Mecânica (IGc) - 4310192

Ministrado por

Prof. Gustavo Paganini Canal

Departamento de Física Aplicada

Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Famosa Macieira de Isaac Newton
- Trinity College Cambridge -

Curso ministrado online para o

Instituto de Geociências

e-mail: canal@if.usp.br

São Paulo - SP, 27 de Agosto de 2020

Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- **Velocidade média e velocidade instantânea**
- **Aceleração média e aceleração instantânea**
- **Exercícios de Fixação**

Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- **Velocidade média e velocidade instantânea**
- Aceleração média e aceleração instantânea
- Exercícios de Fixação

Definição da velocidade média

- **A velocidade média (unidimensional) de um corpo é definida por**

Componente x do deslocamento da partícula

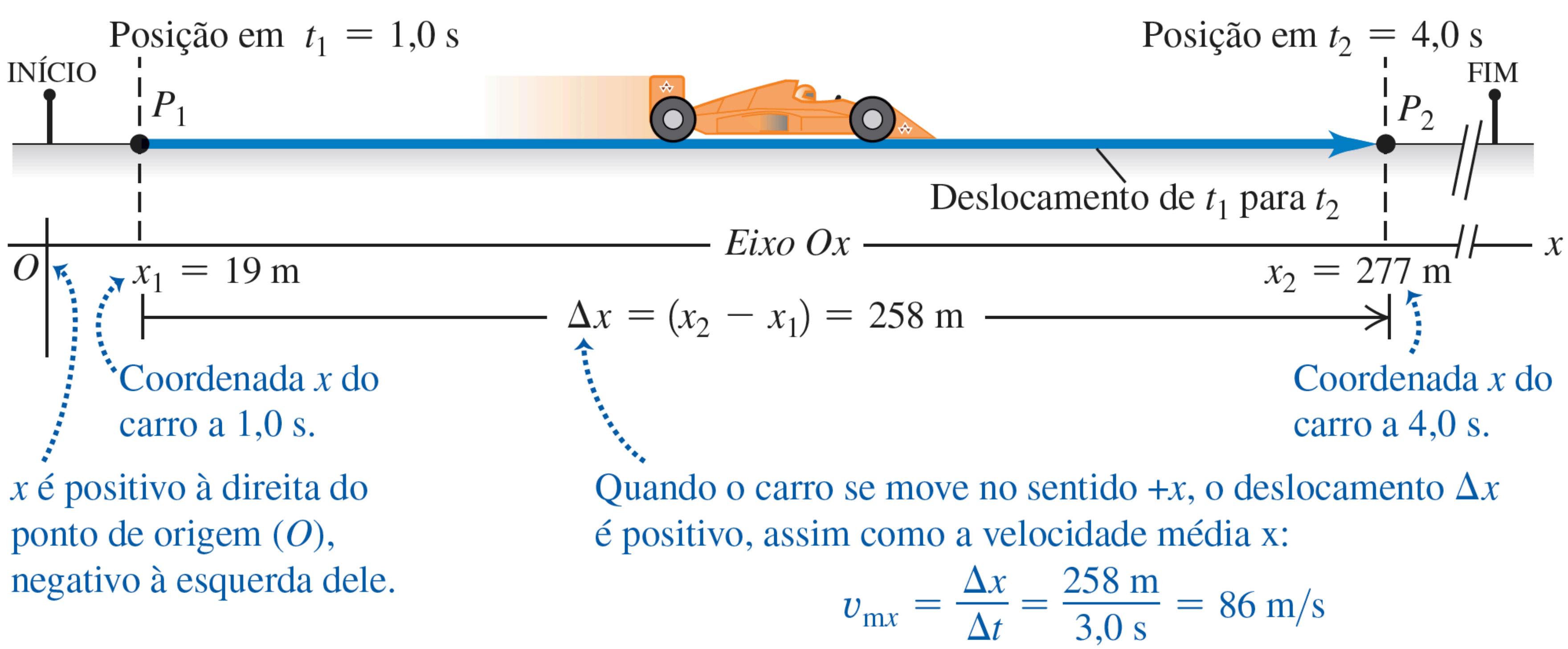
Velocidade x média de uma partícula em **movimento retilíneo** durante o intervalo de tempo de t_1 a t_2

$$v_{mx} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Coordenada x final menos coordenada x inicial

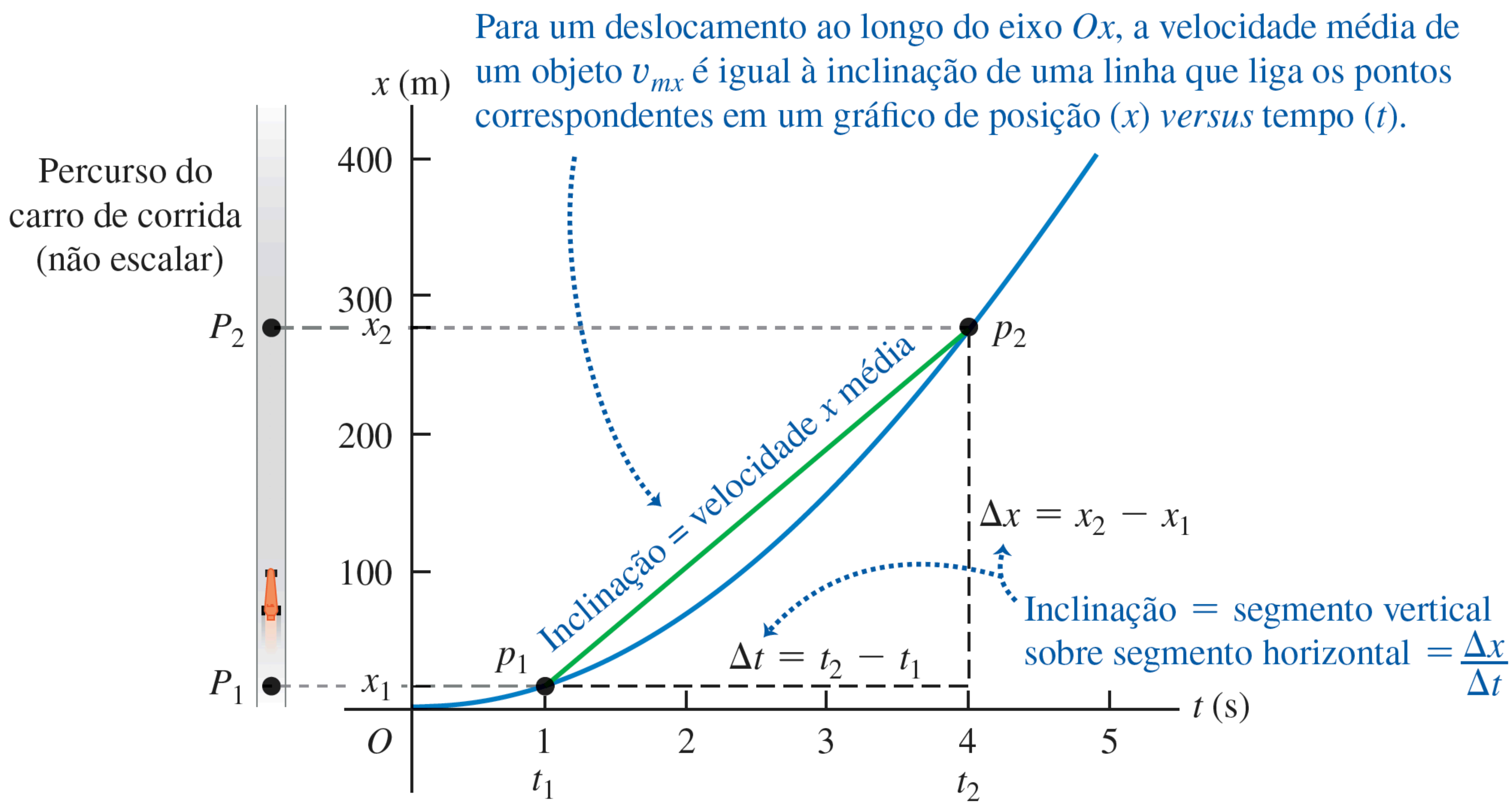
Intervalo de tempo

Tempo final menos tempo inicial



A velocidade média de um corpo pode não representar a realidade quando seu movimento não é uniforme

- **A velocidade média de um corpo pode não fornecer uma informação exata sobre o movimento da partícula**



Definição de velocidade instantânea

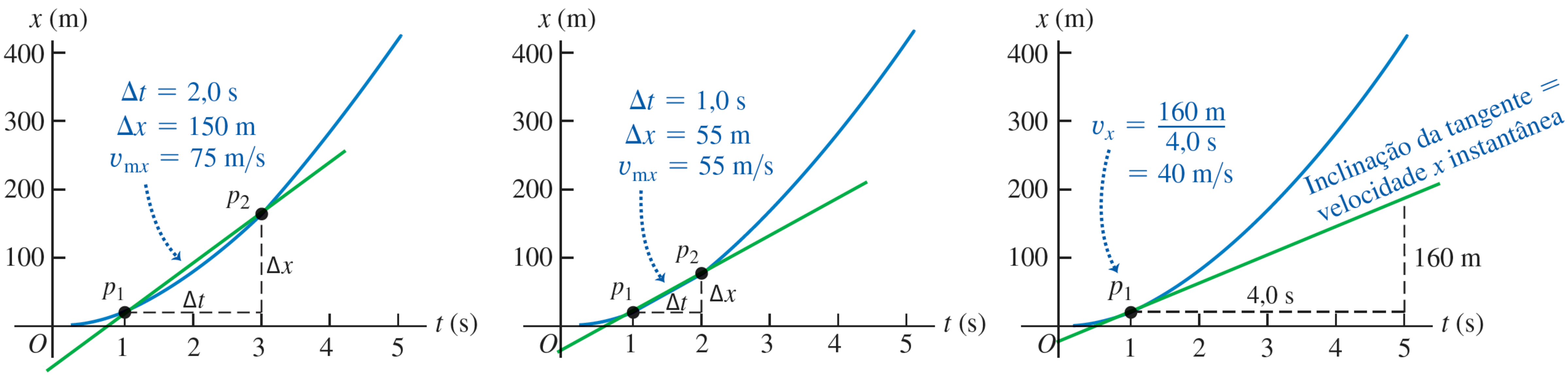
- **A velocidade instantânea (unidimensional) de um corpo é definida por**

A **velocidade x instantânea** de uma partícula em **movimento retilíneo**...

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

... é igual ao limite da velocidade x média da partícula à medida que o intervalo de tempo aproxima-se de zero...

... e é igual à taxa de variação instantânea da coordenada x da partícula.



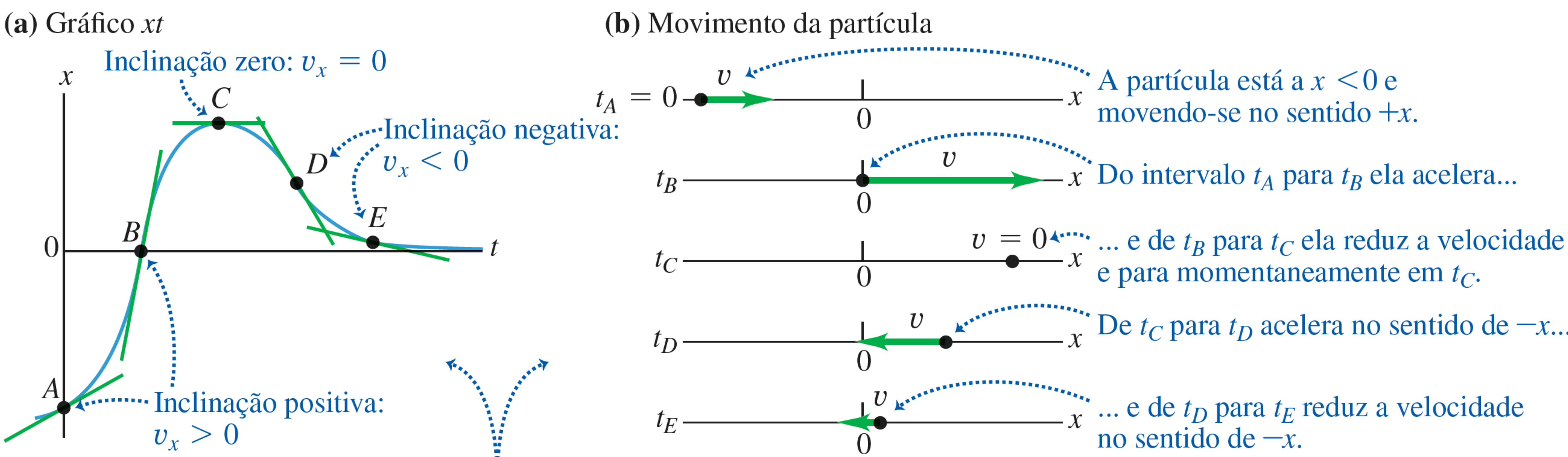
Enquanto a velocidade média v_{mx} é calculada em intervalos de tempo cada vez menores...

... seu valor $v_{mx} = \Delta x/\Delta t$ tende para o valor da velocidade instantânea.

A velocidade instantânea v_x em qualquer dado ponto é igual à inclinação da tangente da curva xt nesse ponto.

A importância de se conhecer a velocidade instantânea de um corpo quando seu movimento não é uniforme

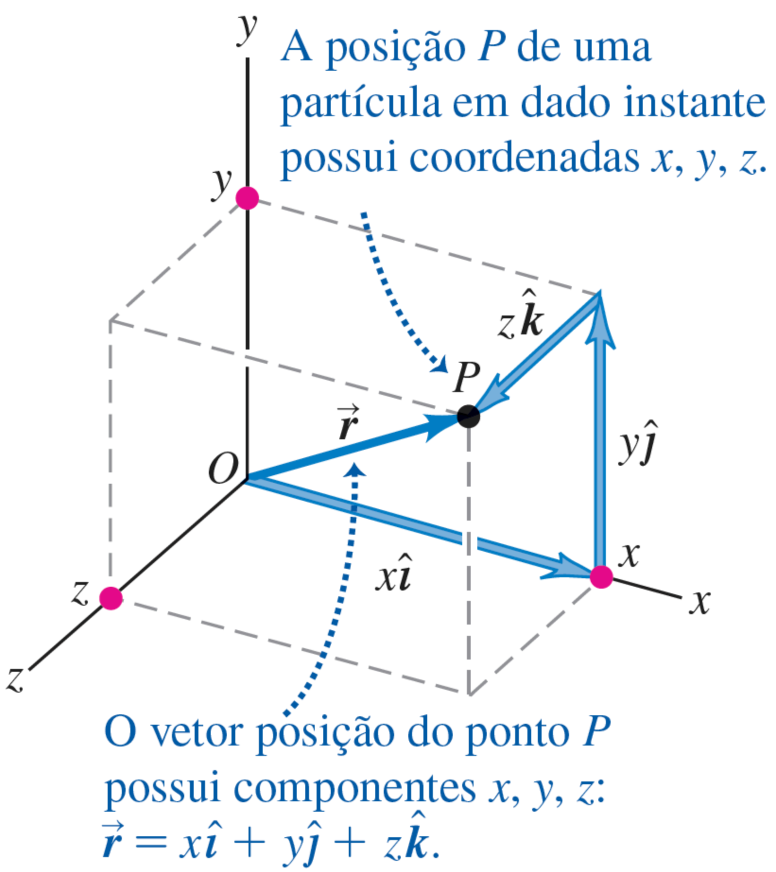
- **A velocidade instantânea fornece uma informação mais precisa, com relação à velocidade média, sobre o movimento do corpo**



• Em um gráfico xt, a inclinação da tangente em qualquer ponto é igual à velocidade da partícula nesse ponto.
• Quanto maior a inclinação (positiva ou negativa) do gráfico xt de um objeto, maior a velocidade desse objeto no sentido positivo ou negativo de x.

Definição do vetor velocidade média de um corpo

- **O vetor velocidade média de um corpo é definido em termos do vetor posição**



Vetor posição de uma partícula em dado instante...

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Coordenadas da posição da partícula

Vetores unitários nas direções dos eixos Ox, Oy e Oz

Vetor velocidade média de uma partícula durante um intervalo de tempo de t_1 a t_2

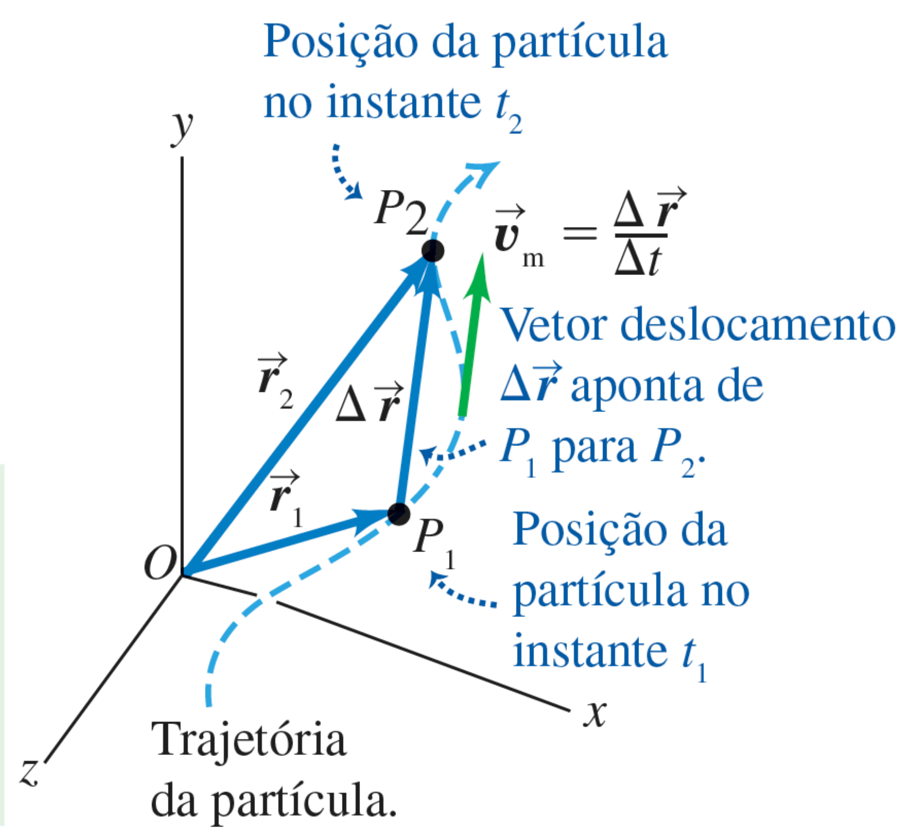
Mudança no vetor posição da partícula

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

Posição final menos a posição inicial

Intervalo de tempo

Tempo final menos o tempo inicial

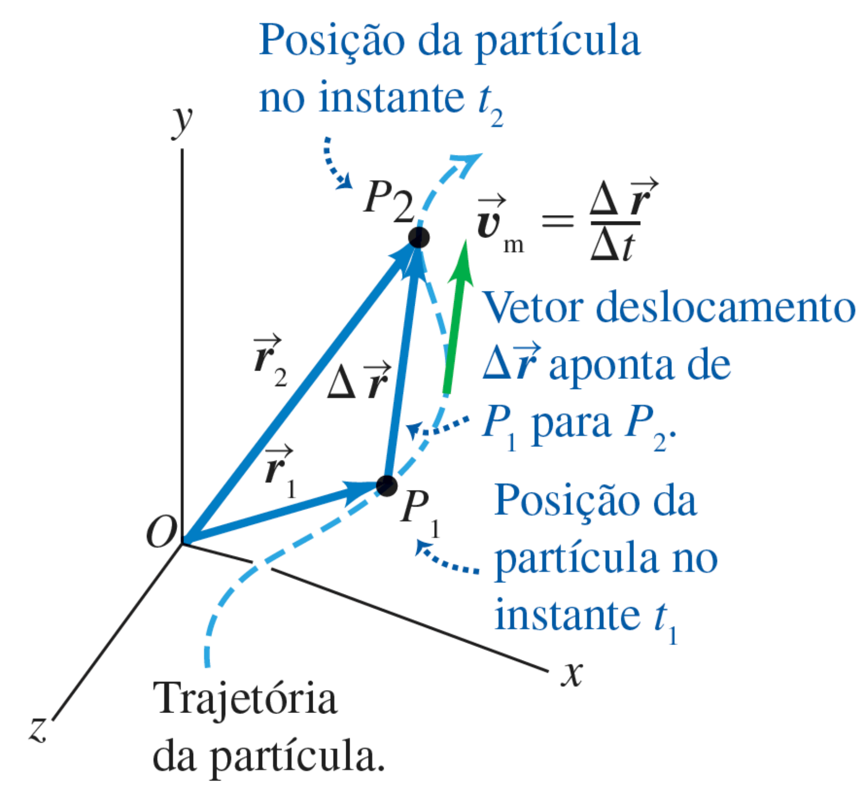


Exemplo: Calcule o vetor velocidade média

- **Dados dois vetores posição**

$$\vec{\mathbf{r}}_1 = (2{,}0\ m)\ \hat{\mathbf{i}} + (0{,}0\ m)\ \hat{\mathbf{j}}$$
$$\vec{\mathbf{r}}_2 = (1{,}0\ m)\ \hat{\mathbf{i}} + (2{,}2\ m)\ \hat{\mathbf{j}}$$

correspondentes às posições de um objeto respectivos instantes $t_1 = 1{,}0$ s **e** $t_2 = 3{,}0$ s, **calcule a velocidade média**



$$\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1 = (1{,}0\ m - 2{,}0\ m)\ \hat{\mathbf{i}} + (2{,}2\ m - 0{,}0\ m)\ \hat{\mathbf{j}} = (-1{,}0\ m)\ \hat{\mathbf{i}} + (2{,}2\ m)\ \hat{\mathbf{j}}$$

$$\Delta t = 3{,}0\ \text{s} - 1{,}0\ \text{s} = 2{,}0\ \text{s}$$

$$\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{m}} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{(-1{,}0\ m)\ \hat{\mathbf{i}} + (2{,}2\ m)\ \hat{\mathbf{j}}}{2{,}0\ \text{s}} = \left(-0{,}50\ \frac{m}{s}\right)\ \hat{\mathbf{i}} + \left(1{,}1\ \frac{m}{s}\right)\ \hat{\mathbf{j}}$$

$$|\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{m}}| = \sqrt{\left(-0{,}50\ \frac{m}{s}\right)^2 + \left(1{,}1\ \frac{m}{s}\right)^2} = 1{,}2\ \frac{m}{s}$$

Definição do vetor velocidade instantânea de um corpo

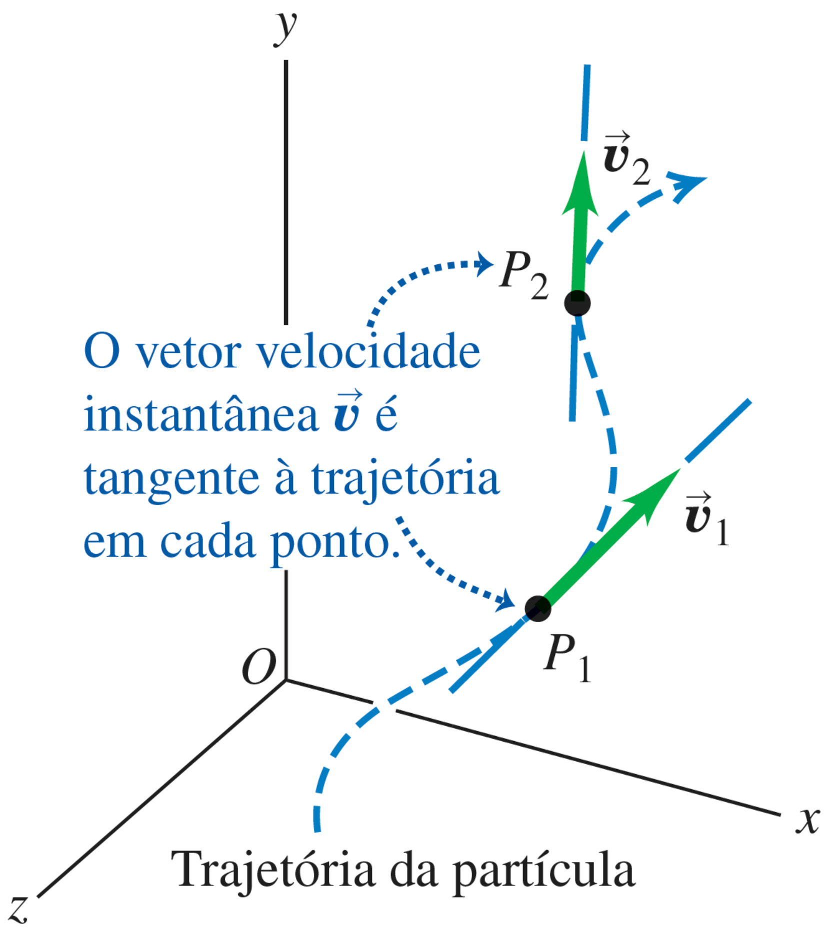
- **O vetor velocidade instantânea de um corpo fornece a direção do movimento da partícula a cada instante**

O vetor **velocidade instantânea** de uma partícula...

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

...é igual ao limite de seu vetor velocidade média quando o intervalo de tempo se aproxima de zero...

...e se iguala à taxa instantânea de mudança do seu vetor posição.

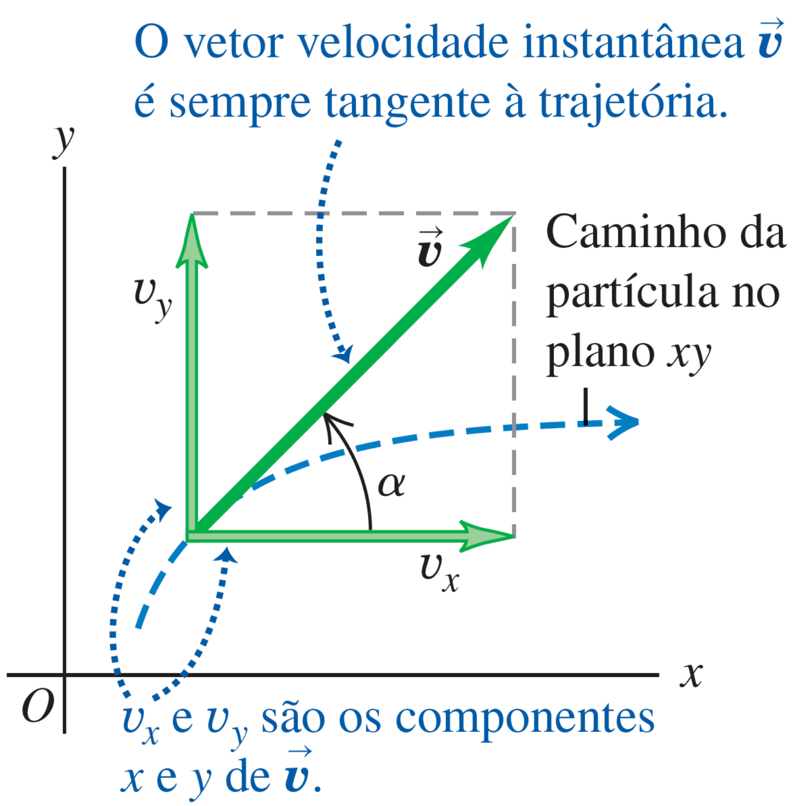


Note que o vetor velocidade instantânea é tangente à trajetória em cada um dos seus pontos

Os componentes do vetor velocidade instantânea

- **Decompondo o vetor velocidade instantânea em seus componentes temos**

$$\vec{\mathbf{v}} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}\right) = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{k}}$$



Cada **componente** de um **vetor velocidade instantânea** de uma partícula...

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

...é igual às variações de suas coordenadas correspondentes.

$$v = |\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \qquad \tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

****Note que como os versores $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$ não dependem do tempo, suas derivadas são nulas***

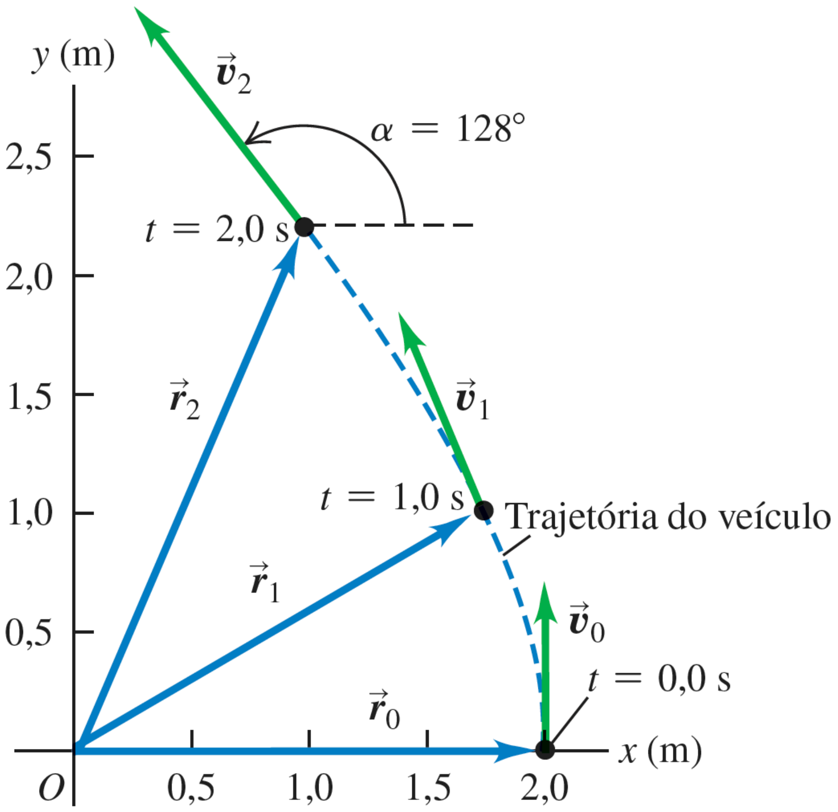
A partir de agora, sempre que mencionarmos a palavra "velocidade", queremos nos referir ao vetor velocidade instantânea, e não ao vetor velocidade média

Exemplo: Calcule o vetor velocidade instantânea

- **Um veículo robótico está explorando a superfície de Marte e suas coordenadas x e y, com relação ao módulo de aterrisagem, são**

$$x\,(t) = 2{,}0\ m - \left(0{,}25\ m/s^2\right) t^2$$

$$y\,(t) = (1{,}0\ m/s)\,t + \left(0{,}025\ m/s^3\right) t^3$$



- **Calcule as coordenadas do veículo e sua distância ao módulo de aterrisagem em $t = 2{,}0\ s$**

$$x\,(t = 2{,}0\ s) = 2{,}0\ m - \left(0{,}25\ m/\cancel{s^2}\right)(2{,}0\ \cancel{s})^2 = 1{,}0\ m$$

$$y\,(t = 2{,}0\ s) = (1{,}0\ m/\cancel{s})\,(2{,}0\ \cancel{s}) + \left(0{,}025\ m/\cancel{s^3}\right)(2{,}0\ \cancel{s})^3 = 2{,}2\ m$$

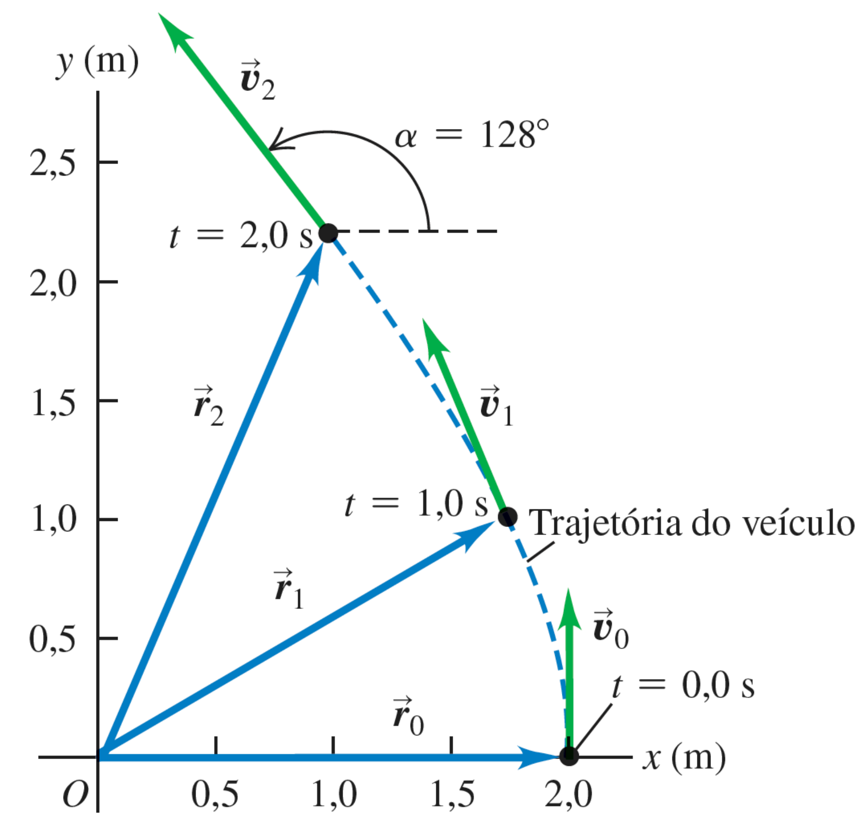
$$d\,(t = 2{,}0\ s) = \sqrt{(1{,}0\ m)^2 + (2{,}2\ m)^2} = 2{,}4\ m$$

Exemplo: Calcule o vetor velocidade instantânea

- **Um veículo robótico está explorando a superfície de Marte e suas coordenadas x e y, com relação ao módulo de aterrisagem, são**

$$x(t) = 2{,}0\ m - \left(0{,}25\ m/s^2\right) t^2$$

$$y(t) = (1{,}0\ m/s)\, t + \left(0{,}025\ m/s^3\right) t^3$$



- **Calcule o vetor deslocamento e o vetor velocidade média entre $t = 0{,}0\ s$ e $t = 2{,}0\ s$**

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = x(t)\ \hat{\mathbf{i}} + y(t)\ \hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \left[2{,}0\ m - \left(0{,}25\ m/s^2\right) t^2\right] \hat{\mathbf{i}} + \left[(1{,}0\ m/s)\, t + \left(0{,}025\ m/s^3\right) t^3\right] \hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\mathbf{r}}(t = 0{,}0\ s) = \vec{\mathbf{r}}_0 = (2{,}0\ m)\, \hat{\mathbf{i}} + (0{,}0\ m/s)\, \hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\mathbf{r}}(t = 2{,}0\ s) = \vec{\mathbf{r}}_2 = (1{,}0\ m)\, \hat{\mathbf{i}} + (2{,}2\ m/s)\, \hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{m}} = \frac{\Delta \vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \left(-0{,}50\ \frac{m}{s}\right) \hat{\mathbf{i}} + \left(1{,}1\ \frac{m}{s}\right) \hat{\mathbf{j}}$$

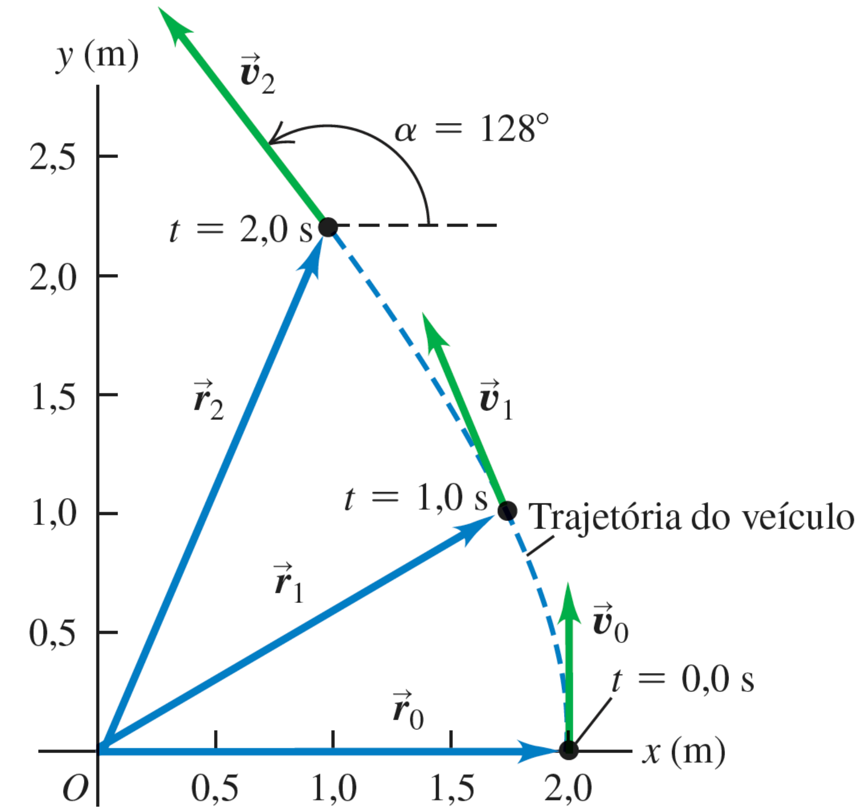
$$\Delta \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_0 = (-1{,}0\ m)\ \hat{\mathbf{i}} + (2{,}2\ m)\ \hat{\mathbf{j}}$$

Exemplo: Calcule o vetor velocidade instantânea

- **Um veículo robótico está explorando a superfície de Marte e suas coordenadas x e y, com relação ao módulo de aterrisagem, são**

$$x(t) = 2{,}0\ m - \left(0{,}25\ m/s^2\right) t^2$$

$$y(t) = (1{,}0\ m/s)\,t + \left(0{,}025\ m/s^3\right) t^3$$



- **Deduza uma expressão geral para o vetor velocidade instantânea e encontre** $\vec{\mathbf{v}}_2 = \vec{\mathbf{v}}\,(t = 2{,}0\ s)$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \left(-0{,}25\ m/s^2\right)(2t) = \left(-0{,}5\ m/s^2\right) t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 1{,}0\ m/s + \left(0{,}025\ m/s^3\right)\left(3t^2\right) = 1{,}0\ m/s + \left(0{,}075\ m/s^3\right) t^2$$

$$\vec{\mathbf{v}}\,(t) = v_x(t)\,\hat{\mathbf{i}} + v_y(t)\,\hat{\mathbf{j}} = \left(-0{,}5\ m/s^2\right) t\,\hat{\mathbf{i}} + \left[1{,}0\ m/s + \left(0{,}075\ m/s^3\right) t^2\right]\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\mathbf{v}}\,(t = 2{,}0\ s) = \vec{\mathbf{v}}_2 = (-1{,}0\ m/s)\,\hat{\mathbf{i}} + (1{,}3\ m/s)\,\hat{\mathbf{j}} \qquad \arctan\frac{v_y}{v_x} = -\,52^{\circ} \qquad \alpha = 180^{\circ} - 52^{\circ} = 128^{\circ}$$

Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- Velocidade média e velocidade instantânea
- Aceleração média e aceleração instantânea
- Exercícios de Fixação

Definição do vetor aceleração média de um corpo

- **O vetor aceleração média de um corpo é definido em termos do vetor velocidade instantânea**

Vetor aceleração média de uma partícula durante o intervalo de t_1 a t_2

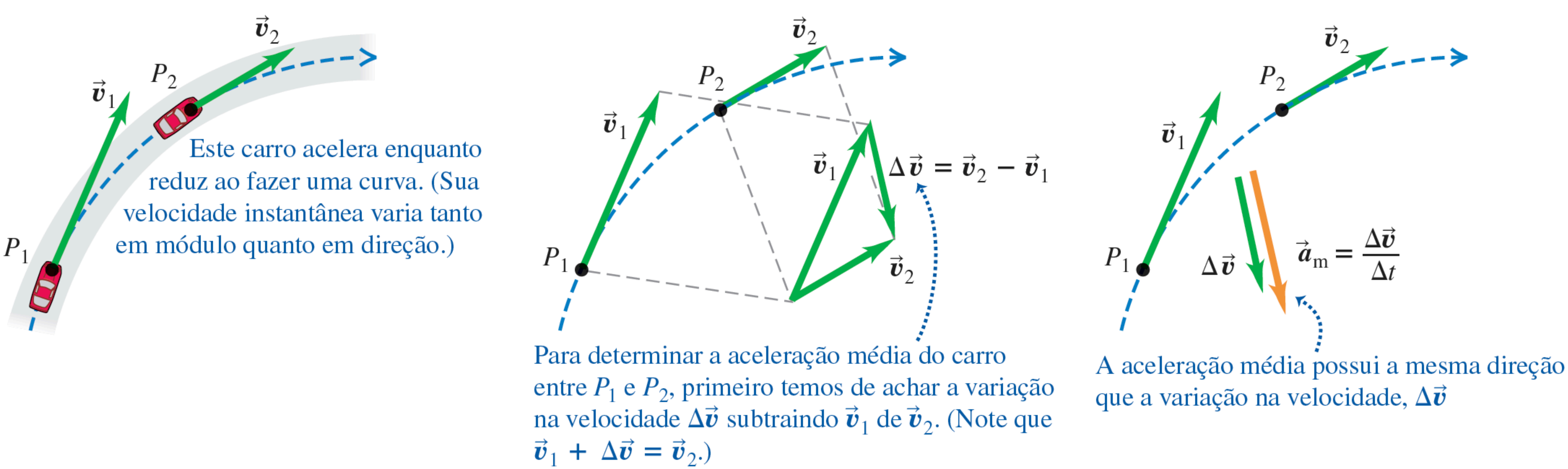
Variação na velocidade da partícula

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Velocidade final menos a inicial

Intervalo de tempo

Tempo final menos o inicial



Definição do vetor aceleração instantânea de um corpo

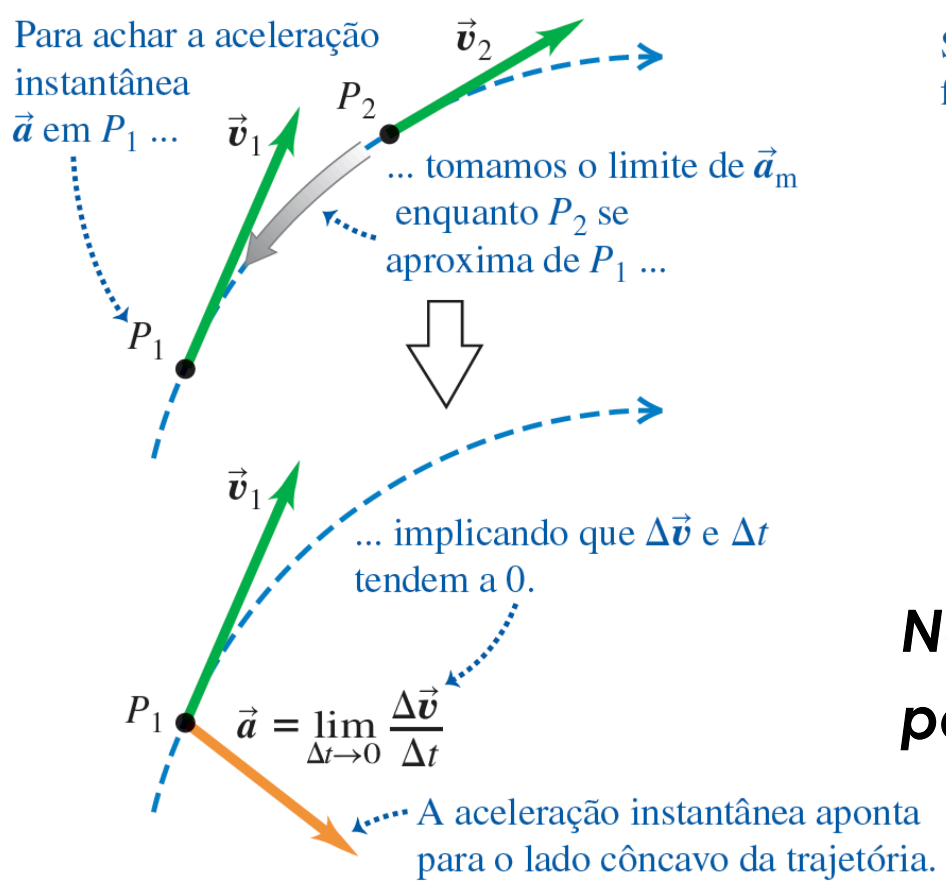
- **A aceleração instantânea fornece uma informação mais precisa, com relação à aceleração média, sobre o movimento do corpo**

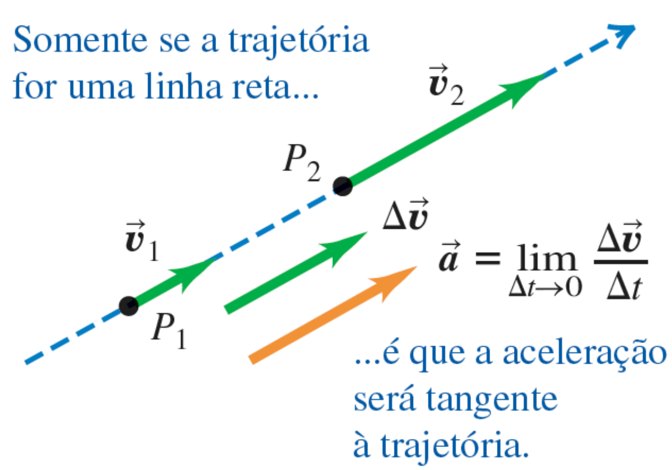
O **vetor aceleração instantânea** de uma partícula...

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

...é igual ao limite de seu vetor aceleração média quando o intervalo se aproxima de zero...

...e é igual à taxa de variação de seu vetor velocidade instantânea.





Note que o vetor aceleração instantânea aponta para o centro de curvatura local da trajetória

Os componentes do vetor aceleração instantânea

- **Decompondo o vetor velocidade instantânea em seus componentes temos**

$$\vec{\mathbf{a}} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}}\right) = \frac{dv_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z}{dt}\hat{\mathbf{k}}$$

Cada **componente do vetor aceleração instantânea** da partícula...

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

...é igual à taxa de variação instantânea dos seus componentes de velocidade correspondentes.

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)\hat{\mathbf{i}} + \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\hat{\mathbf{j}} + \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right)\hat{\mathbf{k}} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\mathbf{j}} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{\mathbf{k}}$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad a_z = \frac{d^2z}{dt^2} \qquad\qquad a = |\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Note, novamente, que como os versores $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$ não dependem do tempo, suas derivadas são nulas

Exemplo: Calcule o vetor aceleração instantânea e média

- **No exemplo anterior sobre o veículo robótico explorando a superfície de Marte, encontramos que a velocidade instantânea é**

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \left(-0{,}5\ m/s^2\right) t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 1{,}0\ m/s + \left(0{,}075\ m/s^3\right) t^2$$

- **Calcule os componentes do vetor aceleração média entre $t = 0{,}0\ s$ e $t = 2{,}0\ s$**
  - *Para* $t = 0{,}0\ s$ *Para* $t = 2{,}0\ s$

$v_{x,1} = 0{,}0\ m/s \qquad v_{y,1} = 1{,}0\ m/s \qquad v_{x,2} = -\ 1{,}0\ m/s \qquad v_{y,2} = 1{,}3\ m/s$

$$a_{mx} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{x,2} - v_{x,1}}{t_2 - t_1} = -\ 0{,}5\ m/s^2$$

$$a_{my} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{v_{y,2} - v_{y,1}}{t_2 - t_1} = 0{,}15\ m/s^2$$

Exemplo: Calcule o vetor aceleração instantânea e média

- **No exemplo anterior sobre o veículo robótico explorando a superfície de Marte, encontramos que a velocidade instantânea é**

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \left(-0{,}5\ m/s^2\right) t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 1{,}0\ m/s + \left(0{,}075\ m/s^3\right) t^2$$

- **Calcule o vetor aceleração instantânea e seu módulo em** $t = 2{,}0\ s$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\ 0{,}5\ m/s^2 \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \left(0{,}15\ m/s^3\right) t$$

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} = a_x\,\hat{\mathbf{i}} + a_y\,\hat{\mathbf{j}} = \left(-0{,}5\ m/s^2\right)\ \hat{\mathbf{i}} + \left(0{,}15\ m/s^3\right) t\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}_{\mathbf{2}} = \overrightarrow{\mathbf{a}}\,(t = 2{,}0\ s) = \left(-0{,}5\ m/s^2\right)\ \hat{\mathbf{i}} + \left(0{,}3\ m/s^2\right)\ \hat{\mathbf{j}}$$

$$a_2 = |\,\overrightarrow{\mathbf{a}}_{\mathbf{2}}| = \sqrt{\left(-0{,}5\ m/s^2\right)^2 + \left(0{,}3\ m/s^2\right)^2} = 0{,}58\ m/s^2$$

Exercícios de fixação

- **Ler e fazer todos os exemplos do capítulo 2 da seção 2.1 até a seção 2.3**
  - *Exercícios seção 2.1: 2.6*
  - *Exercícios seção 2.2: 2.7, 2.8, 2.9, 2.10 e 2.11*
  - *Exercícios seção 2.3: 2.12, 2.13, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17 e 2.18*
- **Ler e fazer todos os exemplos do capítulos 3 da seção 3.1 até a seção 3.2**
  - *Exercícios seção 3.1: 3.3 e 3.4*
  - *Exercícios seção 3.2: 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8*