MAT0105 – Geometria Analítica

Equações de Retas no Espaço
Parte 2

Profa. Ana Paula Jahn

anajahn@ime.usp.br

Posições relativas de retas no espaço

A partir de suas equações, é possível estudar as posições relativas de duas ou mais retas

Relembrando – 2 retas do espaço podem ser:

Retas Paralelas $\begin{cases} \text{Coincidentes} \\ \text{Distintas} \end{cases}$

Coplanares

Concorrentes $\begin{cases} \text{Oblíquas} \\ \text{Perpendiculares} \end{cases}$

Reversas $\begin{cases} \text{Oblíquas} \\ \text{Ortogonais} \end{cases}$

Não coplanares

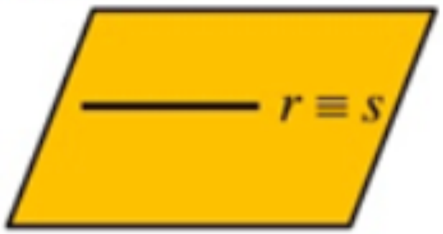
Posições relativas entre duas retas

Retas coplanares

Paralelas distintas

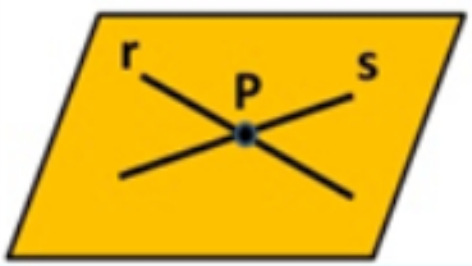
$r \cap s = \emptyset$

Paralelas coincidentes



$r = s$

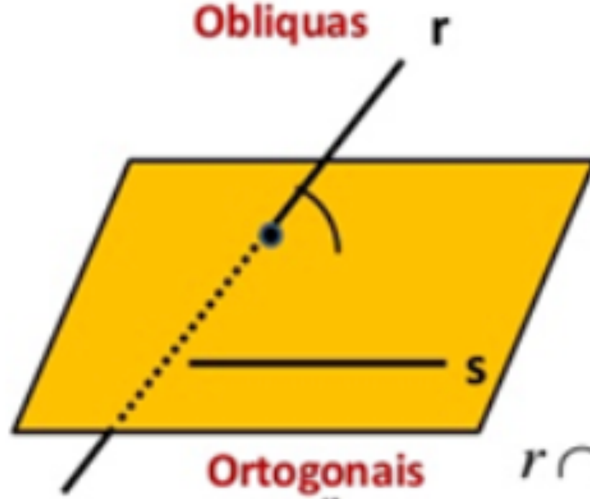
Concorrentes



$r \cap s = \{P\}$

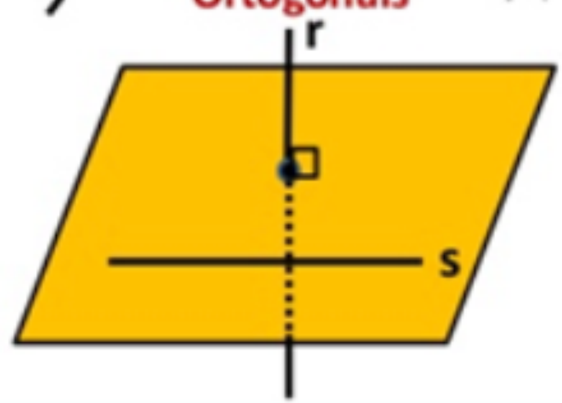
Retas não coplanares ou reversas:

Obliquas



$r \cap s = \emptyset$

Ortogonais



Sejam r e s duas retas e sejam:

- $A \in r, A = (x_1, y_1, z_1)$ e $\overrightarrow{v_r} = (a, b, c)$ um vetor diretor de r
- $B \in s, B = (x_2, y_2, z_2)$ e $\overrightarrow{v_s} = (d, e, f)$ um vetor diretor de s

Retas Paralelas: $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}\}$ LD, ou seja, $\overrightarrow{v_r} \parallel \overrightarrow{v_s} \Leftrightarrow$

$$\exists\ \alpha \in \mathbb{R} \,/\, \overrightarrow{v_r} = \alpha\overrightarrow{v_s} \ \Leftrightarrow \alpha = \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$

Paralelas **Coincidentes**: $A \in s$ (ou $B \in r$), $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{s}$

Paralelas **Distintas**: $A \notin s$ (ou $B \notin r$), $\boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{s}$

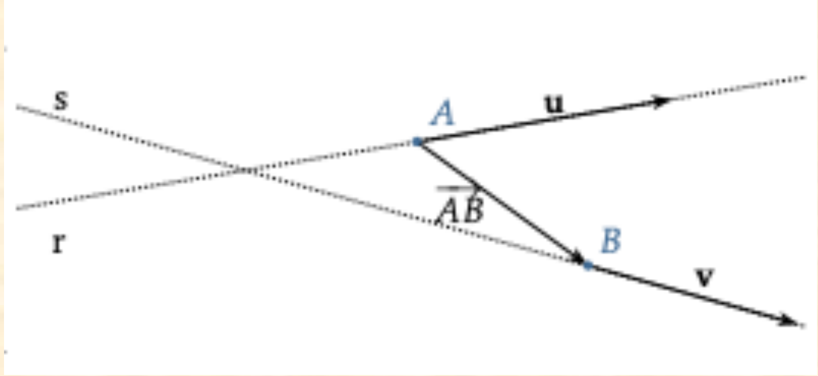
Sejam r e s duas retas e sejam:

- $A \in r, A = (x_1, y_1, z_1)$ e $\overrightarrow{v_r} = (a, b, c)$ um vetor diretor de r
- $B \in s, B = (x_2, y_2, z_2)$ e $\overrightarrow{v_s} = (d, e, f)$ um vetor diretor de s

Retas Concorrentes: $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}\}$ LI, ou seja, $\overrightarrow{v_r} \nparallel \overrightarrow{v_s}$

E **coplanares**: $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{AB}\}$ LD $\Leftrightarrow [\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{AB}] = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$



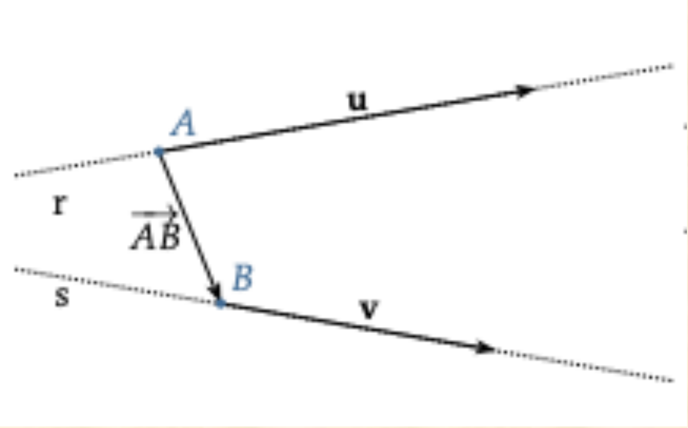
Sejam r e s duas retas e sejam:

- $A \in r, A = (x_1, y_1, z_1)$ e $\overrightarrow{v_r} = (a, b, c)$ um vetor diretor de r
- $B \in s, B = (x_2, y_2, z_2)$ e $\overrightarrow{v_s} = (d, e, f)$ um vetor diretor de s

Retas Reversas: $r \cap s = \emptyset$ e **não coplanares**, isto

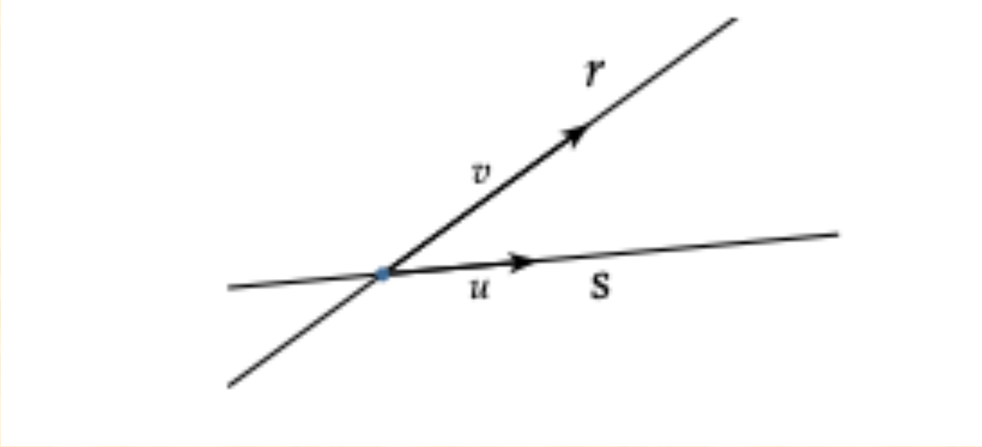
é: $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{AB}\}$ LI $\Leftrightarrow$ $[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{AB}] \neq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0$$



Ângulos entre duas retas

O **ângulo entre duas retas** será definido como o **menor ângulo** formado pelos seus **vetores diretores**



$$\alpha = \arccos\left(\frac{|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|}{||\vec{u}|| \, ||\vec{v}||}\right)$$

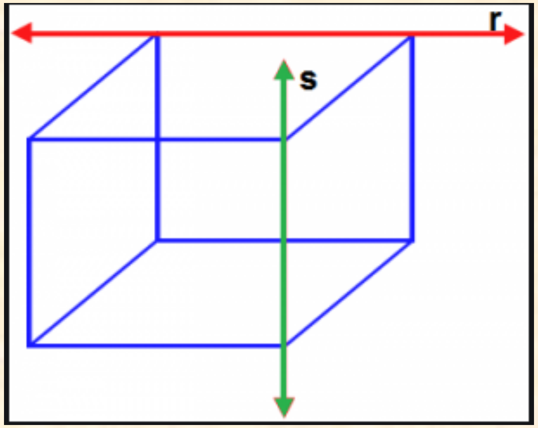
Toma-se o **módulo do produto escalar**, pois se quer o menor ângulo $(0 < \alpha < 90)$

Obs.: para medir o ângulo entre duas retas não é necessário que estas se interceptem.

Ângulos entre duas retas

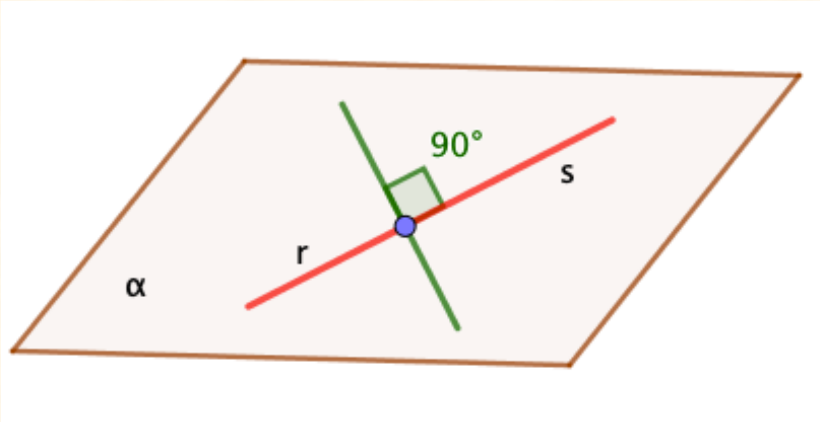
Retas Ortogonais = Retas **Reversas** (NÃO COPLANARES) que formam **ângulo reto**

Ou seja, $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$



Retas Perpendiculares = Retas **Concorrentes** (**COPLANARES**) que formam **ângulo reto**

Ou seja, $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$



Exemplo: Exercício Complementar

Duas a duas, estudar as posições relativas das retas

$$r_1: \frac{x-3}{2} = 1 - y = \frac{2z-1}{3}$$

$$r_2: X = (1,0,-2) + \lambda(-1,2,1) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$r_3: \begin{cases} x = 4 + 2\alpha \\ y = -6 - 4\alpha \\ z = -5 - 2\alpha \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$r_4: X = (1,1,-2) + \mu(-7,14,7) \qquad (\mu \in \mathbb{R})$$

$$r_5: \frac{x}{3} = 2 - y = \frac{z-1}{7}$$

Exemplo: Exercício Complementar

Ver a resolução de alguns casos em documento enviado no *e-Disciplinas.*