III. Resolução de equações literais a uma incógnita

A. Introdução

Considere o seguinte problema clássico acerca dos movimentos uniformemente acelerados:

Um observador no fundo do quarto vê uma bola de tênis passar em frente à sua janela de 1,40 m de altura, primeiro para cima e depois para baixo. O tempo total que a bola permanece visível (na ida e na volta) é 0,40 s.

Determine:

a) a velocidade da bola ao cruzar o batente inferior da janela.
b) a altura que a bola atinge acima da janela.

Considere que a bola fique visível desde o instante em que cruza o batente superior até que cruza o inferior; ignore o tamanho da bola e o efeito de paralaxe.

Adote g = 10,0 m/s². Ignore a força de atrito com o ar.

Dica: Coloque a origem do tempo no momento em que a bola cruza o batente inferior.

Vamos primeiro apresentar uma solução com cálculo mental, depois usando uma equação. Ambas adotam a dica do problema, de modo que a origem do espaço é escolhida no batente inferior e a bola cruza essa origem em *t* = 0 s. Além disso, a simetria do movimento em relação ao ponto de altura máxima, que veremos em detalhe na seção D, permite deduzir que o tempo visível apenas na subida é metade dos 0,40 s, portanto a bola cruza a janela em 0,20 s. Com esses dados, é preciso encontrar a velocidade ao cruzar a origem e substitui-la na fórmula da altura máxima = $\frac{v_0^2}{2g}$ a fim de achar a resposta. Em resumo, a solução do problema está em determinar a velocidade da bola em *t* = 0 s.

Solução com cálculo mental. A velocidade média da bola ao cruzar a janela é 1,40 m/0,20 s = 7,0 m/s. Nos 0,2 s em que permanece visível da janela na subida, a gravidade reduz a velocidade da bola em 10,0·0,20 s = 2,0 m/s. Como no movimento retilíneo uniformemente variado a velocidade média é a velocidade no tempo médio, a velocidade no momento em que cruza o batente inferior é a velocidade média mais **metade** dessa redução, portanto 8,0 m/s.

Solução com uma equação. A equação horária da bola, no referencial adotado e substituindo a gravidade por seu valor numérico, é

$$y(t) = v_0 t - 5{,}0t^2 \text{ em m para } t \text{ em s.} \quad (3.1)$$

Ao atingir o batente superior, *t* = 0,2 s e *y* = 1,40 m, de modo que a equação para v_0 é:

$$1{,}40 = v_0 0{,}2 - 5{,}0 \cdot 0{,}2^2$$

cuja solução é $v_0 = 8{,}0$ m/s.

Comparando as duas formas de encontrar v_0, verifica-se que **a equação facilita** tanto o **raciocínio** quanto a **explicação**.

A resposta ao item b) se obtém substituindo $v_0 = 8{,}0$ m/s na fórmula

$$\text{altura máxima} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{8^2}{20} = 6{,}4 \text{ m}$$

Descontada a altura da janela, a bola atinge 5,0 m acima do batente superior da janela.

No último exercício deste capítulo, retornaremos a esse mesmo problema, mas do ponto de vista de quem o formula, que precisa encontrar o maior valor do tempo que a bola fica visível de modo a criar um problema resolúvel.

B. Definições e nomes

Uma equação é uma identidade matemática e a expressão *resolver uma equação* significa encontrar **todos** os valores compatíveis com ela, ou seja, que preservam sua validade. Quando se diz *uma incógnita*, indica-se que há *uma única grandeza desconhecida* na equação.

Neste texto, vamos nos limitar a equações de 1º e 2º graus, que correspondem a polinômios nessa incógnita de ordens 1 e 2, respectivamente. Assim, aqui trataremos de equações com a forma $f(x) = 0$, em que a função f é um polinômio de 1º ou 2º grau.

Quando se lida com equações e soluções que envolvem apenas números reais, então *resolver uma equação* é o mesmo que *buscar sua raiz*. Isso porque, nesse caso, é possível fazer o gráfico de $f(x)$ em função de x e buscar os lugares em que o desenho da função corta o eixo das abscissas.

A ideia de raiz e do gráfico da função trazem o primeiro resultado importante sobre o assunto:

i. uma equação do 1º grau corresponde a uma reta no plano e, portanto, corta uma única vez a abscissa ou nunca encontra esse eixo, se for paralela a ele – tem uma ou nenhuma solução.
ii. uma equação do 2º grau corresponde a uma parábola no plano e, portanto, corta duas vezes a abscissa ou tangencia a abscissa ou nunca encontra esse eixo – tem duas, uma ou nenhuma solução real.

Esses resultados mostram que entender os gráficos dessas funções ajuda a lidar com as equações. Apresentamos o gráfico da equação do 1º grau no capítulo anterior, de modo que, neste, discutiremos gráficos dos polinômios de grau 2 na seção D, antes de lidar com a solução das equações de 2º grau.

C. Solução da equação de primeiro grau

A equação de 1º grau pode ter a forma

$$2x = 5$$

cuja solução é encontrada dividindo ambos os membros por 2. Ela pode ser reescrita como

$$f(x) = 2x - 5 = 0$$

O gráfico de $f(x)$ é uma reta, que encontra o eixo da abscissa exatamente em $x = \frac{5}{2}$, que é a raiz ou solução da equação.

A questão fica mais difícil quando não se conhecem todos os coeficientes do polinômio de 1º grau, em particular do termo de 1º grau:

$$a\,x = 5 \qquad (3.2)$$

Como não se pode dividir ambos os membros por a quando ele for igual a 0, é necessário enunciar essa condição, e a solução é:

$$x = \begin{cases} \dfrac{5}{a}\,, & \text{se } a \neq 0 \\ \text{inexistente, se } a = 0 \end{cases}$$

Note que esse é um dos resultados enunciados na introdução, e pode ser interpretado por meio do gráfico da função $f(x) = a\,x - 5$, que se resume a uma reta paralela ao eixo O*x* quando *a* = 0.

Ao trocar a constante por uma variável na equação (3.2), obtém-se a forma geral

$$a\,x = b \tag{3.3}$$

que não traz maiores dificuldades para sua solução, mas abre a possibilidade de solução quando *b* = 0:

$$x = \begin{cases} \dfrac{b}{a} & \text{se } a \neq 0 \\ \text{inexistente, se } a = 0 \text{ e } b \neq 0 \\ \text{qualquer, se } a = b = 0 \end{cases} \tag{3.4 }$$

O último ramo da fórmula (3.4) raramente tem interesse, uma vez que a eq. (3.3) se reduz a 0=0 quando ambos os coeficientes forem nulos, mas essa possibilidade não pode ser esquecida – é preciso examinar o problema e constatar que essa condição nunca pode ocorrer, antes de descartar essa solução. A questão abaixo mostra como essa encrenca pode surgir disfarçada.

Questão 1. Nas equações abaixo, *a* e *b* são constantes reais conhecidas, ambas diferentes de 0, ou seja, $a \neq 0$ e $b \neq 0$:

i. $(a-1)x = b$
ii. $(a-1)x = b+5$
iii. $x\ \operatorname{sen} a = 0{,}5$
iv. $x\ \operatorname{sen} a = 0{,}5 \cos b$
v. $x\ \operatorname{sen} a = 0{,}5 \operatorname{sen} 2a$

Para cada uma dessas equações, **determine** a solução ou as soluções x – encontre **todas** as soluções.

D. O gráfico de uma parábola

O gráfico de um polinômio do segundo grau tem a forma de uma parábola e é bastante usado na parte introdutória da mecânica. Ela permite a representação matemática da queda livre, do lançamento de projéteis e da equação horária de qualquer movimento uniformemente acelerado.

Do ponto de vista geométrico, uma parábola é o lugar geométrico dos pontos equidistantes a um ponto fixo, chamado foco, e uma reta, chamada diretriz. A wikipedia tem uma animação interessante, que mostra a relação entre a curva e as posições do foco e da diretriz (https://pt.wikipedia.org/wiki/Par%C3%A1bola, último acesso em 5/3/20). Aqui, nos limitaremos a discutir como traçar o gráfico de uma parábola a partir da representação analítica.

Dois pontos bastam para traçar uma reta e três, para uma parábola. O problema de traçar uma reta por dois pontos é comum, mas não o de traçar uma parábola por 3 pontos. O mais comum é definir uma parábola pelos seus *pontos chaves* e *comportamentos limites*, expressões que explicaremos na sequência; esse é o procedimento também com curvas mais complicadas.

A equação de uma parábola no plano é

$$y(x) = ax^2 + bx + c\,, \quad \text{onde } a, b \text{ e } c \text{ são constantes reais com } a \neq 0 \tag{3.5}$$

A constante *a* é chamada de coeficiente parabólico porque, quando $a = 0$, essa expressão deixa de definir uma parábola.

O gráfico dessa função é determinado pelos sinais do coeficiente parabólico e do **discriminante** da equação, que é definido por

$$\Delta = b^2 - 4ac \tag{3.6}$$

A Figura **1** mostra os gráficos obtidos com as diferentes combinações de sinais de *a* e Δ e ilustra os três tipos diferentes de solução de uma equação de grau 2, quando buscamos raízes reais: duas soluções, uma solução única (dita raiz dupla) ou nenhuma solução real, conforme o sinal do discriminante for positivo, nulo, ou negativo, respectivamente. Essas soluções estão marcadas como x_1 e x_2, são as raízes da equação $y(x) = 0$ e correspondem aos pontos de cruzamento da parábola com o eixo O*x*. Já o ponto de extremo, isto é, o valor da abscissa para o qual $y(x)$ é máximo quando *a* < 0 (ou mínimo quando *a* > 0), é calculado como

$$x_m = -\frac{b}{2a} \tag{3.7}$$

Note que, quando *a* > 0, valores de *x* com módulos muito grandes, isto é, $x \gg 0$ ou $x \ll 0$, levam a valores da função muito grandes e **positivos (***y* tende ao infinito quando x tende a infinito), ou seja, a função tem máximos no infinito para valores infinitos da abscissa e, portanto, tem um mínimo para um valor finito. Por um raciocínio análogo, a parábola tem um máximo quando *a* < 0.

Questão 2. Esboce os gráficos das parábolas:

a) $x^2 + x + 1$
b) $-x^2 + x + 1$
c) $x^2 + x - 1$

Questão 3. Determine o valor do extremo de $y(x)$ substituindo a abscissa do extremo, x_m da fórmula (3.7), na equação (3.5) e mostre que ele vale

$$y_m = -\frac{\Delta}{4a} \tag{3.8}$$

E. As soluções reais da equação do 2º grau

Essas soluções reais só existem quando $\Delta \geq 0$ (por isso Δ é chamado discriminante) e são dadas pelas fórmulas bem conhecidas

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2c}{-b+\sqrt{\Delta}} \tag{3.9}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2c}{b+\sqrt{\Delta}} \tag{3.10}$$

em que fica claro que $x_1 = x_2$ quando $\Delta = 0$.

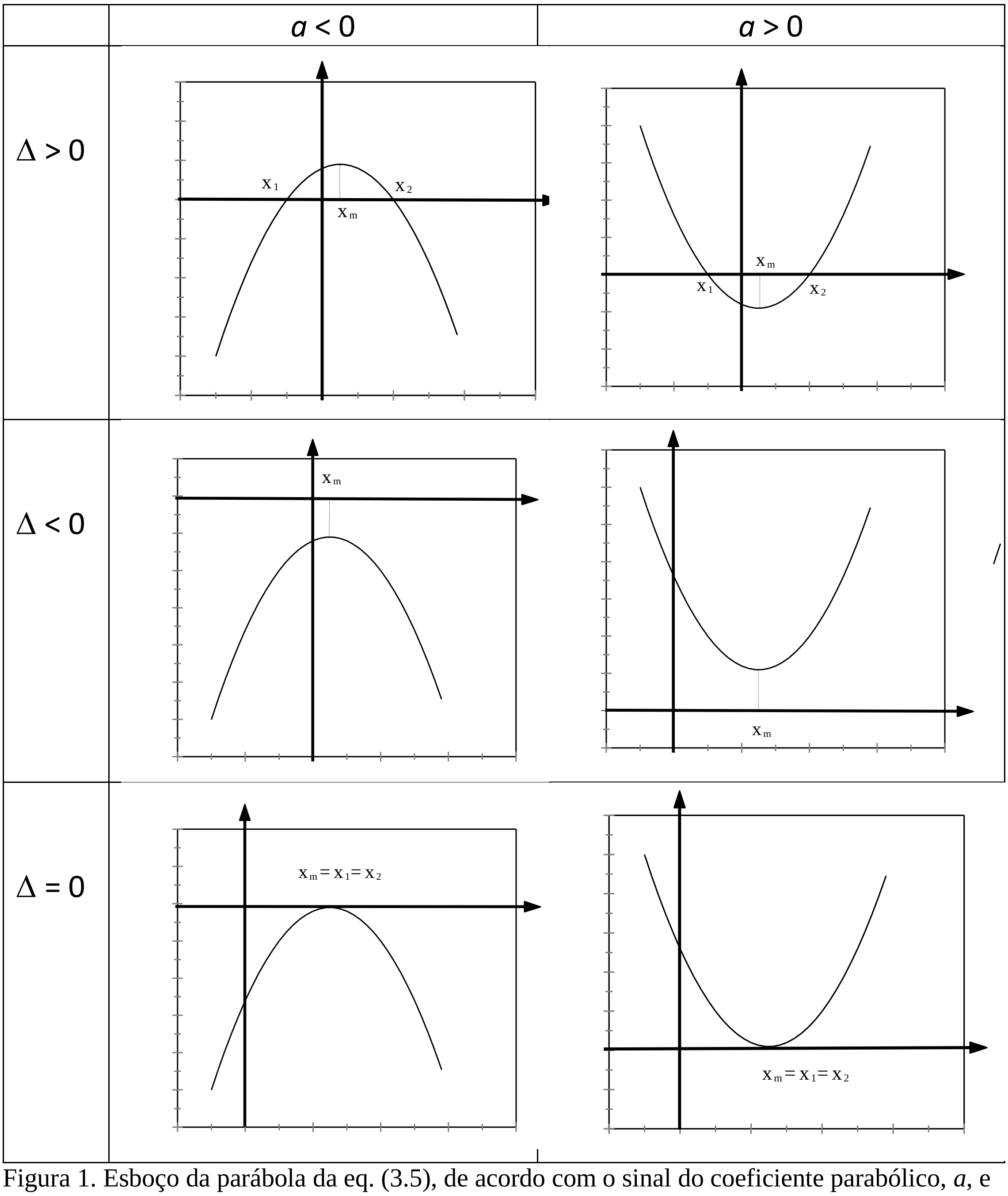

Figura 1. Esboço da parábola da eq. (3.5), de acordo com o sinal do coeficiente parabólico, *a*, e do discriminante Δ da equação $y(x) = 0$. As raízes da equação são x_1 e x_2. O ponto em que as setas que representam os eixos O*x* e O*y* se cruzam é a origem do sistema de referência, de coordenadas (0,0), e x_m representa a abscissa do valor extremo da função.

Questão 4. As equações (3.9) e (3.10) mostram que o termo com a raiz quadrada pode ir para o denominador.

Demonstre que as duas maneiras de obter as raízes que aparecem nas equações (3.9) e (3.10) são equivalentes.

Questão 5. Considere as raízes da equação do 2º grau da fórmula (3.5). Mostre que

a) a soma das raízes é

$$-\frac{b}{a} \tag{3.11}$$

b) o produto das raízes é

$$\frac{c}{a} \tag{3.12}$$

Da simetria da parábola, pode-se concluir que o ponto de mínimo ou de máximo da função da fórmula (3.5) é a posição central entre x_1 e x_2, portanto basta tirar a média entre estes dois valores para obtê-lo:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a} \tag{3.13}$$

Quando se conhecem as raízes x_1 e x_2 de uma equação do 2º grau, pode-se escrever essa equação na forma

$$y(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \tag{3.14}$$

Questão 6. Há infinitas equações do 2º grau com raízes em x = 1 e x = 5.

Dentre essas, determine uma que tenha, em x = 3, um

a) máximo, e encontre o valor desse máximo.
b) mínimo, e encontre o valor desse mínimo.

Questão 7. Determine a equação do 2º grau com raízes em x = 1 e x = 5 e tal que $y(3) = 8$.

Questão 8. Quais são os pontos chave e o comportamento limite de $y(x)$ da equação (3.5) que permitem esboçar seu gráfico, sem fazer uma tabela para muitos valores de x?

Questão 9. Retome a questão do movimento livre da bola na gravidade, discutido na seção A. A professora deseja que o resultado numérico do problema seja diferente, mudando o tempo em que a bola está visível, sem modificar a altura da janela nem a aceleração da gravidade.

Determine o menor valor do tempo em que a bola está visível para que o problema tenha solução.