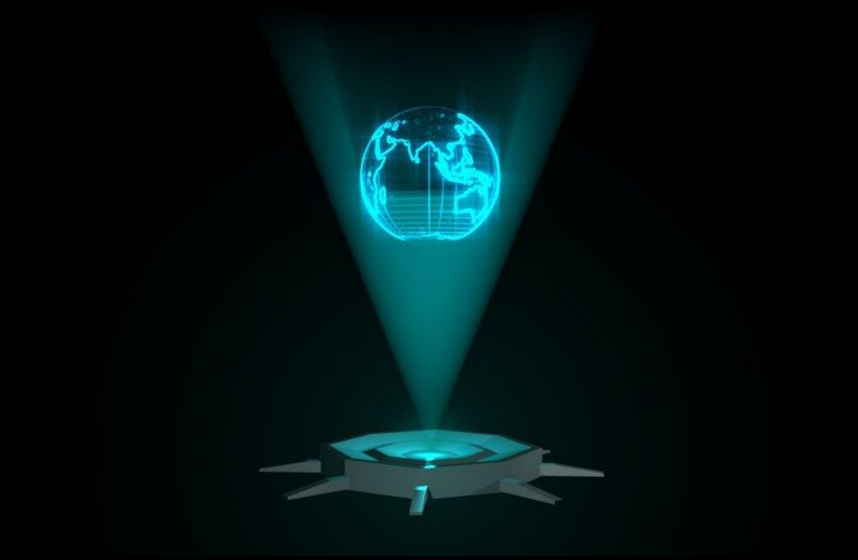
Dois comprimentos de onda λ e $\lambda+\Delta\lambda$ com ($\Delta\lambda<<\lambda$) incidem sobre uma rede de difração. Determine a expressão para a separação angular entre as linhas espectrais no espectro de m-ésima ordem.

$$2d\,\mathrm{sen}\,\theta = m\lambda \quad , \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Dispersão: Medida do afastamento angular de duas ondas com comprimentos de onda próximo

$$D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} \qquad\qquad = \frac{m}{d\cos\theta}$$





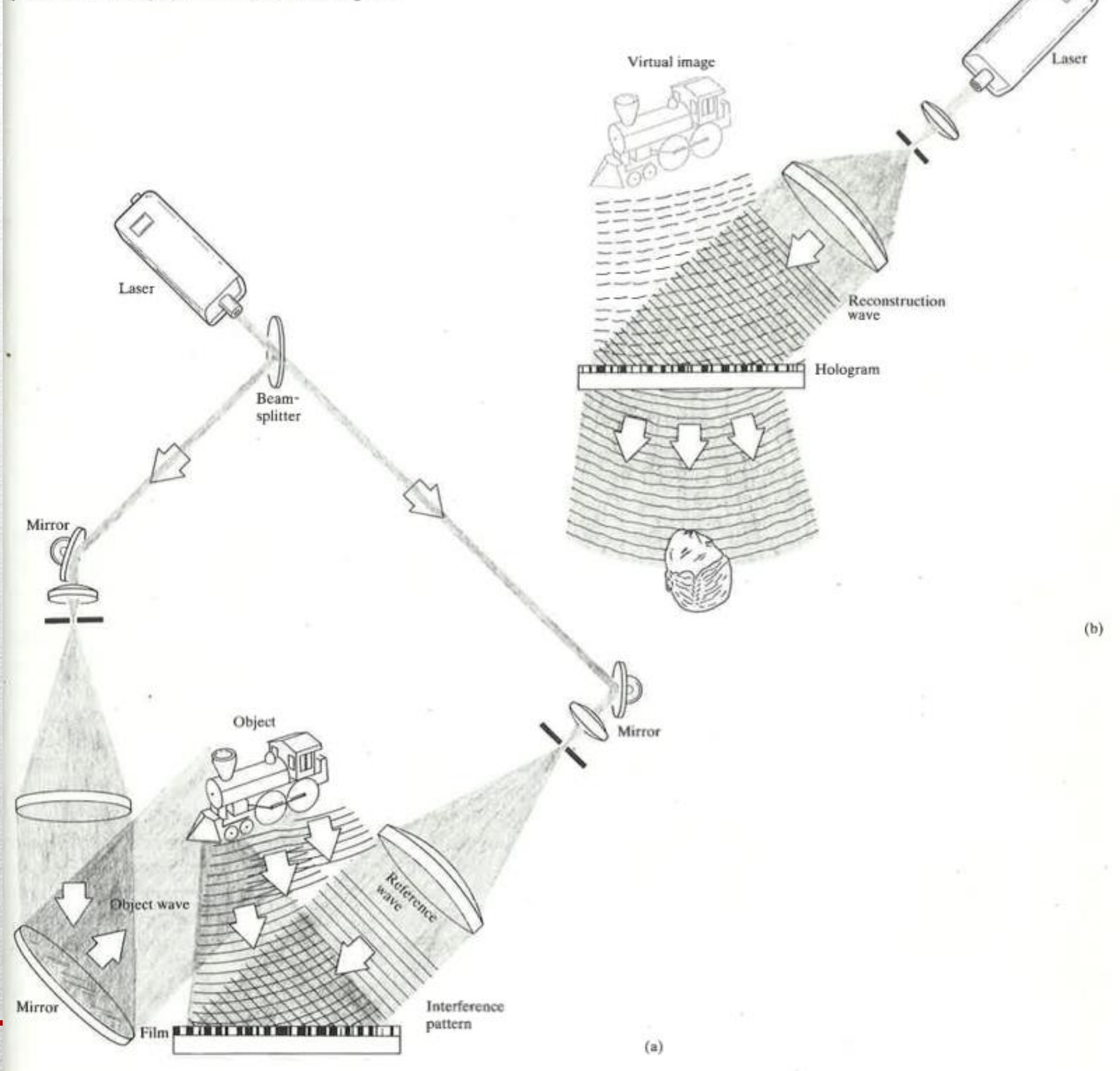


Figure 14.47 (a) The creation of a transmission hologram of a toy locomotive. (b) Replay of a transmission hologram.