

Cálculo Diferencial e Integral I - Rec Parte 1

Seja n o último dígito de seu número USP. Defina

$$a = \text{maior número entre } n \text{ e } 2 \quad (1)$$

Veja os seguintes exemplos: se seu nr.USP é 123456787, então $a = 7$; se o nr.USP é 123456781, então $a = 2$; se o nr.USP é 123456780, então $a = 2$. O número “ a ” será utilizado nas questões abaixo.

1. (Continuidade). Seja $f(x) = \frac{x^4 - a^3x}{x-a} + \frac{x^3 - a^2x}{x-a}$ se $x \neq a$, e $f(x) = L$ se $x = a$. Calcule o valor de L para que f seja contínua em todos os números reais. Justifique. Sugestão. Note que $x^4 - a^3x = (x^3 - a^3)x$ e $x^3 - a^2x = (x^2 - a^2)x$.

2. (Limites de funções racionais). Sejam f e g funções contínuas e estritamente crescentes tais que $f(a) = 3$ e $g(a) = 0$. Calcule os limites e justifique.

$$(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{[f(x)]^3 - 9}{[f(x)]^2 + 9} \quad (b) \lim_{x \rightarrow a} \frac{[g(x)]^3 + [g(x)]^2}{3[g(x)]^3 + [g(x)]^4 + g(x)}$$

3. (Existência de limites e limites laterais). Cada limite abaixo ou “não existe” ou é igual a algum número. Responda se o limite existe e em caso afirmativo, calcule o limite.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{3ax-3a} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|ax-a|}{2x-2}$$
$$(c) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|ax-a|}{x-1} \quad (\text{limite lateral}) \quad (d) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{ax-a} \quad (\text{limite lateral})$$

4. (Teorema do confronto). Suponha que, para todo $x \in (-1, 1)$ e $x \neq 0$, valha

$$|g(x)| > 0 \quad \text{e} \quad |g(x)| \leq |af(x)g(x)| \leq |x| \quad (2)$$

Suponha ainda que $\lim_{x \rightarrow 0} x/g(x) = 1$. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Sugestão. Divida os termos das desigualdades por $|g(x)|$ para $|g(x)| \neq 0$.

5. (Limite trigonométrico). Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^5 x^3 + x \cos(\sqrt{x})}{1 + a^2 [x^4 \sin(1/x)]}. \quad (3)$$

Sugestão. Divida o numerador e o denominador da fração em (3) por $a^2 x^3$ e use o limite trigonométrico fundamental.