Aula 1 (1)

Seqüências: Se a cada inteiro positivo n é associado um número a_n, diz-se que os números a_n formam uma seqüencia infinita. Ordenam-se os números segundo seus índices: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

Notação para seqüencia: $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n\}$

Todas elas denotam a seqüência de números a_n, e o termo a_n é chamado o termo n-ésimo da seqüencia.

Exemplos: 1) Se $a_n = 2^n$, a seqüência seria: $\{2, 4, 8, \ldots\}$

Se $a_n = n \Rightarrow$ a seqüência é: $\{1, 2, 3, \ldots\}$

2) Dada a seqüência $\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\}$ achar o termo n-ésimo:

observe: $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{2}{3}$ … $a_n = \frac{n-1}{n}$, $n \geq 1$.

3) Dada a seqüência: $\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{7}{8}, \ldots\}$ achar o termo ~~n~~-ésimo da seqüencia.

observe que: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{4}$, $a_4 = -\frac{3}{4}$ …. Logo

$a_{2n-1} = \frac{1}{2^n}$, $n \geq 1$, e, $a_{2n} = -\frac{2n+1}{2^n}$, $n \geq 1$.

4) outra forma de escrever uma seqüência é através de fórmulas de recorrência: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.

Assim a seqüência é: $\{\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots\}$

$a_2 = a_{1+1} = \sqrt{2 + a_1} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ ……

$a_3 = a_{2+1} = \sqrt{2+a_2} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

um outro exemplo importante é a seqüência de Fibonacci dada por: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 3$. Mais explicito: é a seqüência: $\{1, 1, 2, 3, 5, \ldots\}$

$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$

$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$

$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$

5) Observe que as sequências: $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \dots \frac{1}{2^n} \dots\}$ e, $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots \frac{1}{n} \dots\}$ tem um comportamento similar quando o n é muito grande. Elas duas estão convergindo para o valor 0.

Assim podemos falar do limite para sequências:

<u>Definição</u>: a sequência $\{a_n\}$ tem <u>limite</u> L finito, e escrevemos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ ou $a_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} L$, se $a_n \sim L$ quando n é suficientemente grande. Isso é se a_n se aproxima a L para quando $n \to \infty$.

Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe, dizemos que $\{a_n\}$ é uma <u>sequência convergente</u>

Caso contrário, dizemos que $\{a_n\}$ é <u>divergente</u>.

<u>Exemplo</u>: As sequências do exemplo 5) são convergentes à 0. Assim escrevemos como: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ e, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

<u>Observação</u>: Se a sequência a_n provem de uma função ~~$f: [a, b) \to \mathbb{R}$~~ contínua, isto é: se $a_n = f(n)$ com $f: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ contínua, então se $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ e, sendo $f(n) = a_n$, temos que:

$\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. ie, $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L.}$

Sendo este o caso, podemos aplicar a teoria das funções contínuas e seus limites, para calcular o limite da sequência.

<u>Exemplo</u>: 7) $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n} = 0$, pois o termo n-esimo da sequência é $a_n = e^{-n}$ e ele é dado pela função $f(x) = e^{-x}$.

Como $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$, segue-se que $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n} = 0$.

) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^a} = 0$, $(a>0)$. De fato: pois $f(x) = \frac{\ln x}{x^a}$ gera a sequência. Observe que $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} \underset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{a x^{a-1}} =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{a} \frac{1}{x^a} \underset{a>0}{=} 0$.

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $(a>0)$. De fato: como $f(x) = a^{1/x}$, $x>0$ gera a sequência. Observe que $\lim_{x\to\infty} a^{1/x} = 1$.

) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = ?$ calcule esse limite.

pegue $f(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \ln f(x) = x \ln\left(1-\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)}$.

portanto: $\lim_{x\to\infty} \ln f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)} \underset{\text{hôpital}}{=}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = -1 \Rightarrow \ln\left(\lim_{x\to\infty} f(x)\right) = -1$

$\Rightarrow e^{\ln\left(\lim_{x\to\infty} f(x)\right)} = e^{-1} \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = e^{-1}$ logo

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$.

) De maneira geral <u>prove que</u> $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$, $a\neq 0$.

<u>Propriedades dos limites</u>: sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sequências convergentes, com $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Temos:

i) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = A \pm B$.

ii) $\lim_{n\to\infty} c a_n = c \lim_{n\to\infty} a_n = cA$, onde c é uma constante.

iii) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = AB$

iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$ se $B \neq 0$.

v) $\lim_{n\to\infty} (a_n)^p = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^p$, se $p>0$ e $a_n>0$.

vi) $\lim_{n\to\infty} c = c$, onde c é uma constante.

<u>Teorema do Confronto</u>: se $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ são 3 sequências tais que $a_n \le b_n \le c_n$ para $n \geq n_0$ e, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ então $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

<u>teorema</u>: seja $\{a_n\}$ sequência tal que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Este teorema segue-se rapidamente do fato que $-|a_n| \le a_n \le |a_n|$ como o limite nos extremos vai para 0 (por hipotese) segue-se do teorema do confronto que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

<u>Exemplo 12)</u>: a sequência $\{a_n\} = \left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$, onde $n! = 1.2.3 \ldots n$, é convergente à 0. De fato:

$$0 \le a_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1.2.3\ldots n}{n.n.n\ldots n} = \frac{1}{n}\underbrace{\left(\frac{2}{n}.\frac{3}{n}\ldots\frac{n}{n}\right)}_{<1} \le \frac{1}{n}$$

logo pelo teorema do confronto $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, pois $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Logo pelo teorema (2) temos que $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Pode acontecer que a sequência vai para ∞ ou $-\infty$ quando $n\to\infty$, isto é $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ou $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Neste caso dizemos que a sequência <u>diverge</u>.

<u>Exemplo</u>: 14) $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ e, $\lim_{n\to\infty} -n^2 = -\infty$ logo as sequencias $\{n\}$ e $\{-n^2\}$ são divergentes.

$\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ não existe.

pois a sequência é: $\{1, -1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots\}$.

Observe que pegando os índices ímpar da sequência $\{1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots\}$

a sequência dos índices pares $\{-1, -1, -1, \ldots, -1, \ldots\}$,

calculando $\lim_{n\to\infty} 1 = 1$ e, $\lim_{n\to\infty} -1 = -1$. Esses dois

valores são $\neq$s, portanto não-existe $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$.

<u>limite básico</u>: para quais valores de $r \in \mathbb{R}$, a sequência $\{r^n\}$ é convergente? Neste caso temos a função $f(x) = r^x$ com $x \geq 1$.

Se $r = 1$: $f(x) = 1^x = 1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

) Se $r > 1$: $\lim_{x\to\infty} r^x = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r^n = \infty$.

) Se $r = 0$: $\lim_{x\to\infty} 0^x = 0$.

) Se $0 < r < 1$: $\lim_{x\to\infty} r^x = 0$ pois podemos escrever $r = \frac{1}{a}$, $a > 1$.

og $\lim_{x\to\infty} r^x = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{a^x} = \frac{1}{\infty} = 0$.

) Se $-1 < r < 0$: temos que $0 < |r| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |r^n| = \lim_{n\to\infty} |r|^n = 0$.

logo $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

-) Se $r \leq -1$: podemos escrever $r = -a$ com $a \geq 1$. Logo

$\lim_{n\to\infty} (-a)^n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n a^n$, o limite não existe.

Portanto $$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0, & \text{se } -1 < r < 1 \\ 1, & \text{se } r = 1 \\ \infty, & \text{se } r > 1 \\ \text{não-existe} & \text{se } r \leq -1. \end{cases}$$

logo $\{r^n\}$ converge se $r \in (-1, 1]$, e

diverge se $r \notin (-1, 1]$.

<u>Definição</u>: a) a sequência $\{a_n\}$ é dita <u>crescente</u> se $a_n < a_{n+1}$ para $n \geq 1$. Isto é se: $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < \ldots$

b) a sequencia $\{a_n\}$ é dita <u>decrescente</u> se $a_n > a_{n+1}$, para $n \geq 1$, Isto é se: $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$.

c) a sequência $\{a_n\}$ é dita <u>monotônica</u> se for crescente ou decrescente.

<u>Exemplo</u>: 17) Seja $f: [1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, f função crescente ($f'(x)>0$), então $a_n = f(n)$ é uma sequência crescente.

Similarmente, para f decrescente.

18) Mostre que a sequência $\left\{\frac{e^{-n}}{n}\right\}$ é decrescente.

Como $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$ dá a sequencia $\left\{\frac{e^{-n}}{n}\right\}$, temos pr cálculo I que:

$$f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} = -\frac{e^{-x}(1+x)}{x^2} \leq 0$$

para $x \geq 0$.

portanto a função f é decrescente, logo a sequencia também.

19) $\{n\}$ é uma sequência monotônica crescente.

<u>Definição</u>: a) a sequência $\{a_n\}$ é dita <u>limitada superiormente</u> se existe $M \in \mathbb{R}$ / $a_n \leq M$, $\forall n \geq 1$.

b) a sequência $\{a_n\}$ é dita <u>limitada inferiormente</u> se existe $N \in \mathbb{R}$ / $a_n \geq N$, $\forall n \geq 1$.

c) a sequência $\{a_n\}$ é dita <u>limitada</u> se ela é limitada superior e inferiormente, isto é $\exists$ constantes M e N / $N \leq a_n \leq M$, $\forall n \geq N_0$.

<u>Exemplo</u>: 20) $\{n\}$ é uma sequência limitada inferiormente mas não superiormente pois $\forall n \geq 1$: $0 \leq n \leq n+1 \ldots$

21) a sequência $\{\text{sen}(\frac{n\pi}{2})\}$ que é $\{1, 0, -1, 0, 1, \ldots\}$ é limitada superiormente e inferiormente por -1 e 1, respect.

Logo ela é uma sequencia <u>limitada</u>.

O teorema fundamental na teoria das sequências é o seguinte:

teorema da sequência monotônica: Toda sequência $\{a_n\}$ que é limitada, monotônica é convergente.

Exemplo 22): Determine se a sequência $\{a_n\}$ é convergente, onde

$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6), \quad n \geq 1.$

observe que $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{1}{2}(8) = 4$, $a_3 = \frac{1}{2}(4+6) = 5, \ldots$

pergunta $\{a_n\}$ é crescente? Para ver isso usamos o princípio de Indução matemática:

Para $n=1$: $\quad a_{n+1} \geq a_n \iff a_2 \geq a_1 \iff 4 \geq 2$ ✓ ok ✓

suponha que $a_{k+1} \geq a_k$ e vejamos que $a_{k+2} \geq a_{k+1}$.

De fato: $a_{k+1} + 6 \geq a_k + 6 \Rightarrow a_{k+2} = \frac{1}{2}(a_{k+1}+6) \geq \frac{1}{2}(a_k+6) = a_{k+1}$ ✓

Logo ela é crescente.

pergunta $\{a_n\}$ é limitada?

De novo usamos indução matemática:

Para $n=1$, $a_1 = 2 \leq 6$

Suponha $a_k \leq 6$ e vejamos que $a_{k+1} \leq 6$.

De fato: $a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k+6) \leq \frac{1}{2}(6+6) = \frac{12}{2} = 6$ ✓

Logo ela é limitada superiormente por 6.

Mas também é limitada inferiormente por 0.

Logo $\{a_n\}$ é uma sequência limitada. Logo pelo teorema da sequência monotônica segue-se que $\{a_n\}$ é convergente.

Podemos ainda saber mais: Quem é o valor do limite L.

observe que como $\{a_n\}$ converge a L então a sequência $\{a_{n+1}\}$ também converge a L. Logo temos:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(a_n+6) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + 6\right) = \frac{1}{2}(L+6)$$

$$\Rightarrow \quad 2L = L + 6 \Rightarrow L = 6. \quad \text{isto é } \lim_{n\to\infty} a_n = 6.$$

Exemplo 23: Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2^n}\right)}{\left(\frac{1}{2^n}\right)}$

b) $\lim_{n\to\infty} \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$

c) $\lim_{n\to\infty} \ln(n)$

d) $\lim_{n\to\infty} e^n$

e) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$

f) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(n)}{n^2}$

g) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n)}{n}$

h) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1-\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}$.

Solução: a) observe que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, logo $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2^n}\right)}{\left(\frac{1}{2^n}\right)} =$

$= \underbrace{\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}}_{\text{faça } x=\frac{1}{2^n}} = 1$. Portanto $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2^n}\right)}{\left(\frac{1}{2^n}\right)} = 1$.

b) faça $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ para quando $x \to \infty$, temos por Cálculo I que $\lim_{x\to\infty} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Portanto

$\lim_{n\to\infty} \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

c) faça $f(x) = \ln x$, para $x \geq 1$. temos que $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$,

logo $\lim_{n\to\infty} \ln(n) = \infty$.

d) faça $f(x) = e^x$. Como $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} e^n = \infty$.

e) Como $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.

f) Como $0 \leq \operatorname{sen}(n) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{\operatorname{sen}(n)}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$

$(n\to\infty)$ 0 $n\to\infty$

Como $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$ e $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$, segue-se pelo teorema do confronto que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(n)}{n^2} = 0$.

g) Fasa $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ para $x \geq 1$. Como de cálculo I sabe que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{\text{hôpital}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, Então

temos que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$.

h) Como $\lim\limits_{n\to\infty} \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, temos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\left(\arctan\frac{1}{n}\right)}{\arctan\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0.$$

fasa $x = \arctan\frac{1}{n}$.

Exemplo 24: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{n+1} - \frac{n+1}{2n}\right) = ?$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^2-(n+1)^2}{2n(n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^2-n^2-2n-1}{2n(n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-2n-1}{2n^2+2n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{2n}{n^2}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{2n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{2}{n}} = \frac{3}{2}.$$

Exemplo 25:) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+3)!-n!}{(n+4)!} = ?$

observe que $\frac{(n+3)!-n!}{(n+4)!} = \frac{n!(n+1)(n+2)(n+3)-n!}{n!(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} =$

$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)-1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$, Portanto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)!-n!}{(n+4)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)-1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} = 0.$$

Exemplo 26: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n+5}{5n+1}\right)^n \left(\frac{5}{3}\right)^n = ?$

$$\left(\frac{3n+5}{5n+1}\right)^n \left(\frac{5}{3}\right)^n = \left(\frac{3}{5}\right)^n \left(\frac{n+5/3}{n+1/5}\right)^n \left(\frac{5}{3}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{5}{3}\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{5}\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \frac{e^{5/3}}{e^{1/5}} = e^{22/15}.$$