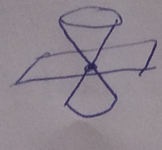
MAP2110 - Notas de aula e exercícios

Cônicas

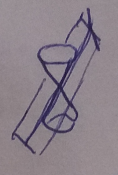
Saulo R. M. Barros

Departamento de Matemática Aplicada - IME-USP

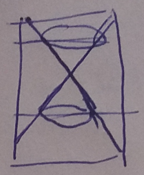
Cônicas Degeneradas



Pontos: $x^2+y^2=0$ $\quad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=0$



Retas: $(x-y)^2=0$ $\quad \left(\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)\right)^2=0$



2-Retas $x^2-y^2=0$ $\quad \left(\alpha(x-x_0)\right)^2-\left(\beta(y-y_0)\right)^2=0$

As superfícies quádricas:

Estas são definidas por equações quadráticas em $\mathbb{R}^3$.

$$ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz+gx+hy+iz+j=0.$$

A forma quadrática associada é a parte: $ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz$, que pode ser escrita como X^tAX com $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e a matriz simétrica $A=\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$. Escrevendo $K=[g\ h\ i]$, podemos escrever a equação quadrática como:

$$X^tAX+KX+j=0$$

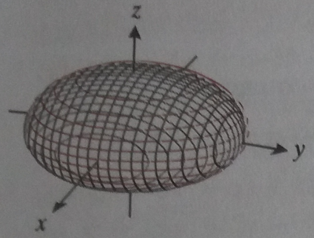
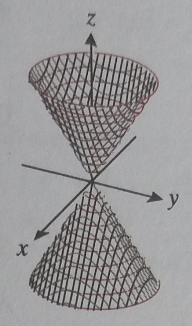
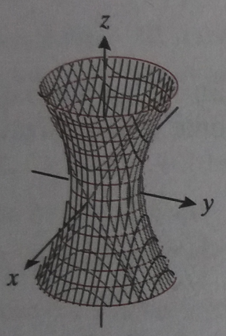
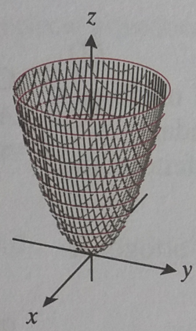
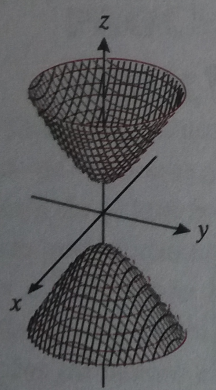
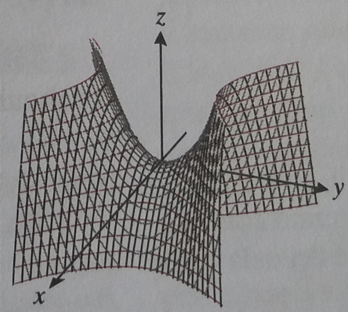
, analogamente ao feito em $\mathbb{R}^2$.

As equações típicas são as seguintes:

Elipsóide: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $\quad$ Hiperbolóide (1 folha) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

Hiperbolóide (2 folhas) $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $\quad$ Cone elíptico $z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

Parabolóide elíptico: $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ $\quad$ Parabolóide hiperbólico: $z=\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}$

Superfície	Equação	Superfície	Equação
Elipsóide 	$$\frac{x^2}{l^2}+\frac{y^2}{m^2}+\frac{z^2}{n^2}=1$$ Os traços nos planos coordenados são elipses, bem como os traços naqueles planos que são paralelos aos planos coordenados e que intersectam a superfície em mais de um ponto.	**Cone elíptico** 	$$z^2=\frac{x^2}{l^2}+\frac{y^2}{m^2}$$ O traço no plano xy é um ponto (a origem) e os traços nos planos paralelos ao plano xy são elipses. Os traços nos planos yz e xz são pares de retas que se cortam na origem e os traços nos planos paralelos a estes planos coordenados são hipérboles.
Hiperbolóide de uma folha 	$$\frac{x^2}{l^2}+\frac{y^2}{m^2}-\frac{z^2}{n^2}=1$$ O traço no plano xy é uma elipse, bem como os traços nos planos paralelos ao plano xy. Os traços nos planos yz e xz são hipérboles, bem como os traços nos planos paralelos a estes e que não passam pelos cortes da superfície com os eixos x e y. Nestes pontos de corte, os traços daqueles planos são pares de retas.	**Parabolóide elíptico** 	$$z=\frac{x^2}{l^2}+\frac{y^2}{m^2}$$ O traço no plano xy é um ponto (a origem) e os traços nos planos paralelos e acima do plano xy são elipses. Os traços nos planos yz e xz são parábolas, bem como os traços nos planos paralelos a estes
Hiperbolóide de duas folhas 	$$\frac{z^2}{l^2}-\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1$$ Não há traço no plano xy. Os traços nos planos paralelos ao plano xy e que cortam a superfície em mais de um ponto são elipses. Os traços nos planos yz e xz são hipérboles, bem como os traços nos planos paralelos a estes.	**Parabolóide hiperbólico** 	$$z=\frac{y^2}{m^2}-\frac{x^2}{l^2}$$ O traço no plano xy é um par de retas que se cortam na origem. O traços nos planos paralelos ao pl xy são hipérboles. As hipérboles acima do plano xy abrem na dire y e as hipérboles abaixo do plan abrem na direção x. Os traços n planos yz e xz são parábolas, be como os traços nos planos paral a estes.

Redução ao formato padrão:

Caso a equação quadrática não possua os termos mistos ($d=e=f=0$), com a matriz A diagonal, apenas será necessária uma translação da cônica, obtida por completamento de quadrados, como realizado anteriormente.

Exemplo: $4x^2 + 36y^2 - 9z^2 - 16x - 216y - 6z = -303$

Assim: $4x^2 - 16x + 36y^2 - 216y - 9z^2 - 6z = -303$

$$4(x^2-4x+4) + 36(y^2-6y+9) - 9\left(z^2 + \frac{2z}{3} + \frac{1}{9}\right) = -303 + 16 + 324 - 1$$

$$4(x-2)^2 + 36(y-3)^2 - 9(z+1/3)^2 = 36$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + (y-3)^2 - \frac{(z+1/3)^2}{4} = 1$$

que corresponde a um hiperbolóide de uma folha.

(com a origem transladada para $(x_0, y_0, z_0) = (2, 3, -1/3)$).

Eliminação dos termos mistos (superfícies rotacionadas).

De forma análoga ao feito em $\mathbb{R}^2$, precisamos diagonalizar a forma quadrática. Para tanto vamos necessitar dos auto-valores e auto-vetores de A e mostrar que a transformação que faremos corresponde a uma rotação em $\mathbb{R}^3$.

A simetria da matriz A torna as propriedades de seus auto-valores e auto-vetores bastante particular.

Na disciplina de Álgebra linear vocês verão que todos os auto-valores de A são reais e que os auto-vetores de A podem ser escolhidos como uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Vamos apresentar alguns exemplos:

a) Considere a quádrica dado por:

$4x^2+4y^2+4z^2+4xy+4yz+4xz=3$, correspondente a:

$X^t A X - 3 = 0$, com a forma quadrática dada por $A=\begin{bmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{bmatrix}$.

Para obtermos os auto-valores de A, precisamos determinar as raízes de $p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}4-\lambda&2&2\\2&4-\lambda&2\\2&2&4-\lambda\end{bmatrix}$

$$p(\lambda)=(4-\lambda)^3+8+8-3.(4(4-\lambda))$$
$$=-\lambda^3+12\lambda^2-48\lambda+64+16-48+12\lambda$$
$$=-\lambda^3+12\lambda^2-36\lambda+32$$

~~cujas~~ As raízes são 8 e 2(dupla).

Procuremos os auto-vetores: $(A-\lambda I)v=0$

$\lambda=8$ $A-8I=\begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{pmatrix}$ Escalonando: $\begin{pmatrix}-4&2&2\\0&-3&3\\0&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-4&2&2\\0&-3&3\\0&0&0\end{pmatrix}$

Solução é tal que: $y=z$ e $y+z=2x \to x=y=z$

Normalizando, temos $v_1=\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)$

$\lambda=2$ $A-2I=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$. As três equações são iguais. Os auto-vetores devem satisfazer:

$x+y+z=0$

Eles formam um espaço de dimensão 2.

Vamos escolher uma base ortonormal deste espaço.

$v_2=(1/\sqrt2,-1/\sqrt2,0)$ é um auto-vetor.

Vamos escolher v_3 tal que $v_2.v_3=0$ (com $v_3=(x,y,-(x+y))$

Assim: $\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} = 0 \implies x = y$.

Teríamos, por exemplo, $v_3 = (1, 1, -2)$. Como queremos v_3 normalizado, tomamos $v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$.

Escrevendo $P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$ e usando que

os vetores são ortonormais temos que $P^{-1} = P^t$.

Como $Av_1 = 8v_1$, $Av_2 = 2v_2$ e $Av_3 = 2v_3$

Temos $AP = P\Lambda$, com $\Lambda = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $P^tAP = \Lambda$

Escrevendo $\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$

e substituindo na equação

$X^tAX = 3$ obtemos

$$(r\ s\ t)\, P^tAP \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = 3 \implies 8r^2 + 2s^2 + 2t^2 = 3$$

$$\implies \frac{r^2}{3/8} + \frac{s^2}{3/2} + \frac{t^2}{3/2} = 1$$

que é um elipsoide nas variáveis r, s, t.

A matriz P tem determinante 1. Escolhemos os sinais de v_1, v_2, v_3 de forma a termos isso. Neste caso, P corresponde a uma rotação em $\mathbb{R}^3$.

Observação: Toda rotação em $\mathbb{R}^3$ pode ser obtida através de rotações sequenciais em torno dos 3 eixos.

Uma rotação em torno do eixo z é da forma $R_1 = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

em torno do eixo y: $R_2 = \begin{pmatrix} c_2 & 0 & -s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 \end{pmatrix}$ e do eixo x: $R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & -s_3 \\ 0 & s_3 & c_3 \end{pmatrix}$,

todas com $c_i^2 + s_i^2 = 1$ (correspondendo a sinos e cosenos dos ângulos de rotação).

Uma composição de rotações em torno dos eixos, se escreve como produto destas matrizes. Observe que como cada uma delas tem determinante 1, o produto também terá.

A matriz $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$ pode ser escrita

como $P = R_1 R_2 R_3$, tomando: $c_1 = s_1 = -1/\sqrt{2}$, $c_2 = \frac{-2}{\sqrt{6}}$, $s_2 = 1/\sqrt{6}$

e $c_3 = 1$, $s_3 = 0$.

b) Vejamos um segundo exemplo:

Considere a equação $x^2 - 2xy + z^2 + 2yz + \sqrt{2}x + \sqrt{2}z = 3$

que pode ser escrita como $X^t A X + K X = 3$

com $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $K = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

Vamos determinar os auto-valores de A. O polinômio característico da matriz é dado por $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

$$p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2 - 2(1-\lambda) = -(1-\lambda)(-\lambda^2+\lambda+2)$$

As raízes são 1, −1 e 2. Busquemos os auto-vetores.

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A solução de $(A-I)v = 0$ é dada por $\alpha(1\ 0\ {+1})$. Normalizando, temos $v_1 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & +1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

cujo auto-vetor é da forma $\alpha(1\ 2\ {-1})$. Normalizando, $v_2 = (1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e o auto-vetor é da forma $\alpha(-1, 1, 1)$. Tomamos $v_3 = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Assim, para $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ temos $AP = P\Lambda$, com $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $P^{-1} = P^t$

Definindo $\begin{pmatrix} s \\ t \\ r \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} s \\ t \\ r \end{pmatrix}$, obtemos a equação

$(KP = [2\ 0\ 0])$

$$(s\ t\ r)\, P^t A P \begin{pmatrix} s \\ t \\ r \end{pmatrix} + KP \begin{pmatrix} s \\ t \\ r \end{pmatrix} = 3$$

$$s^2 - t^2 + 2r^2 + 2s = 3$$

Completando quadrados:

(Hiperbolóide de 1 folha!)

$$(s^2 + 2s + 1) - t^2 + 2r^2 = 3 + 1$$

$$(s+1)^2 - t^2 + 2r^2 = 4 \quad \text{e} \quad \frac{(s+1)^2}{4} - \frac{t^2}{4} + \frac{r^2}{2} = 1$$