

IV. Fatoração Algébrica

A. Motivação

1. Enunciado do problema

Considere uma colisão elástica unidimensional entre dois objetos A e B, de massas conhecidas. Até o instante da colisão, B está parado e A tem velocidade v_A , também conhecida. A questão de interesse aqui é determinar como a velocidade de B imediatamente após a colisão, u_B , depende das massas de A e B, respectivamente m_A e m_B . A figura 1 esquematiza a situação.

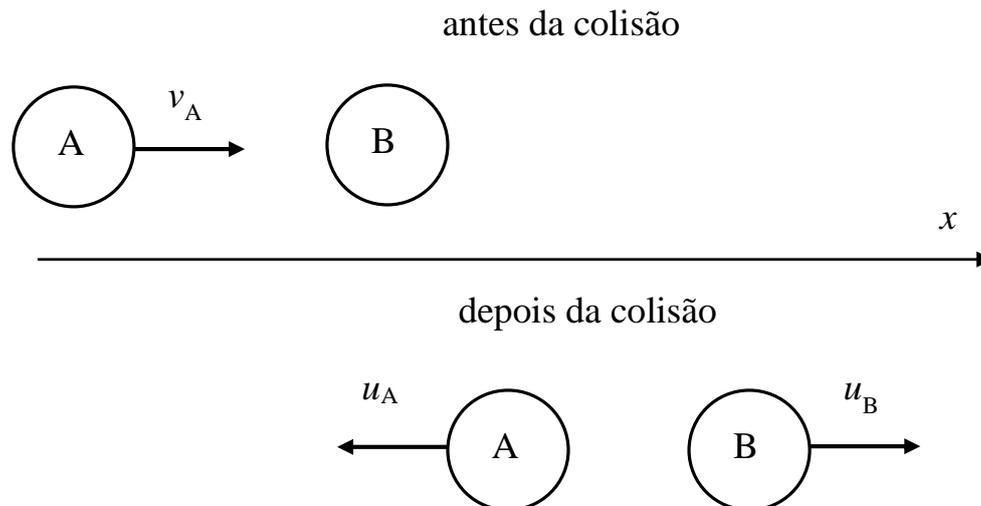


Figura 1. Esboço da colisão entre dois corpos em uma dimensão. As flechas indicam os sentidos das velocidades, mas u_A pode ser orientada para a direita, dependendo da proporção das massas.

2. Montando as equações que resolvem o problema

Esse problema tem solução, uma vez que numa colisão há conservação da quantidade de movimento e, como esta é uma colisão elástica, a energia se conserva. Assim, podemos escrever duas equações a duas incógnitas:

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A u_A + m_B u_B \quad (\text{IV.1})$$

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_A u_A^2 + \frac{1}{2} m_B u_B^2 \quad (\text{IV.2})$$

Substituindo $v_B = 0$ nessas equações e multiplicando todos os termos da segunda por 2, obtemos o par de equações que descreve o processo físico apresentado nesse problema:

$$m_A v_A = m_A u_A + m_B u_B \quad (\text{IV.3})$$

$$m_A v_A^2 = m_A u_A^2 + m_B u_B^2 \quad (\text{IV.4})$$

em que apenas u_A e u_B são incógnitas, portanto, sua solução fornece a grandeza buscada.



Questão 1. Substitua os valores: $m_A = 1$ kg; $m_B = 2$ kg e $v_A = 3$ m/s nas equações (IV.3) e (IV.4) e determine u_B resolvendo o sistema de equações obtido.

Uma maneira de encontrar a dependência da velocidade que o corpo B adquire com as massas que os blocos têm é repetir o procedimento da questão 1 para diferentes valores das massas e fazer os gráficos com os resultados obtidos. Embora não haja nada de errado com esse procedimento, este problema específico tem outra solução, que mostramos a seguir. Discutiremos as vantagens desta solução em mais detalhes ao fim do capítulo.

3. Solução algébrica.

Primeiro, transformamos as equações (IV.3) e (IV.4), reunindo os termos proporcionais a m_A no membro esquerdo das respectivas equações, que dão, após fatorar m_A :

$$m_A(v_A - u_A) = m_B u_B \quad (\text{IV.5})$$

$$m_A(v_A^2 - u_A^2) = m_B u_B^2 \quad (\text{IV.6})$$

Dividindo membro a membro a equação (IV.6) pela (IV.5), pode-se notar que vários fatores cancelarão. No entanto, sempre que se divide por uma expressão algébrica, precisamos garantir que não aconteça nenhuma divisão por zero. Se $v_A - u_A = 0$, então $v_A = u_A$, portanto o corpo A não transfere movimento para o B, ou seja, não há interação entre os corpos. Note que substituindo $v_A = u_A$ na equação (IV.5) obtém-se $u_B = 0$, de modo que ou ambos os membros dessa equação são nulos, ou nenhum é¹. Sem interação não haverá colisão, o que contraria o propósito do problema. Por isso, vamos insistir em que haja colisão, de modo que consideraremos

$$v_A - u_A \neq 0$$

o que significa, pela equação (IV.5), que também

$$u_B \neq 0$$

Assim, podemos dividir membro a membro a equação (IV.6) pela (IV.5) e, considerando que tanto m_A quanto m_B são grandezas não nulas, podemos simplificar o resultado para

$$\frac{v_A^2 - u_A^2}{v_A - u_A} = \frac{u_B^2}{u_B}$$

que pode então ser reescrita

$$\frac{(v_A - u_A)(v_A + u_A)}{v_A - u_A} = \frac{u_B^2}{u_B}$$

Após simplificação (que só é possível porque $v_A \neq u_A$ e $u_B \neq 0$, conforme discussão acima), obtemos

$$v_A + u_A = u_B \rightarrow u_A = u_B - v_A \quad (\text{IV.7})$$

¹ A solução $u_B = 0$ com $v_A = u_A$ é matematicamente correta e corresponde a uma situação física possível – os corpos não interagem. Esse tipo de solução é frequentemente chamada *solução trivial* e precisa *sempre* ser identificada e descartada somente se não corresponder ao problema proposto.



Substituindo u_A da equação acima em (IV.5), obtemos a resposta

$$u_B = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_A \quad (\text{IV.8})$$

Essa função pode ainda ser reescrita como na fórmula abaixo, e graficada como na Figura 2.

$$\frac{u_B}{v_A} = \frac{2}{1 + \frac{m_B}{m_A}} \quad (\text{IV.9})$$

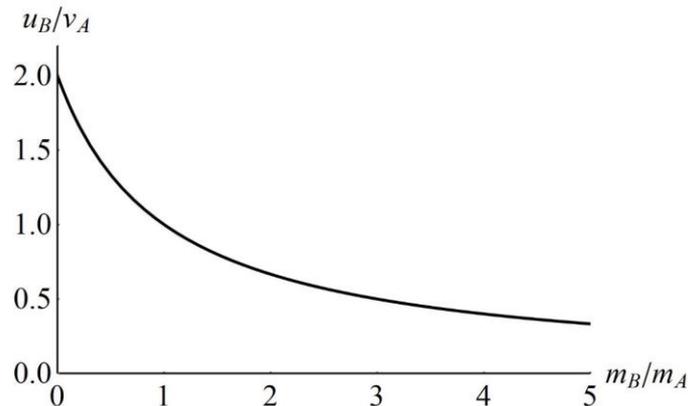


Figura 2. Velocidade do bloco B após a colisão relativa à de A antes da colisão, em função da razão entre as massas dos blocos. Note o limite $u_B = 2v_A$ se a massa de B é muito pequena e o comportamento assintótico assim que ela fica muito grande, quando $\frac{u_B}{v_A} \rightarrow 0$.

A grande vantagem desta segunda forma da solução é o fato de servir para qualquer conjunto de dados e deixar claro que **a razão entre as velocidades** do bloco B depois da colisão e a do bloco A antes da **colisão depende somente da razão das massas** dos blocos, um resultado difícil de enxergar nas equações (IV.3) e (IV.4). Além disso, a conta é mais fácil de fazer, qualquer que seja o conjunto dos dados.

Neste texto, vamos mostrar combinações de grandezas algébricas que podem ser fatoradas e apresentar algumas estratégias de fatoração, usadas na simplificação de expressões obtidas na solução de problemas de física.

B. Fator Comum em evidência ou agrupamento

Aplica-se quando os termos apresentam fatores comuns, como por exemplo, no polinômio: $ax + ay$. Ambos os termos apresentam o fator a , que pode ser posto em evidência: $a(x + y)$. As quantidades x e y podem ser expressões, por exemplo:

$$a \operatorname{sen} x + a \operatorname{cos} x = a(\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x)$$

$$a \operatorname{sen} x + b \operatorname{sen} x = (a + b)\operatorname{sen} x$$

Algumas vezes, ao colocar fatores comuns em evidência, aparecem grupos de termos comuns, que podem, por sua vez, ser postos em evidência. Por exemplo:

$$P = ax + ay + bx + by$$



Os dois primeiros termos possuem em comum o fator a , e os dois últimos, o fator b . Colocando esses termos em evidência:

$$P = a(x + y) + b(x + y) = (a + b)(x + y)$$

Esta técnica é usada frequentemente em combinação com as que mostraremos a seguir.

C. Fatoração de polinômios do 2º grau

Um polinômio do 2º grau sempre pode ser fatorado, embora às vezes o resultado não seja de interpretação simples. Abaixo, vamos mostrar os vários casos na ordem de facilidade de uso.

Primeiro, a diferença de quadrados:

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a) \quad (\text{IV.10})$$

seguido pelo trinômio que se obtém quando se eleva um binômio ao quadrado, chamado trinômio quadrado perfeito. Assim,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (\text{IV.11})$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (\text{IV.12})$$

Questão 2. Fatore

- a) $(x + y)^2 - 4$
- b) $4x^2(x - 2a) - 9a^2(x - 2a)$
- c) $16x^4 - y^4$
- d) $(x + y)^2 - (z + w)^2$
- e) $x^2 - 8x + 16$
- f) $9n^2 + 6n + 1$

Com o que foi visto no capítulo III (solução de equações), uma equação do 2º grau com coeficientes reais pode ser fatorada como

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (\text{IV.13})$$

em que x_1 e x_2 são as raízes; note que os polinômios de grau 1 da forma fatorada somente serão reais se o discriminante da equação não for negativo. Assim, embora a forma acima seja sempre possível, raramente ela é usada quando as raízes não são reais. Quando o coeficiente parabólico for $a = 1$, usar a regra da soma e produto das raízes simplifica a fatoração. A fim de facilitar a identificação dos termos, trocamos, na expressão (IV.13), $x_1 = -a$ e $x_2 = -b$, obtendo

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b) \quad (\text{IV.14})$$



Questão 3. Fatore os trinômios do 2º grau em uma variável.

- a) $x^2 + 8x + 15$
- b) $b^2 + 3b - 10$

D. Fatoração a partir dos Produtos Notáveis

Há duas formas de polinômios do 3º grau fáceis de fatorar:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad (\text{IV.15})$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad (\text{IV.16})$$

Questão 4. Fatore

- a) $27x^3 - 64$
- b) $64x - x^4$
- c) $r^6 + 1$

Questão 5. Tanto a fórmula (IV.8) quanto a (IV.9) mostram que u_B é diretamente proporcional a v_A . Na forma da equação (IV.9), o gráfico da Figura 2 mostra a dependência do fator de proporcionalidade com a razão entre as massas.

Considerando agora a fórmula (IV.8), **determine** o fator de proporcionalidade de u_B em relação a v_A em função de m_A e m_B e escreva uma frase que o descreva qualitativamente, notando que a *massa total* é $m_A + m_B$.

Questão 6. Considere o sistema descrito na seção A.1, mas agora admita que a velocidade inicial de B não é nula e é conhecida, $v_B \neq 0$. As equações (IV.1) e (IV.2) permitem resolver o problema quando se conhece também v_A . Chame a razão entre as massas de $r = \frac{m_B}{m_A}$.

- a) Procedendo como no item A, determine a relação entre $(u_A - u_B)$ e $(v_A - v_B)$ e escreva uma equação relacionando essas velocidades.
- b) Descreva como é o gráfico de $(u_A - u_B)/(v_B - v_A)$ em função de r .
- c) Determine u_B em função de v_A , v_B e r : divida ambos os membros da eq. (IV.1) por m_B , faça a substituição $r = \frac{m_B}{m_A}$ e resolva o sistema formado por esta equação e aquela obtida no item a), eliminando u_A .
- d) Determine u_A em função de v_A , v_B e r : substitua u_B do item acima na equação obtida no item a).

E. Exercícios

Exercitar é a única forma de aprender a fatorar; é preciso agilidade em reconhecer os padrões algébricos das expressões que dão fatoração, ou seja, os símbolos e números que aparecem na expressão tem o jeito de alguma das identidades mostradas acima. Estes exercícios combinam as técnicas apresentadas no texto.



1. Fatore os trinômios do 2º grau em duas variáveis, sem expandir $(x + y)$ – interprete essa combinação como uma única variável, fazendo a substituição apenas mentalmente, sem escrever no papel um símbolo único para ela.

$$(x + y)^2 - 3(x + y) - 10$$

$$(x + y)^2 - (x + y) - 12$$

$$(x + 2)^2 - (x + 2) - 20$$

2. Fatore de acordo com o modelo:

$$2xy^2(3y - x) - x^2(x - 3y)^2 = x(3y - x)[2y^2 - x(3y - x)]$$

(corresponde a uma equação de 2º grau em que x virou $x(3y - x)$ e uma das raízes é 0)

a) $2ba^2(2z - w) - 3b^2(w - 2z)^2$

b) $x^2 - (2a + b)x + 2ab$

3. Fatore de acordo com o modelo:

$$x^2 + (3y + 5)x + (2y + 3)(y + 2) = [x + (2y + 3)][x + (y + 2)]$$

(corresponde a encontrar as raízes, notando que $(2y + 3) + (y + 2) = (3y + 5)$)

a) $x^2 + (2y + 5)x + (y + 6)(y - 1)$

4. Fatore de acordo com o modelo:

$$x^4 - 6x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 - 4x^2 = (x^2 - 1)^2 - (2x)^2 = (x^2 - 1 + 2x)(x^2 - 1 - 2x)$$

(o termo $-6x^2$ foi decomposto em $-4x^2 - 2x^2$; precisa olho para adivinhar que vai ajudar!)

a) $x^4 - 11x^2 + 1$

b) $x^4 - 23x^2 + 1$

5. Fatore $\sin^4 x - \cos^4 x$ de modo a obter uma única função trigonométrica:

6. Resolva o sistema:
$$\begin{cases} x - 3 = y \\ x^2 - 9 = y^2 \end{cases}$$

Dicas:

- i. *Cuidado com a divisão por uma expressão algébrica – antes de dividir, verifique o que acontece se o denominador for nulo.*
- ii. *Teste qualquer raiz que venha a obter!*
- iii. *Faça um gráfico das duas funções e convença-se do resultado que obteve.*