

VIII. Desigualdades e Inequações

A. Introdução

Um procedimento usado com frequência na resolução de problemas de física consiste em montar as equações correspondentes à aplicação das leis físicas ao sistema, de modo a incorporar os dados do problema, e procurar a grandeza desejada por meio da solução dessas equações. Quando a expressão resultante é uma *igualdade*, dizemos que construímos uma **equação**, com as quais lidamos no capítulo III. No entanto, há situações que se baseiam em *desigualdades*, como por exemplo no caso da intensidade da força de atrito estática, F_e , que segue à lei

$$F_e \leq \mu N \tag{VIII.1}$$

em que μ é o coeficiente de atrito estático e N , o módulo da força normal.

Uma relação como essa não permite determinar os valores das grandezas envolvidas, de modo que precisam existir outras condições para encontrá-las. Por exemplo, considere um bloco de massa m que está sobre uma mesa horizontal, e que o coeficiente de atrito com a superfície, μ , é desconhecido. Se o bloco está sendo empurrado por uma força F , horizontal, e ele não se move, então

$$F - F_e = 0 \rightarrow F_e = F \tag{VIII.2}$$

Como o bloco também não acelera na direção vertical, a força normal N pode ser determinada a partir da relação

$$N - mg = 0 \rightarrow N = mg \tag{VIII.3}$$

em que g é a aceleração local da gravidade. Substituindo esses dois resultados na equação (VIII.1), obtemos

$$F \leq \mu m g \tag{VIII.4}$$

A expressão (VIII.4) é uma **inequação**, que retrata o fato do bloco não se mover com a força F ; é uma relação de desigualdade entre grandezas, das quais ao menos uma é desconhecida. Podemos resolver essa inequação para o coeficiente de atrito, isolando-o em um membro da inequação:

$$\mu \geq \frac{F}{mg} \tag{VIII.5}$$

Essa *desigualdade* define o valor *mínimo* do coeficiente de atrito que permite manter o sistema parado.

B. Desigualdades

Uma desigualdade é uma relação de qualidade: uma das grandezas é maior ou menor que a outra, ou mesmo simplesmente as grandezas são diferentes. Dados dois números reais x e a , a grande maioria das desigualdades pode ser reduzida a uma ou várias desigualdades, dentro de cinco tipos básicos, exibidos na figura 1 abaixo tanto na forma analítica quanto gráfica.

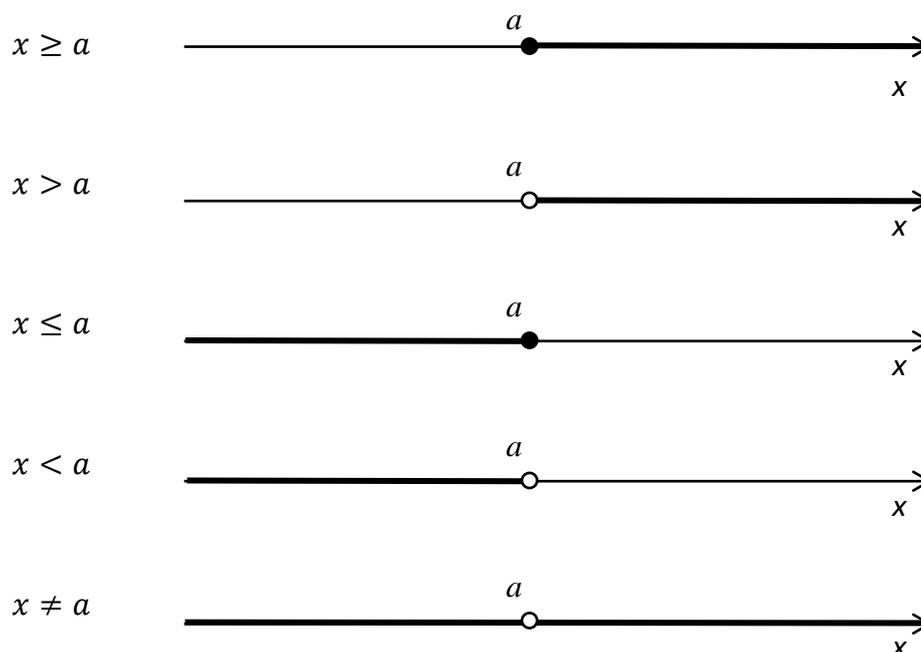


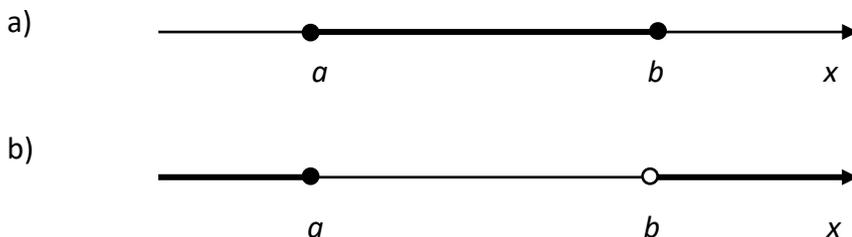
Figura 1. Cinco tipos básicos de desigualdades. Do lado esquerdo da figura está a forma analítica, que pode ser representada pelo gráfico à direita, em que a linha é grossa nos valores que satisfazem a desigualdade. Note que, para o ponto extremo, a , a igualdade corresponde a marcá-lo com bola cheia e a desigualdade, com bola vazia.

Duas desigualdades podem ser escritas como uma única expressão. Por exemplo, o conjunto de duas desigualdades, $\{x < b ; x > a\}$ pode ser representado $a < x < b$, se $a < b$, e corresponde ao conjunto vazio, se $a \geq b$. A representação gráfica dessa desigualdade, no padrão da figura 1, é bastante intuitiva, mas vamos exercitá-la nas questões 1 e 2 abaixo.

Questão 1. Represente graficamente as seguintes desigualdades ou conjunto de desigualdades, considerando que $a < b$:

- a) $a < x < b$
- b) $a \leq x < b$
- c) $x < a$ ou $x \geq b$

Questão 2. Represente analiticamente as regiões demarcadas nos itens abaixo.



C. Inequações e desigualdades

1. Um exemplo de inequação e da sua solução

Uma desigualdade dá origem a uma inequação toda vez que o valor de ao menos um dos elementos for desconhecido. Por exemplo, a fim de indicar que um número somado com o número 2 dá um número maior que 5, pode-se escrever a fórmula

$$x + 2 > 5 \text{ (ler "x mais 2 é maior que 5")}$$

em que x indica o número de interesse. Essa expressão matemática traduz a **desigualdade** desejada. O valor $x = 4$ satisfaz essa desigualdade, mas existem outros e, normalmente, desejamos conhecer o conjunto todo de soluções. Para isso, encaramos x como uma incógnita, situação em que a fórmula acima representa uma **inequação**.

Resolver uma inequação consiste em determinar os valores da incógnita (ou incógnitas) que a satisfaz. Na prática, recorre-se a algumas propriedades que permitem adicionar ou subtrair a mesma quantidade aos dois membros da inequação ou, ainda, multiplicar ou dividir ambos os membros pela mesma quantidade positiva sem que isso altere o sentido da desigualdade. Por exemplo, a inequação $x + 2 > 5$ pode ser escrita na forma $x + 2 - 2 > 5 - 2$, ou seja, $x > 3$, que é o conjunto-solução da inequação. Comparando com a resolução de equações, é necessário um cuidado adicional: nas etapas intermediárias da solução, caso ambos os membros forem multiplicados ou divididos por uma grandeza negativa, é preciso **trocar o sentido** da desigualdade para manter-se a equivalência. Por exemplo, na desigualdade $5 > 3$, se multiplicarmos ambos os membros pelo número negativo -2 e esquecermos de inverter a desigualdade, obteremos erroneamente $5 \times (-2) > 3 \times (-2)$, ou seja, $-10 > -6$, o que é uma proposição falsa. Para a desigualdade se manter válida, temos que inverter o sentido da desigualdade e, aí sim, obteremos $-10 < -6$, o que é verdade.

2. Uma definição de inequação

Quando comparamos dois números reais a e b , somente uma das três afirmações é verdadeira:

- $a < b$
- $a = b$
- $a > b$.

Se a e b forem distintos, dizemos que $a < b$ ou $a > b$ e que existe uma desigualdade entre eles; esse par de desigualdades também pode ser escrita numa única desigualdade na forma $a \neq b$.

Exemplos de desigualdades verdadeiras:

4 é menor que 7: $4 < 7$

23 é maior que 11: $23 > 11$

- 10 é menor que 0: $-10 < 0$

Quando temos uma grandeza algébrica cujo valor não conhecemos no momento, a sentença é aberta. Exemplos:

O dobro de um número é maior que 8: $2x > 8$

O consecutivo do triplo de um número é maior que 12: $3x + 1 > 12$

As sentenças abertas são denominadas inequações:

Inequação é uma sentença aberta expressa por uma desigualdade entre duas expressões algébricas.

A letra x em cada uma das desigualdades é chamada de variável, e cada expressão algébrica é um membro da inequação. O membro da direita é chamado de primeiro membro e o da esquerda, de segundo.

D. Propriedades da desigualdade:

1. A desigualdade não se altera ao adicionar ou subtrair o mesmo valor de ambos os membros

Se $b > a$, então adicionando um mesmo valor a cada um dos membros a desigualdade segue válida, ou seja, se é verdade que $b > a$, então $b + c > a + c$ também é verdade. Um exemplo direto, partindo da sentença verdadeira $7 > 4$: se adicionamos 2 unidades a cada um dos membros, a desigualdade permanece verdadeira, $7 + 2 > 4 + 2$. Se subtrairmos uma constante de cada um dos membros, ocorre o mesmo. Esta propriedade vale para todos os tipos de desigualdades ($>$, $<$, \neq , etc.).

2. A desigualdade não se altera quando ambos os membros são multiplicados ou divididos por uma grandeza **positiva**.

Para um exemplo direto, considere que $6 > 4$; se multiplicamos ambos os membros por 3, $6 \cdot 3 > 4 \cdot 3$, assim como podemos dividir por 2, obtendo $\frac{6}{2} > \frac{4}{2}$.

3. Uma desigualdade **muda** de sentido quando ambos os membros são multiplicados ou divididos por uma grandeza **negativa**.

De novo, no mesmo exemplo anterior, $6 > 4$, mas, multiplicando por -2 , teremos: $6 \cdot (-2) < 4 \cdot (-2)$ pois $-12 < -8$.

E. Resolução de inequações de primeiro grau

Chamamos inequação do primeiro grau aquela em que a variável que se deseja isolar aparece como uma potência de primeiro grau.

Resolve-se uma inequação usando as mesmas estratégias de isolamento da incógnita de uma equação, com uma única e importante diferença: quando multiplicamos ou dividimos por um número negativo, é preciso inverter o sentido da desigualdade. Nesse caso e só nesse caso, a desigualdade muda de sentido, conforme as propriedades 1 a 3 enunciadas na seção anterior. Por exemplo, $3x + 5 > 2x - 10 \Rightarrow 3x - 2x > -10 - 5 \Rightarrow x > -15$.

Duas inequações são denominadas simultâneas quando admitem soluções que as satisfaçam simultaneamente.

Duas ou mais inequações simultâneas formam um **sistema de inequações**.

Ex.

$$\begin{cases} 5x + 4 > 2x - 7 \\ 4x - 5 < 5x + 2 \end{cases}$$

Resolvendo a primeira inequação:

$$5x + 4 > 2x - 7 \Rightarrow 5x - 2x > -7 - 4 \Rightarrow 3x > -11 \Rightarrow x > \frac{-11}{3} \Rightarrow x > -3,666$$

Resolvendo a segunda inequação:

$4x - 5 < 5x + 2 \Rightarrow 4x - 5x < 2 + 5 \Rightarrow -x < 7 \Rightarrow x > -7$, observem que invertemos o sentido da inequação porque multiplicamos ambos os lados pelo número negativo -1.

Juntando as soluções, temos que $x > \frac{-11}{3}$.

Uma boa maneira de juntar as duas inequações é montar um diagrama como o da figura 2 abaixo.

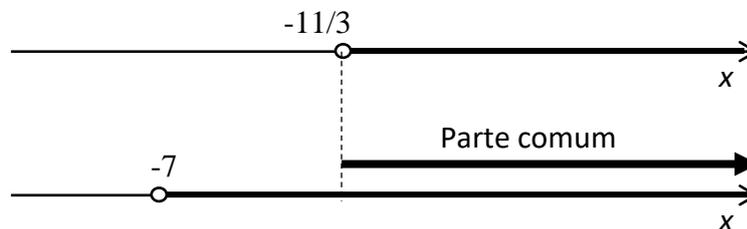


Figura 2. Diagrama que permite encontrar a parte comum da solução do sistema de inequações do texto.

Nos casos em que não existem números que sejam compatíveis ao mesmo tempo, o sistema será chamado de impossível ou incompatível e a solução será o conjunto vazio.

F. Exercícios com inequações de primeiro grau

1) Resolver as inequações, isolando x no membro esquerdo.

a) $x - 4(x - 1) > 19$

b) $3(2x - 1) \leq 5x + 7$

c) $3(x+2) > 2(2x + 4)$

d) $2(3x - 1) - 4(x + 2) \leq 5x - 1$

e) $\frac{x}{2} + 1 > \frac{5}{3} - x$

f) $x - \frac{1}{3} > \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

g) $\frac{x+2}{10} - 1 \leq \frac{1-x}{4}$

h) $\frac{x}{8} - \frac{3}{16} \geq \frac{x}{24} - \frac{2}{3}$

i) $\frac{x-1}{4} + \frac{x}{6} - \frac{x-2}{3} > 0$

j) $\frac{x+6}{3} - \frac{2x+3}{4} < \frac{x+5}{2}$

2) Determine o menor número *inteiro* que satisfaça a inequação:

$$\frac{4x-3}{5} - \frac{2x+7}{3} < 2x + 4$$

3) Subtraindo dois anos da idade de Maria e multiplicando a diferença por 7 obtém-se um número menor do que o sêxtuplo da sua idade aumentado de 8. Determine a idade de Maria, sabendo que é a maior dos valores compatível com a desigualdade obtida.

4) Resolva os sistemas de equação:

a)
$$\begin{cases} 2 - 3x < 30 - 10x \\ 3x - 1 < 4 - 2x \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x > \frac{x}{2} - 1 \\ \frac{x}{3} > x - 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \frac{3-x}{2} < 1 + \frac{5-2x}{3} \\ \frac{2x-3}{4} < \frac{x+5}{6} \end{cases}$$

G. Inequação fracionária

Uma inequação é dita fracionária quando há uma incógnita no denominador.

Sua resolução é feita de forma diferente, tendo em vista a necessidade de analisar os sinais da fração algébrica resultante.

Ex. 1: $\frac{4}{3x-1} < 0$

Como o numerador é positivo, para que esta fração seja negativa, teremos que $3x - 1 < 0$, assim, $3x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{3}$. Para esse valor que acabamos de calcular para x a fração será negativa.

Ex. 2: $\frac{-1}{2x-7} < 0$

O numerador é negativo, então para que a expressão total seja negativa o denominador deverá ter sinal oposto ao numerador, ou seja: $2x - 7 > 0$, uma vez que negativo \times positivo = negativo.

$$2x - 7 > 0 \Rightarrow 2x > 7 \Rightarrow x > \frac{7}{2}$$

Quando, em uma inequação, a desigualdade não está sendo comparada com zero, é mais prático e simples manipular a expressão para essa forma:

Ex. 3: $\frac{x+3}{x-5} > -3 \Rightarrow \frac{x+3}{x-5} + 3 > 0 \Rightarrow \frac{x+3+3(x-5)}{x-5} > 0 \Rightarrow \frac{x-3}{x-5} > 0$

Para que toda a expressão seja maior que zero precisamos que:

ambas sejam maiores que zero: $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$ e $x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5$

ou

ambas sejam menores que zero: $x < 3$ e $x < 5 \Rightarrow x < 3$

Reunindo as duas possibilidades, será verdadeira a expressão quando $x < 3$ ou $x > 5$

Questão 3. Isole x nas inequações abaixo:

1) $\frac{2}{x} > 0$

2) $\frac{3}{x+1} > 0$

3) $\frac{4x-3}{2x+1} > 0$

4) $\frac{x-4}{7-3x} - 3 \geq 1$

5) $\frac{2x-3}{x+1} < 5$

6) $\frac{5}{2x} - \frac{1}{2} \geq \frac{7}{x}$

H. Inequações do segundo grau

Uma inequação que pode ser reduzida à forma

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ ou } ax^2 + bx + c \geq 0 \tag{VIII.6}$$

é uma inequação do segundo grau.



A melhor maneira de resolver essa inequação é recorrer ao gráfico da função, que estudamos no capítulo III. Para um exemplo da conveniência do gráfico, considere a inequação

$$x^2 > x \quad (\text{VIII.7})$$

Primeiro, note que o valor 0 não satisfaz a desigualdade. Depois, é preciso considerar duas possibilidades:

Se $x > 0$, dividindo ambos os membros de (VIII.7) por x , obtemos $x > 1$.

Se $x < 0$, dividindo ambos os membros de (VIII.6) por x , obtemos $x < 1$; a intersecção das duas condições é $x < 0$.

Portanto, a solução é $\{x < 0 \text{ ou } x < 1\}$, que é mais fácil de ver do gráfico da função $y = x^2 - x$, que tem zeros em $x = 0$ e $x = 1$ e concavidade positiva.

Questão 4. Resolva a inequação $x^2 < x$.

Note que toda a vez que o discriminante da equação obtida igualando a zero o membro esquerdo de (VIII.6) for negativo, a solução será ou o conjunto todo dos valores reais, ou o conjunto vazio

Questão 5. Resolva as seguintes inequações:

- a) $x^2 - x - 2 > 0$
- b) $x^2 - x + 2 > 0$
- c) $x^2 - x + 2 < 0$
- d) $x^2 + 2x + 1 > 0$