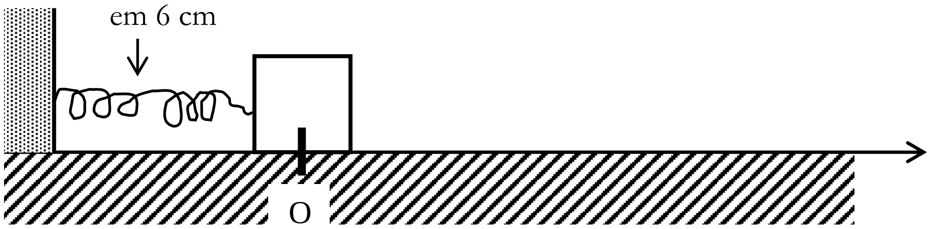
V. Módulo de um Número Real, $|x|$

A. Motivação

Um bloco com massa m = 2 kg desliza sem atrito sobre uma mesa horizontal e está preso a uma mola de constante elástica k = 5000 N/m. Inicialmente, a mola está comprimida e o bloco está parado; essa posição inicial do bloco é escolhida como origem do sistema. O bloco é, então, liberado para oscilar harmonicamente, com velocidade máxima de 3 m/s. A figura ilustra o arranjo e o sistema de referência.



Determine:

a) A energia total do sistema.
b) A posição de equilíbrio do bloco.
c) As posições do bloco em que sua energia cinética vale 5 J.

a) Como não há atrito, a energia mecânica se conserva, portanto

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 \quad \text{(V.1)}$$

em que v é a velocidade do bloco e x_0 a posição de equilíbrio. A velocidade é máxima quando a energia potencial é mínima, que corresponde ao ponto em que a compressão da mola é nula, portanto $x = x_0$ e a energia total é

$$E = \tfrac{1}{2}2 \times 3^2 + \tfrac{1}{2}k(0)^2 = 9 \text{ J}$$

b) Quando o bloco está parado, a energia total do sistema é a energia potencial da mola, portanto

$$E = U = \tfrac{1}{2}k(x - x_0)^2 = \tfrac{1}{2}5 \times 10^3(0 - x_0)^2 = 9 \text{ J} \quad \text{(V.2)}$$

$${x_0}^2 = \frac{18}{5 \times 10^3} = 36 \times 10^{-4}$$

$$|x_0| = 6 \times 10^{-2} = 0{,}06 \text{ m}$$

$$x_0 = 0{,}06 \text{ m} \quad \text{ou} \quad -x_0 = 0{,}06 \leftrightarrow x_0 = -0{,}06 \text{ m}$$

A solução $x_0 = -0{,}06$ m satisfaz a equação (V.2), mas corresponde a um ponto mais à esquerda da compressão máxima, assim é uma ***raiz espúria*** e deve ser descartada. É muito comum na solução de equações de 2º grau obter soluções fisicamente inadequadas ao problema em questão, e sempre precisamos verificar a adequação de cada uma delas. Assim, há uma única solução fisicamente aceitável,

$$x_0 = 0{,}06 \text{ m.}$$

c) Substituindo $T = 5$ J na fórmula (V.1) acima, usando que a energia total vale 9 J e chamando de x' o ponto em que a energia cinética vale 5 J,

$$9 = 5 + \frac{1}{2}k(x' - x_0)^2$$

$$16 \times 10^{-4} = (x' - x_0)^2$$

$$|x' - x_0| = 4 \times 10^{-2} = 0{,}04 \text{ m}$$

$$x' - x_0 = 0{,}04 \text{ ou } -(x' - x_0) = 0{,}04 \text{ m}$$

Substituindo o resultado do item b, $x_0 = 0{,}06$ m, chegamos às soluções:

$$x' = 0{,}10 \text{ ou } x' = 0{,}02 \text{ m}$$

Neste caso, ambas as soluções são aceitáveis.

A função módulo foi usada duas vezes neste exercício, com consequências distintas. Numa, uma raiz da equação foi descartada, enquanto noutra ambas as raízes foram usadas. É muito comum tomar a decisão de aceitar ou não uma solução sem mencionar o raciocínio por trás dessa decisão ou, pior, esquecer de raciocinar acerca da viabilidade ou não da solução, o que dificulta a revisão do problema, pode conduzir a erros e dificulta a compreensão de quem estuda a solução. Noutras palavras, a clareza e a completeza na explicação da solução vão definir se ela será entendida, aceita e usada por quem precisa dela.

Este capítulo trata da matemática dessa função módulo.

B. Definição

O conceito de módulo de um número real está associado à ideia de distância de um ponto à origem de uma reta orientada, quando a grandeza não é definida positiva. Uma coordenada pode ser representada por um número negativo ou positivo, mas a distância em relação à origem será sempre representada por um número igual ou maior que zero, ou seja, um número semi-definido positivo.

Matematicamente, essa ideia é expressa da seguinte maneira:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad \text{(V.3)}$$

Na Figura **1**, o sistema de referência foi orientado para a direita. As flechas que indicam as coordenadas +6 e -6 estão orientadas para lados opostos, mas têm mesmo tamanho, que é proporcional à **distância** entre o ponto e a origem. Essa figura procura mostrar como a equação (V.3) funciona – o módulo serve para representar grandezas definidas pelo tamanho e não dependam de orientação.

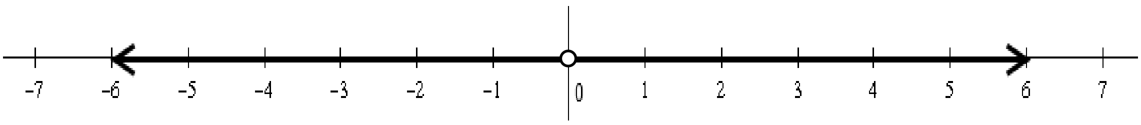


Figura 1. Reta orientada, mostrando que há duas coordenadas que têm a mesma distância à origem. O módulo da coordenada representa essa grandeza semi-definida positiva, que é a distância.

Na Figura **1**, aplicando (V.3),

$$\text{para } x = 6 \rightarrow |6| = 6$$

$$\text{para } x = -6 \rightarrow |-6| = -(-6) = 6$$

Assim, os **módulos** das duas coordenadas, 6 e -6, são idênticos.

O gráfico da função $y = |x|$ está na Figura 2, junto com o gráfico da função $y = x$.

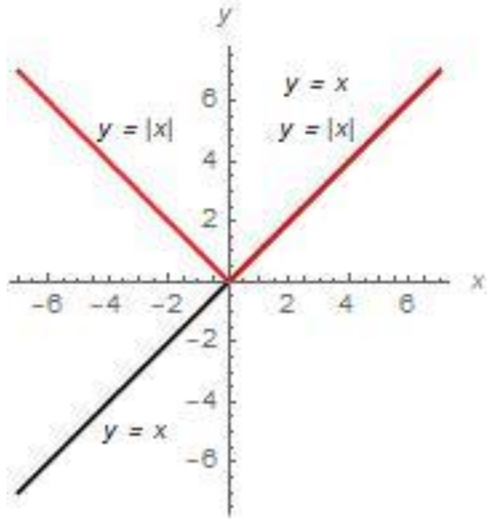


Figura 2. Em vermelho, gráfico da função $\boldsymbol{y = |x|}$, que é uma função par, isto é, tem o mesmo valor para x e $-x$. Note que o gráfico coincide com o de $\boldsymbol{y = x}$ para $\boldsymbol{x > 0}$ e de $\boldsymbol{y = -x}$ para $\boldsymbol{x < 0}$.

A raiz quadrada de um quadrado é um caso importante de aplicação do módulo, sobre o qual há uma convenção. **Define-se**

$$\sqrt{x^2} = |x| \qquad \text{(V.4)}$$

uma grandeza definida positiva, mas note que a equação do 2º grau,

$$x^2 = 16$$

admite duas soluções, $x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$. Assim, é uma **convenção** que o sinal que fica de fora da raiz na equação (V.4) é positivo, e a escolha que **todos** fazem é deixar implícito que o sinal é +. Quando for necessário usar a raiz negativa de x^2, deve-se escrever

$$-\sqrt{x^2}$$

Note como fica essa **convenção** com números:

$\sqrt{16} = 4$ e $-\sqrt{16} = -4$

ou seja, **convencionamos** que o sinal da raiz de um número fica sempre fora da raiz: $\sqrt{16}$ **não** tem sinal mal definido, embora tanto 4 quanto -4 ao quadrado dêem 16.

Questão 1. Calcule:

a) $\lvert -4 \rvert$	g) $\lvert -2 \cdot (6) \rvert$
b) $\lvert 7 \rvert$	h) $\lvert a \cdot b \rvert$
c) $\lvert a \rvert$	i) $\left\lvert \frac{-3}{4} \right\rvert$
d) $\lvert 2 \cdot (-5) \rvert$	j) $\left\lvert \frac{100}{-5} \right\rvert$
e) $\lvert 3 \cdot (-4) \rvert$	k) $\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert$
f) $\lvert -2 \cdot (-6) \rvert$	l) $\lvert (-2) \cdot (6)^{-1} \rvert$

C. Equações com módulo

Uma equação em que se procura o módulo de uma incógnita ou de uma grandeza algébrica corresponde a duas equações sem esse módulo. Por exemplo, a fim de resolver a equação

$$|3 - x| = 6$$

desdobramos o módulo

$$|3-x| = \begin{cases} (3-x) & \text{se} \quad x \le 3 \\ -(3-x) & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$$

Assim, para $x < 3$:

$3 - x = 6 \rightarrow x = -3$

e, para $x > 3$

$-3 + x = 6 \rightarrow x = 9$

Portanto, a equação $|3 - x| = 6$ tem duas soluções, -3 e 9, como pode ser verificado por substituição.

Questão 2. Determine as soluções de cada uma das equações abaixo.

a) $|5-3x| = 4$

b) $|12+2x| = 4$

c) $|5-3x| = |3x+17|$

d) $|x| + |x-3| = 5$

e) $|2x-3| = |4x+5|$

f) $\left|\dfrac{1-x}{4}\right| = 6$

g) $\left|\dfrac{x-2}{3}\right| = 5$

h) $\dfrac{|2x-3|}{|4x+5|} = 1$

Questão 3. Faça o gráfico de

a) $y = |x-5|$

b) $y = |x^3|$

D. Definindo intervalos com a função módulo

Um dos usos da função módulo é descrever intervalos de maneira compacta. Por exemplo, a expressão

$$|x| < 7\,, x \in \mathbb{R}$$

define o intervalo $-7 < x < 7$ ou $x \in]-7; 7[$ e

$$|x| > 7\,, x \in \mathbb{R}$$

define o par de intervalos desconexos, $x < -7$ e $x > 7$.

O módulo também pode ser aplicado a uma expressão do tipo $a - b$, com *a* e *b* números reais: $|a - b|$. Nesses casos, devemos substituir toda a expressão dentro das barras verticais por x e aplicar (V.3):

$$|a - b| = \begin{cases} a - b & \text{se} \quad a \geq b \\ b - a & \text{se} \quad b > a \end{cases}$$

Questão 4. Nos intervalos abaixo, as grandezas x e a são números reais, com $a > 0$.

Escreva na forma de desigualdade(s):

a) $|x - 7| < 2$

b) $|x - 2| < 7$

c) $|x - 7| > 2$

d) $|x - 2| > 7$

e) $|x - a| < 2$,

f) $|x + a| < 2$

g) $|x - a| > a$

h) $|x - a| < 2a$

i) $|x - 2| < a$

j) $|x| < -a$

E. Propriedades

i. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

ii. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} = |a| \cdot |b|^{-1}$

iii. dado $\alpha > 0$, $|x| > \alpha$ se, e somente se, $x > \alpha$ ou $x < -\alpha$

iv. $|-a + b|$ pode ser igual ou diferente de $|-a| + |b|$ – depende dos sinais de a e de b.

F. Exercícios

1. Calcule os possíveis valores de *y* se ele é $y = \frac{|x-1|}{x-1}$, com $x \neq 1$, e discrimine o conjunto de *x* que dá cada resultado.

2. Simplifique

a) $\dfrac{|x-3|}{x-3}$, sendo $x < 3$

b) $\dfrac{|x|}{x}+\dfrac{|x-4|}{x-4}$, com $0 < x < 4$

c) $1+\dfrac{|x-2|}{x-2}$, com $x > 2$

3. Mostre graficamente que a equação da forma

$$|x-a| = b$$

em que x, a, e b são números reais, tem:

a) Duas soluções, se $b > 0$

b) Uma solução, se $a = 0$ e $b = 0$

c) Não tem solução, se $b < 0$

4. Faça o gráfico de $y = |x^2 - 2x - 8|$, no intervalo $|x| < 5$.