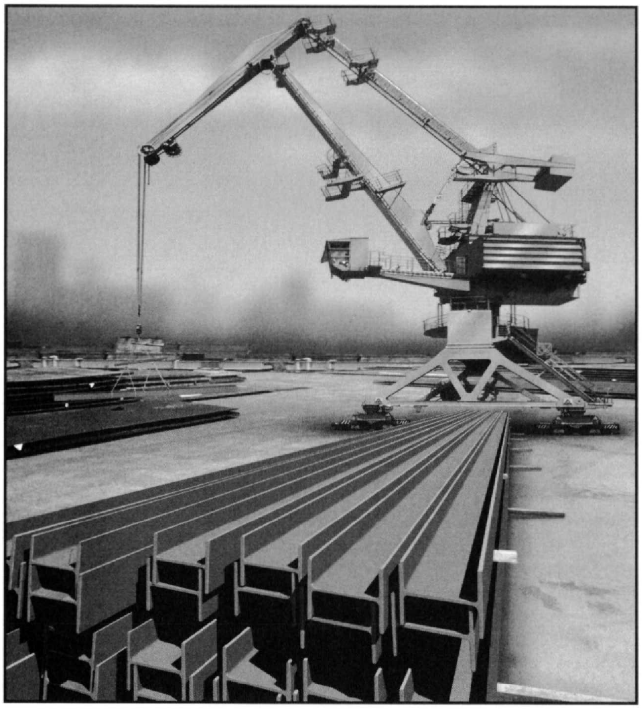
11 TRABALHO VIRTUAL



O equilíbrio e a estabilidade desta lança articulada do guindaste como função de sua posição podem ser analisados utilizando-se métodos baseados no trabalho e na energia, que serão explicados neste capítulo.

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- Introduzir o princípio dos trabalhos virtuais e mostrar como aplicá-lo para determinar a configuração de equilíbrio de uma série de elementos conectados.
- Estabelecer a função energia potencial e utilizar o método da energia potencial para investigar o tipo de equilíbrio ou estabilidade de um corpo rígido ou de um sistema.

11.1 DEFINIÇÃO DE TRABALHO E TRABALHO VIRTUAL

Trabalho de uma Força. Em mecânica, uma força $\mathbf{F}$ realiza trabalho somente quando está submetida a um deslocamento na direção da aplicação da força. Por exemplo, considere a força $\mathbf{F}$ na Figura 11.1, que está localizada na trajetória s especificada pelo vetor posição $\mathbf{r}$. Se a força move-se ao longo da trajetória para uma nova posição $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + d\mathbf{r}$, o deslocamento é $d\mathbf{r}$ e, portanto, o trabalho dU é uma *grandeza escalar* definida pelo produto escalar:

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

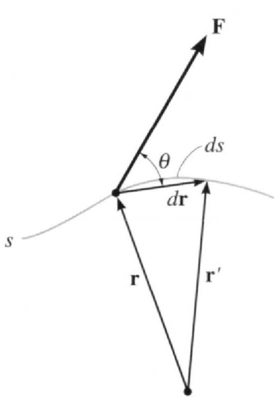


Figura 11.1

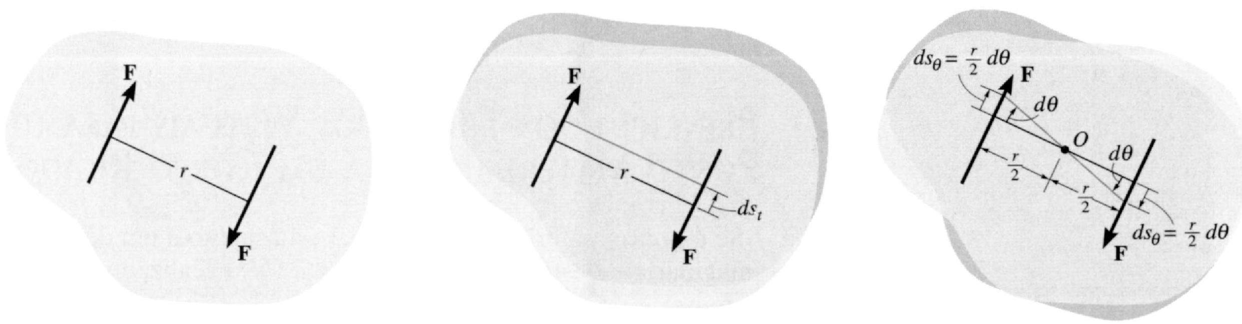
Como $d\mathbf{r}$ é infinitesimal, sua intensidade pode ser representada por ds, o segmento de arco infinitesimal ao longo da trajetória. Se o ângulo entre os vetores $d\mathbf{r}$ e $\mathbf{F}$ é θ (Figura 11.1), então, por definição do produto escalar, a equação acima deve ser escrita também como:

$$dU = F\, ds \cos\theta$$

O trabalho expresso pela equação pode ser entendido de uma destas duas maneiras: ou como produto da força F e do componente do deslocamento na direção da aplicação da força, isto é, $ds \cos\theta$; ou como o produto de ds e do componente da força na direção do deslocamento, isto é, $F \cos\theta$. Veja que, se

$0° \leq \theta < 90°$, de modo que o componente da força e o deslocamento têm o *mesmo sentido*, o trabalho é considerado *positivo*, ao passo que, se $90° < \theta \leq 180°$, esses vetores terão *sentidos opostos* e, portanto, o trabalho será *negativo*. Veja também que $dU = 0$ se a força é *perpendicular* ao deslocamento, pois $\cos 90° = 0$, ou se a força é aplicada a um *ponto fixo*, e nesse caso o deslocamento $ds = 0$.

A unidade básica usada para o trabalho é uma combinação das unidades de força e deslocamento. No sistema SI um *joule* (J) é equivalente ao trabalho realizado por uma força de 1 newton que se desloca 1 m em sua direção (1 J = 1 N·m). No sistema FPS, o trabalho é definido em unidades de pés·lb. O momento de uma força tem a mesma combinação de unidades, entretanto os conceitos de momento e trabalho não possuem relação. Um momento é uma grandeza vetorial, enquanto o trabalho é escalar.



(a) (b) (c)

Figura 11.2

Trabalho Realizado por Binário. As duas forças de um binário realizam trabalho quando ele *gira* em relação a um eixo perpendicular ao seu plano. Para mostra isso, considere o corpo da Figura 11.2*a*, que está submetido à ação de um binário cuja intensidade do momento é $M = Fr$. Qualquer deslocamento infinitesimal do corpo pode ser considerado como a combinação de uma translação e uma rotação. Quando o corpo se *translada*, de modo que o *componente do deslocamento* ao longo da linha de ação de cada força é ds_t, claramente o trabalho 'positivo' de uma força ($F\,ds_t$) *cancela* o trabalho 'negativo' da outra força ($-F\,ds_t$) (Figura11.2*b*). Considere agora uma *rotação* infinitesimal $d\theta$ de um corpo em relação a um eixo perpendicular ao plano do binário, que intercepta esse plano no ponto O (Figura 11.2*c*). (Para a discussão, qualquer outro ponto no plano pode ser considerado.) Como mostrado, cada força sofre um deslocamento $ds_\theta = (r/2)\,d\theta$ na direção da força, portanto o trabalho realizado pelas duas forças é:

$$dU = F\left(\frac{r}{2}d\theta\right) + F\left(\frac{r}{2}d\theta\right) = (Fr)\,d\theta$$

ou

$$dU = M\,d\theta$$

O trabalho resultante é *positivo* quando o sentido de $\mathbf{M}$ é o *mesmo* que o de $d\boldsymbol{\theta}$ e negativo quando eles têm sentidos opostos. Como no caso do vetor do momento, *a direção e o sentido* de $d\boldsymbol{\theta}$ são definidos pela regra da mão direita, onde os dedos da mão direita seguem o sentido de rotação e o polegar indica a direção de $d\boldsymbol{\theta}$. Logo, a linha de ação de $d\boldsymbol{\theta}$ será *paralela* à linha de ação de $\mathbf{M}$ se o movimento do corpo ocorrer no *mesmo plano*. Se o corpo rotacionar no espaço, o componente de $d\boldsymbol{\theta}$ na direção de M será necessário. Portanto, em geral, o trabalho realizado pelo binário é definido pelo produto escalar, $dU = \mathbf{M} \cdot d\boldsymbol{\theta}$.

Trabalho Virtual. A definição de trabalho de uma força e de um binário tem sido apresentada em função de *movimentos reais* expressos por um deslocamento infinitesimal com intensidades ds e $d\theta$. Considere agora um *movimento imaginário* ou *virtual*, o qual indica um deslocamento ou rotação que é *suposto* e *na realidade não existe*. Esses movimentos são quantidades infinitesimais de primeira ordem e são representados pelos símbolos δs e $\delta\theta$ (delta *s e delta* θ), respectivamente. O *trabalho virtual* realizado por uma força sujeita a um deslocamento virtual δs é:

$$\boxed{\delta U = F \cos\theta \, \delta s} \qquad (11.1)$$

Analogamente, quando um binário está sujeito a uma rotação virtual $\delta\theta$ no plano do binário, o *trabalho virtual* é:

$$\boxed{\delta U = M \, \delta\theta} \qquad (11.2)$$

11.2 PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS PARA UM PONTO MATERIAL E PARA UM CORPO RÍGIDO

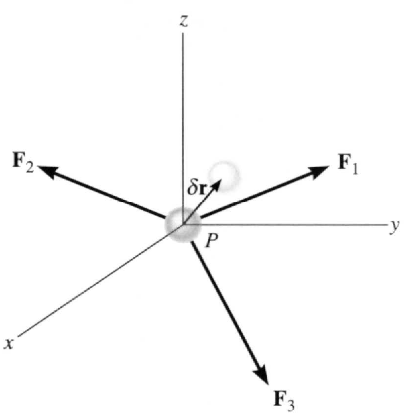


Figura 11.3

Partícula. Se o ponto material da Figura 11.3 está sujeito a um deslocamento virtual ou imaginário $\delta\mathbf{r}$, então o trabalho virtual (δU) realizado pelo sistema de forças torna-se:

$$\begin{aligned} \delta U &= \Sigma\mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r} \\ &= (\Sigma F_x\mathbf{i} + \Sigma F_y\mathbf{j} + \Sigma F_z\mathbf{k})\cdot(\delta x\mathbf{i} + \delta y\mathbf{j} + \delta z\mathbf{k}) \\ &= \Sigma F_x\,\delta x + \Sigma F_y\,\delta y + \Sigma F_z\,\delta z \end{aligned}$$

Para o equilíbrio é necessário que $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma F_z = 0$ e, assim, o trabalho virtual também deve ser nulo, isto é:

$$\delta U = 0$$

Em outras palavras, podemos escrever três equações independentes para o trabalho virtual correspondendo às três equações de equilíbrio.

Por exemplo, considere o diagrama de corpo livre para uma bola que está em repouso no piso (Figura 11.4). Se nós 'imaginarmos' a bola sendo deslocada para baixo de uma quantidade virtual δy, então o peso realizará trabalho virtual positivo, $W\delta y$, e a força normal realizará trabalho virtual negativo, $-N\delta y$. Para o equilíbrio, o trabalho virtual total deve ser nulo, assim: $\delta U = W\delta y - N\delta y = (W - N)\delta y = 0$. Uma vez que $\delta y \neq 0$, então $N = W$, como necessário.

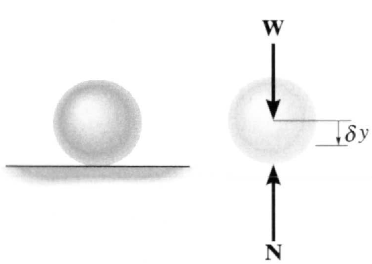


Figura 11.4

Corpo Rígido. De uma forma análoga, nós podemos também escrever um conjunto de três equações para o trabalho virtual ($\delta U = 0$) para o corpo rígido sujeito a um sistema de forças coplanares. Se essas equações envolvem translações virtuais separadas na direções x, y e uma rotação virtual em relação a um eixo perpendicular ao plano x–y e que passa por um ponto arbitrário O, então podemos mostrar que elas corresponderão às três equações de equilíbrio $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ e $\Sigma M_O = 0$. Quando escrevemos essas equações, *não é necessário* incluir o trabalho realizado pela ação das *forças internas* atuantes no corpo, pois um corpo rígido *não se deforma* quando sujeito a um carregamento externo. Além disso, quando o corpo se move mediante um deslocamento virtual, as forças internas aparecem aos pares colineares opostos, de modo que o trabalho correspondente realizado por cada par de força é *cancelado*.

Para demonstrar uma aplicação, considere a viga simplesmente apoiada da Figura 11.5*a*. Quando a viga sofre uma rotação virtual $\delta\theta$, em relação ao ponto B (Figura 11.5b), as únicas forças que realizam trabalho são $\mathbf{P}$ e $\mathbf{A}_y$. Como $\delta y = l\delta\theta$ e $\delta y' = (l/2)\delta\theta$, a equação do trabalho virtual para esse caso é $\delta U = A_y(l\delta\theta) - P(l/2)\delta\theta = (A_y - P/2)l\delta\theta = 0$. Sendo $\delta\theta \neq 0$, então $A_y = P/2$. Excluindo $\delta\theta$, veja que os termos entre parênteses representam, na realidade, o equilíbrio de momentos em relação ao ponto B.

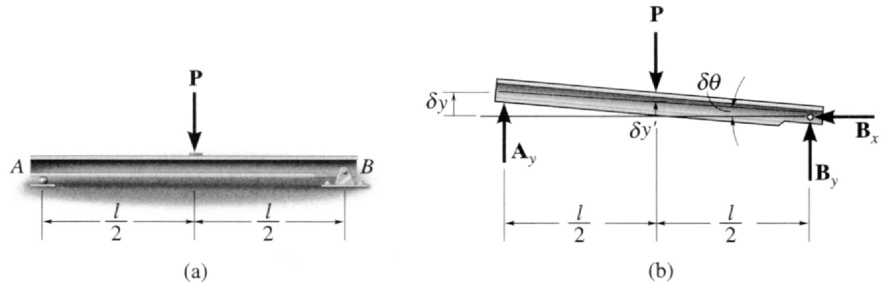
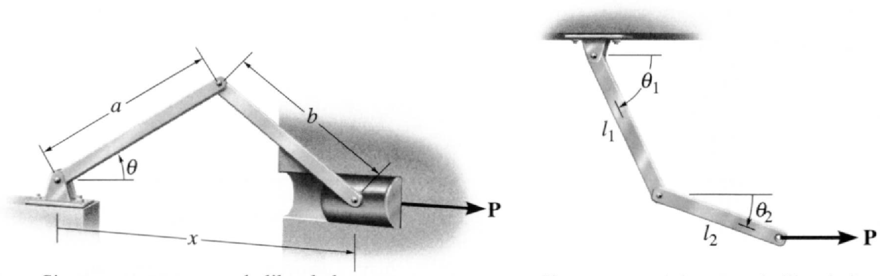


Figura 11.5

No caso de um ponto material, não há vantagens adicionais em resolver os problemas de equilíbrio de corpo rígido usando o princípio dos trabalhos virtuais. Isso porque, para cada aplicação da equação do trabalho virtual, o deslocamento virtual, comum a cada termo, é fatorado, levando a uma equação que pode ser obtida de *forma mais direta* pela simples aplicação das equações de equilíbrio.

11.3 Princípio dos Trabalhos Virtuais para um Sistema de Corpos Rígidos Interligados

O método dos trabalhos virtuais é mais adequado para resolver problemas de equilíbrio que envolvam um sistema de vários corpos rígidos *interligados*, tais como aqueles mostrados na Figura 11.6. Antes de aplicarmos o princípio dos trabalhos virtuais para esse sistema, entretanto, devemos primeiro especificar o número de graus de liberdade para um sistema e estabelecer as coordenadas que definem a posição desse sistema.



Sistema com um grau de liberdade (a) Sistema com dois graus de liberdade (b)

Figura 11.6

Graus de Liberdade. Um sistema de corpos interligados assume uma configuração que pode ser especificada quando se conhece a posição de um número determinado de pontos do sistema. Essas posições são definidas usando *coordenadas independentes q*, que são medidas a partir de pontos de referência fixos. Para cada coordenada estabelecida, o sistema terá *um grau de liberdade* para deslocamento ao longo do eixo coordenado que é composto com as restrições à ação dos apoios. Assim, um sistema com n graus de liberdade requer n coordenadas independentes q_n para determinar a localização de cada um dos elementos do sistema. Por exemplo, o arranjo composto de um braço e de um bloco que escorrega, como mostrado na Figura 11.6a, é um exemplo

Durante a sua operação, o elevador tipo pantógrafo tem um grau de liberdade. Sem desmembrar o mecanismo, a força hidráulica necessária para executar a elevação pode ser determinada diretamente pela utilização do princípio dos trabalhos virtuais.

de um sistema com um grau de liberdade. A coordenada independente $q = \theta$ pode ser usada para especificar a localização de dois braços e do bloco. A coordenada x também pode ser usada como coordenada independente. Entretanto, como o bloco é restrito dentro da fenda, x não é independente de θ; ao contrário, pode ser relacionado a θ usando-se a lei dos cossenos, $b^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cos \theta$. O arranjo com duplo braço mostrado na Figura 11.6*b* é um exemplo de sistema com dois graus de liberdade. Para especificar a localização de cada braço, as coordenadas θ_1 e θ_2 devem ser conhecidas, pois a rotação de um braço é independente da rotação do outro.

Princípio dos Trabalhos Virtuais. O princípio dos trabalhos virtuais para sistemas de corpos rígidos com ligações *sem a presença de atrito* pode ser estabelecido do seguinte modo: *um sistema de corpos rígidos interligados estará em equilíbrio se o trabalho virtual realizado por todas as forças e momentos externos atuantes no sistema for nulo para cada deslocamento virtual independente do sistema.* Matematicamente, podemos expressar esse conceito como:

$$\boxed{\delta U = 0} \tag{11.3}$$

onde δU representa o trabalho virtual de todas as forças externas (e momentos) que atuam sobre o sistema durante qualquer deslocamento virtual independente.

Conforme estabelecido anteriormente, se um sistema tem n graus de liberdade, ele tem n coordenadas independentes q_n para especificar completamente a localização do sistema. Assim, é possível escrever n equações de trabalhos virtuais independentes para o sistema, uma para cada deslocamento virtual realizado ao longo de cada eixo coordenado independente, mantidas as demais $n - 1$ coordenadas independentes *fixas*.[1]

PONTOS IMPORTANTES

- Uma força realiza trabalho quando se desloca na direção da sua linha de ação. Um momento realiza trabalho quando se move através de uma rotação colinear. Especificamente, trabalho positivo é realizado quando a força ou o momento e seus deslocamentos têm o mesmo sentido.
- O princípio dos trabalhos virtuais em geral é usado para determinar a configuração de equilíbrio para uma série de elementos interligados.
- Um deslocamento virtual é imaginário, isto é, não realizado realmente. Ele é um deslocamento infinitesimal dado na direção positiva das coordenadas de posição.
- Forças ou momentos que não se deslocam virtualmente não realizam trabalho virtual.

PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

A equação do trabalho virtual pode ser usada para resolver problemas envolvendo um sistema de corpos interligados sem atrito tendo um grau de liberdade pelo seguinte procedimento.

Diagrama de Corpo Livre

- Trace o diagrama de corpo livre do sistema de corpos interligados e defina uma *coordenada independente q*.
- Esquematize a 'posição deslocada' do sistema no diagrama de corpo livre quando ele está sujeito a um deslocamento virtual positivo δq.

[1] Esse método de aplicação do princípio dos trabalhos virtuais é algumas vezes chamado de método dos deslocamentos virtuais, pois um deslocamento virtual é aplicado, resultando no cálculo de uma força real. Embora isso não seja utilizado aqui, poderíamos também empregar o princípio dos trabalhos virtuais como um método de forças virtuais. Este método é freqüentemente usado para determinar o deslocamento de pontos em corpos deformáveis. Veja R. C. Hibbeler *Resistência dos materiais*, 5. ed., Prentice Hall, 2004.

PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE (CONTINUAÇÃO)

Deslocamentos Virtuais

- Indique as *coordenadas de posição* s_i, medidas a partir de um *ponto fixo* no diagrama de corpo livre de cada uma das i forças e momentos 'atuantes', isto é, que realizam trabalho.
- Cada eixo coordenado deve ser paralelo à linha de ação da força 'atuante' e, assim, o trabalho ao longo do eixo coordenado pode ser calculado.
- Relacione cada coordenada de posição s_i com a coordenada independente q; em seguida, efetue as *diferenciais* dessas expressões para obter os deslocamentos virtuais δs_i em função de δq.

Equações do Trabalho Virtual

- Escreva a *equação do trabalho virtual* para o sistema supondo que, sendo possível ou não, todas as coordenadas de posição s_i sofram um deslocamento virtual *positivo* δs_i.
- Usando as relações para δs_i, expresse o trabalho de *cada* força ou momento 'atuantes' na equação em função de um *único* deslocamento virtual independente δq.
- Fatore esse deslocamento comum a todos os termos e resolva para uma força, momento ou posição de equilíbrio desconhecidos q.
- Se o sistema contém n graus de liberdade, n coordenadas independentes q_n devem ser utilizadas, seguindo o procedimento acima e tendo *apenas uma* das coordenadas independentes sujeita a um deslocamento virtual, enquanto $n - 1$ coordenadas *permanecem fixas*. Dessa maneira, n equações do trabalho virtual podem ser escritas, uma para cada coordenada independente.

EXEMPLO 11.1

Determine o ângulo θ para o equilíbrio dos dois elementos de ligação mostrados na Figura 11.7*a*. Cada elemento possui massa de 10 kg.

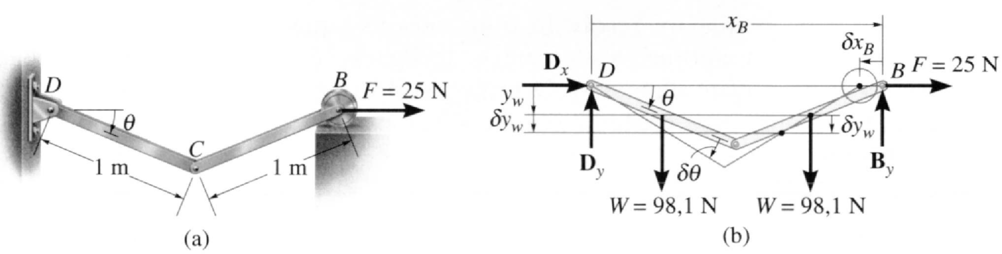


Figura 11.7

SOLUÇÃO

Diagrama de Corpo Livre. O sistema tem um grau de liberdade, sendo que a localização dos elementos de ligação pode ser obtida com a utilização de uma única coordenada independente ($q =$) θ. Como mostrado no diagrama de corpo livre na Figura 11.7*b*, quando θ sofre uma rotação virtual *positiva* (sentido horário) $\delta\theta$, somente as forças atuantes, $\mathbf{F}$ e dois pesos de 98,1 N, realizam trabalho. (As forças de reação $\mathbf{D}_x$ e $\mathbf{D}_y$ são fixas, e $\mathbf{B}_y$ não se move ao longo de suas linhas de ação.)

Deslocamentos Virtuais. Se a origem das coordenadas é estabelecida no apoio *fixo* D, a localização de $\mathbf{F}$ e $\boldsymbol{W}$ pode ser especificada pelas *coordenadas de posição* x_B e y_w, como mostrado na figura. Segundo as regras para determinar o trabalho, veja que essas coordenadas são paralelas às linhas de ação das suas forças associadas.

Expressando as coordenadas de posição em função da coordenada independente θ e calculando suas derivadas, temos:

$$x_B = 2(1 \cos \theta) \text{ m} \qquad \delta x_B = -2 \operatorname{sen} \theta \, \delta\theta \text{ m} \qquad (1)$$

$$y_w = \tfrac{1}{2}(1 \operatorname{sen} \theta) \text{ m} \qquad \delta y_w = 0{,}5 \cos \theta \, \delta\theta \text{ m} \qquad (2)$$

Como pode ser visto pelos *sinais* dessas equações, também indicados na Figura 11.7*b*, um *aumento* em θ (isto é, $\delta\theta$) provoca uma *diminuição* em x_B e um *aumento* em y_w.

Equação do Trabalho Virtual. Se os deslocamentos virtuais δx_B, δy_w *são positivos*, então as forças **W** e **F** devem realizar trabalho positivo, sendo que essas forças e seus deslocamentos correspondentes deverão ter o mesmo sentido. Conseqüentemente, a equação do trabalho virtual $\delta\theta$ é:

$$\delta U = 0; \qquad W\,\delta y_w + W\,\delta y_w + F\,\delta x_B = 0 \qquad (3)$$

Substituindo as equações 1 e 2 na Equação 3 segundo as regras para relacionar os deslocamentos virtuais e o deslocamento virtual comum $\delta\theta$, temos:

$$98{,}1(0{,}5 \cos \theta \, \delta\theta) + 98{,}1(0{,}5 \cos \theta \, \delta\theta) + 25(-2 \operatorname{sen} \theta \, \delta\theta) = 0$$

Veja que o 'trabalho negativo' realizado pela força **F** (força em sentido oposto ao deslocamento) foi *considerado* na equação acima com o 'sinal negativo' da Equação 1. Fatorando o *deslocamento comum* $\delta\theta$ e resolvendo para θ, notando que $\delta\theta \neq 0$, temos:

$$(98{,}1 \cos \theta - 50 \operatorname{sen} \theta)\,\delta\theta = 0$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1}\frac{98{,}1}{50} = 63^\circ \qquad \textit{Resposta}$$

Se o problema foi resolvido utilizando as equações de equilíbrio, seria necessário desmembrar os elementos de ligação e aplicar as três equações escalares para *cada* elemento. O princípio do trabalho virtual, por meio do cálculo, elimina esse procedimento, e a resposta do problema é obtida mais facilmente.

EXEMPLO 11.2

Determine o ângulo θ necessário para manter o equilíbrio do mecanismo mostrado na Figura 11.8*a*. Despreze o peso dos elementos de ligação. A mola está na situação não deformada quando $\theta = 0^\circ$ e é mantida na posição horizontal pelo rolete em *F*.

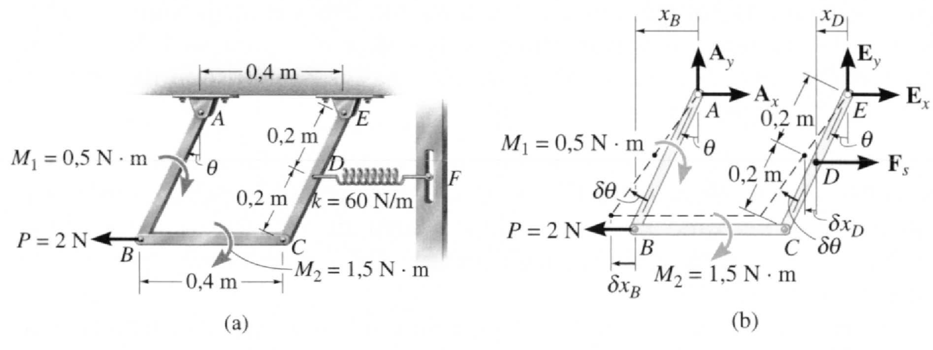


Figura 11.8

SOLUÇÃO

Diagrama de Corpo Livre. O mecanismo tem um grau de liberdade e, portanto, a localização de cada um dos elementos de ligação pode ser feita com a utilização de uma única coordenada independente θ. Quando θ está sujeita a um deslocamento virtual *positivo* $\delta\theta$, como mostrado no diagrama de corpo livre da Figura 11.8*b*, os elementos de ligação AB e EC rotacionam de uma mesma quantidade (ângulo), pois eles têm o mesmo comprimento, e o elemento BC tem apenas translação. Como o momento realiza trabalho quando sofre rotação, o trabalho realizado por $\mathbf{M}_2$ é nulo. As forças reativas em A e E não realizam trabalho. Por quê?

Deslocamentos Virtuais. As coordenadas de posição x_B e x_D são *paralelas* às linhas de ação de $\mathbf{P}$ e $\mathbf{F}_s$ e localizam as forças em relação aos *pontos fixos* A e E. Da Figura 11.8*b*:

$$x_B = 0{,}4 \text{ sen } \theta \text{ m}$$

$$x_D = 0{,}2 \text{ sen } \theta \text{ m}$$

Desse modo:

$$\delta x_B = 0{,}4 \cos \theta \; \delta\theta \text{ m}$$

$$\delta x_D = 0{,}2 \cos \theta \; \delta\theta \text{ m}$$

Equação do Trabalho Virtual. Para deslocamentos virtuais *positivos*, $\mathbf{F}_s$ é oposto a $\delta \mathbf{x}_D$ e, portanto, a força realiza um trabalho negativo. Assim:

$$\delta U = 0; \qquad M_1 \, \delta\theta + P \, \delta x_B - F_s \, \delta x_D = 0$$

Relacionando cada deslocamento virtual com o deslocamento virtual *comum* $\delta\theta$, temos:

$$0{,}5 \, \delta\theta + 2(0{,}4 \cos \theta \, \delta\theta) - F_s(0{,}2 \cos \theta \, \delta\theta) = 0$$

$$(0{,}5 + 0{,}8 \cos \theta - 0{,}2 F_s \cos \theta) \, \delta\theta = 0 \qquad (1)$$

Para o ângulo arbitrário θ, a mola é deformada a distância $x_D = (0{,}2 \text{ sen } \theta)$ m; portanto $F_s = 60$ N/m $(0{,}2 \text{ sen } \theta)$ m $= (12 \text{ sen } \theta)$ N. Fazendo a substituição na Equação 1 e sabendo que $\delta\theta \neq 0$, temos:

$$0{,}5 + 0{,}8 \cos \theta - 0{,}2(12 \text{ sen } \theta) \cos \theta = 0$$

Como sen $2\theta = 2$ sen θ cos θ, então:

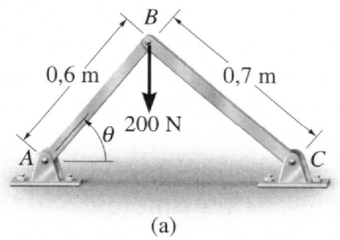
$$1 = 2{,}4 \text{ sen } 2\theta - 1{,}6 \cos \theta$$

Resolvendo para θ por tentativa e erro, temos:

$$\theta = 36{,}3^\circ \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

EXEMPLO 11.3

Determine a força horizontal C_x que o apoio em C deve aplicar no elemento BC para manter o mecanismo mostrado na Figura 11.9*a* na posição de equilíbrio quando $\theta = 45^\circ$. Despreze o peso dos elementos de ligação.



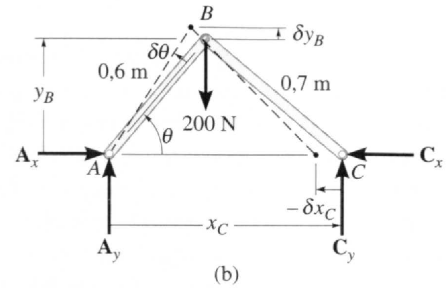


Figura 11.9

SOLUÇÃO

Diagrama de Corpo Livre. A reação $\mathbf{C}_x$ pode ser obtida pela *liberação* da restrição ao apoio em C de se movimentar na direção x e permitindo, portanto, que a estrutura se desloque nessa direção. O sistema tem somente um grau de liberdade, definido pela coordenada independente θ (Figura 11.9*b*). Quando θ sofre um deslocamento virtual *positivo* $\delta\theta$, somente $\mathbf{C}_x$ e a força de 200 N realizam trabalho.

Deslocamentos Virtuais. As forças $\mathbf{C}_x$ e de 200 N são localizadas a partir do ponto fixo com origem em A usando as coordenadas de posição y_B e x_C. Da Figura 11.9*b*, x_C pode ser relacionada com θ pela 'lei dos cossenos'. Portanto:

$$(0{,}7)^2 = (0{,}6)^2 + x_C^2 - 2(0{,}6)x_C \cos\theta \tag{1}$$

$$0 = 0 + 2x_C\,\delta x_C - 1{,}2\,\delta x_C \cos\theta + 1{,}2x_C \operatorname{sen}\theta\,\delta\theta$$

$$\delta x_C = \frac{1{,}2x_C \operatorname{sen}\theta}{1{,}2\cos\theta - 2x_C}\delta\theta \tag{2}$$

Além disso:

$$y_B = 0{,}6 \operatorname{sen}\theta$$

$$\delta y_B = 0{,}6 \cos\theta\,\delta\theta \tag{3}$$

Equações do Trabalho Virtual. Quando y_B e x_C sofrem um deslocamento virtual *positivo* δy_B e δx_C, $\mathbf{C}_x$ e a força de 200 N realizam *trabalho negativo*, pois ambas estão agindo no sentido oposto de $\delta\mathbf{y}_B$ e $\delta\mathbf{x}_C$. Portanto:

$$\delta U = 0; \qquad -200\,\delta y_B - C_x\,\delta x_C = 0$$

Substituindo as equações 2 e 3 na equação anterior, fatorando $\delta\theta$ e resolvendo C_x, temos:

$$-200(0{,}6\cos\theta\,\delta\theta) - C_x\frac{1{,}2x_C \operatorname{sen}\theta}{1{,}2\cos\theta - 2x_C}\delta\theta = 0$$

$$C_x = \frac{-120\cos\theta\,(1{,}2\cos\theta - 2x_C)}{1{,}2x_C \operatorname{sen}\theta} \tag{4}$$

Para a posição de equilíbrio necessária $\theta = 45°$, o valor de C_x correspondente pode ser encontrado usando-se a Equação 1; nesse caso:

$$x_C^2 - 1{,}2\cos 45°\,x_C - 0{,}13 = 0$$

Resolvendo para a raiz positiva, temos:

$$x_C = 0{,}981 \text{ m}$$

Assim, da Equação 4:

$$C_x = 114 \text{ N} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 11.4

Determine a posição de equilíbrio para as duas hastes de ligação mostradas na Figura 11.10*a*. Despreze o peso das hastes.

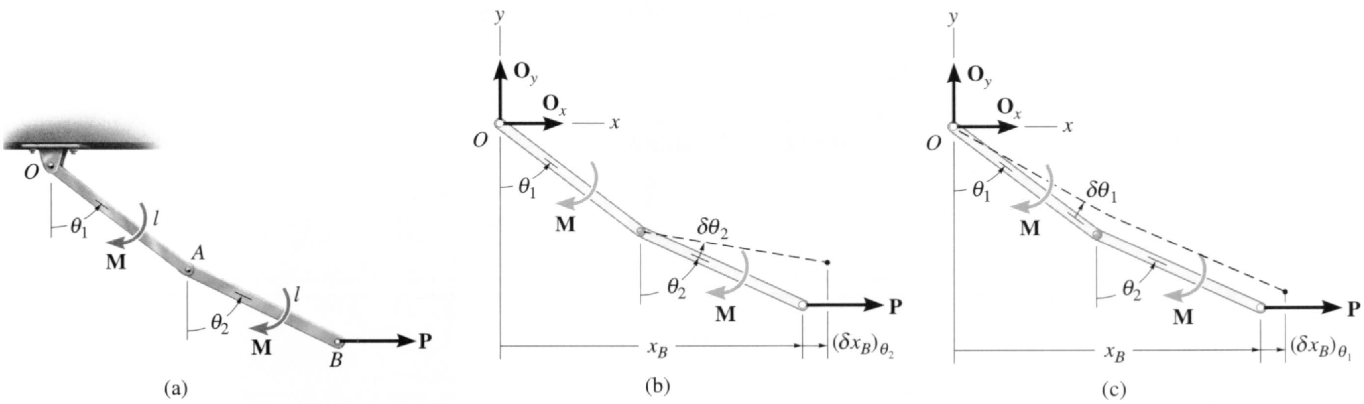


Figura 11.10

SOLUÇÃO

O sistema tem dois graus de liberdade, pois duas *coordenadas independentes* θ_1 e θ_2 devem ser conhecidas para localizar a posição das hastes. A coordenada de posição x_B, medida a partir do ponto fixo O, é utilizada para especificar a localização de **P** (figuras 11.10*b* e 11.10*c*).

Se θ_1 é mantido *fixo* e θ_2 varia de uma quantidade $\delta\theta_2$, como mostrado na Figura 11.10*b*, a equação do trabalho virtual é:

$$[\delta U = 0]_{\theta_2}; \qquad P(\delta x_B)_{\theta_2} - M\,\delta\theta_2 = 0 \qquad (1)$$

P e M representam as intensidades da força e do momento atuantes na haste AB.

Quando θ_2 está fixa e θ_1 varia de uma quantidade $\delta\theta_1$, como mostrado na Figura 11.10*c*, então AB sofre translação e a equação do trabalho virtual fica:

$$[\delta U = 0]_{\theta_1}; \qquad P(\delta x_B)_{\theta_1} - M\,\delta\theta_1 = 0 \qquad (2)$$

A *coordenada de posição* x_B pode ser relacionada com as coordenadas independentes θ_1 e θ_2 pela equação:

$$x_B = l \operatorname{sen} \theta_1 + l \operatorname{sen} \theta_2 \qquad (3)$$

Para se obter a variação δx_B em função de $\delta\theta_2$, é necessária a *derivada parcial* de x_B com relação a θ_2, pois x_B é uma função tanto de θ_1 quanto de θ_2. Portanto:

$$\frac{\partial x_B}{\partial \theta_2} = l \cos \theta_2 \qquad (\delta x_B)_{\theta_2} = l \cos \theta_2\, \delta\theta_2$$

Substituindo na Equação 1, temos:

$$(Pl \cos\theta_2 - M)\,\delta\theta_2 = 0$$

Como $\delta\theta_2 \neq 0$, então:

$$\theta_2 = \cos^{-1}\left(\frac{M}{Pl}\right) \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Usando a Equação 3 para obter a variação de x_B com θ_1, temos:

$$\frac{\partial x_B}{\partial\theta_1} = l\cos\theta_1 \quad (\delta x_B)_{\theta_1} = l\cos\theta_1\,\delta\theta_1$$

Substituindo na Equação 2, temos:

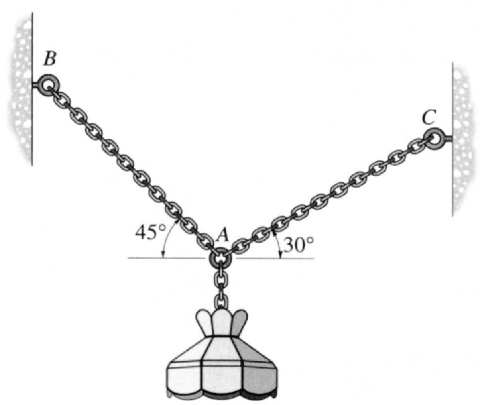
$$(Pl \cos\theta_1 - M)\,\delta\theta_1 = 0$$

Sendo $\delta\theta_1 \neq 0$, então:

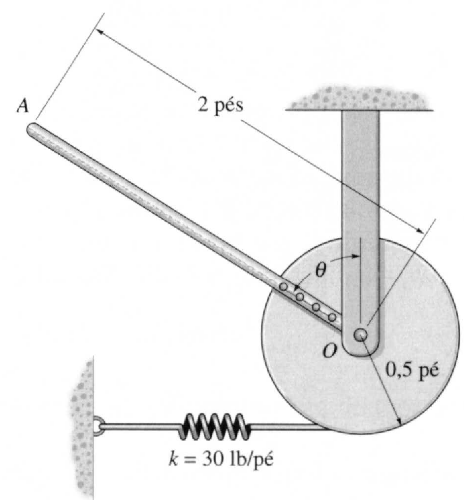
$$\theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{M}{Pl}\right) \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

PROBLEMAS

11.1 Use o método do trabalho virtual para determinar as tensões no cabo *AC*. A lâmpada pesa 10 lb.



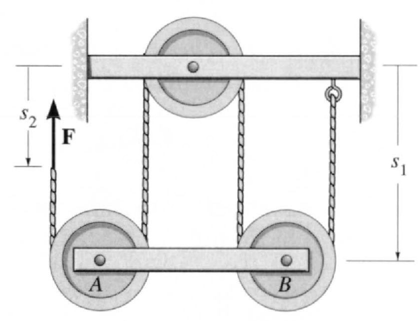
Problema 11.1



Problema 11.2

11.2 A barra de massa uniforme *OA* tem peso de 10 lb. Quando ela está na posição vertical, $\theta = 0°$, a mola não está deformada. Determine o ângulo θ para o equilíbrio, se a extremidade da mola está presa na borda do disco e o acompanha quando ele gira.

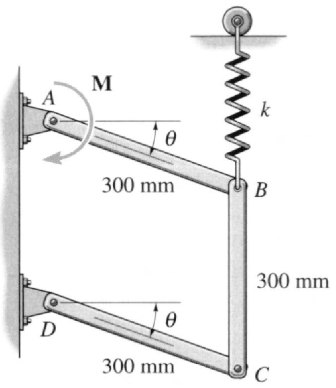
11.3 Determine a força **F** atuante na corda usada para manter o equilíbrio da barra horizontal *AB* de 10 kg. *Dica:* expresse o *comprimento vertical constante* da corda *l* em função das coordenadas de posição s_1 e s_2. A derivada dessa equação nos dá uma relação entre δ_1 e δ_2.



Problema 11.3

*■**11.4** Cada elemento do mecanismo articulado por pinos tem massa de 8 kg. Se a mola está na situação não deformada quando $\theta = 0°$, determine o ângulo θ de equilíbrio. Considere que $k = 2.500$ N/m e $M = 50$ N · m.

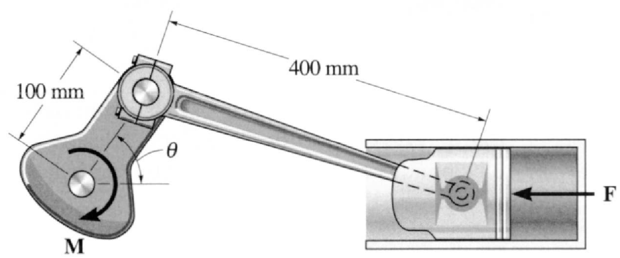
11.5 Cada elemento do mecanismo articulado por pinos tem massa de 8 kg. Se a mola está na posição não deformada quando $\theta = 0°$, determine a rigidez k necessária à mola para que o mecanismo esteja em equilíbrio quando $\theta = 30°$. Considere que $\mathbf{M} = 0$.



Problemas 11.4/5

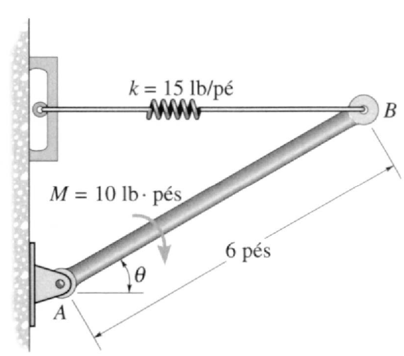
11.6 O sistema eixo-manivela está sujeito a um torque de $M = 50$ N · m. Determine a força de compressão horizontal F atuante no pistão para que haja equilíbrio quando $\theta = 60°$.

11.7 O sistema eixo manivela está sujeito a um torque de $M = 50$ N · m. Determine a força de compressão horizontal F e construa o gráfico da força resultante F (ordenada) *versus* o ângulo θ (abscissa) para o intervalo $0° \leq \theta \leq 90°$.



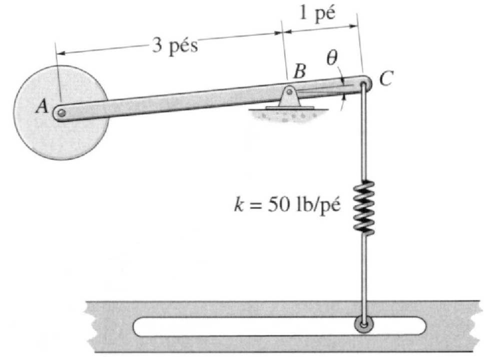
Problemas 11.6/7

*__11.8__ Determine a força desenvolvida na mola necessária para manter a barra uniforme AB, de peso de 10 lb, em equilíbrio quando $\theta = 35°$.



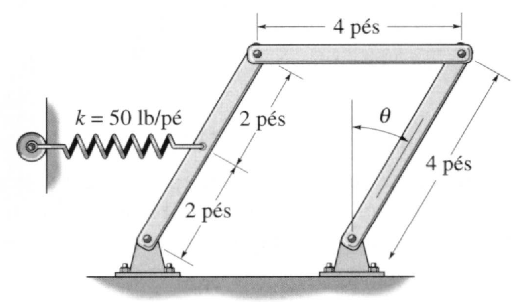
Problema 11.8

11.9 Determine o ângulo θ para o equilíbrio do disco de peso de 4 lb utilizando o princípio do trabalho virtual. Despreze o peso da barra. A mola está na posição não deformada quando $\theta = 0°$ e sempre se encontra na posição vertical por causa do pino guia.



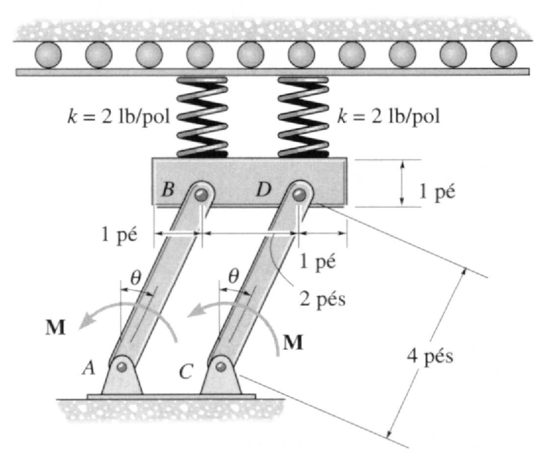
Problema 11.9

11.10 Se cada uma das três hastes do mecanismo tem peso de 20 lb, determine o ângulo θ para o equilíbrio da mola, cujo pino guia sempre a mantém na posição horizontal e na posição não deformada quando $\theta = 0°$.



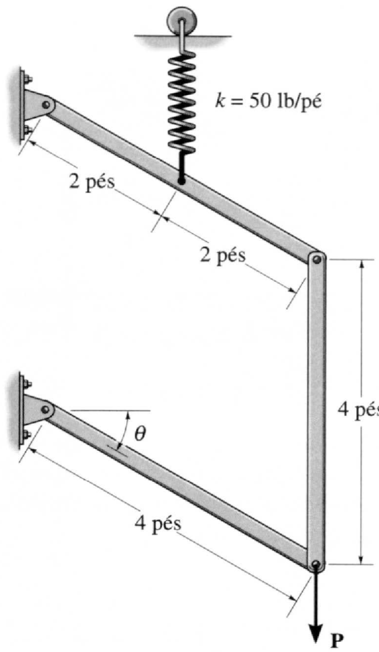
Problema 11.10

11.11 Quando $\theta = 20°$, o bloco uniforme de peso de 50 lb comprime duas molas verticais com 4 pol. Se as hastes uniformes AB e CD têm cada uma peso de 10 lb, determine a intensidade do momento atuante $\mathbf{M}$ necessário para manter o equilíbrio quando $\theta = 20°$.



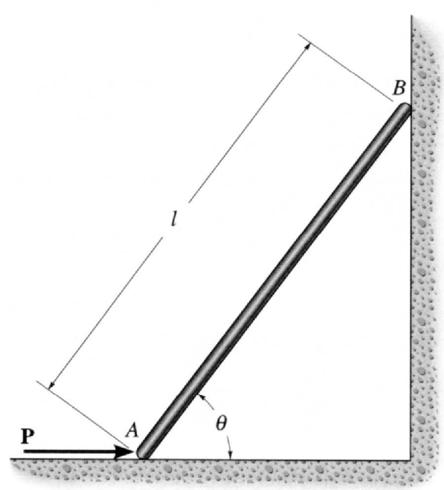
Problema 11.11

*11.12 A mola está na posição não deformada quando $\theta = 0°$. Se $P = 8$ lb, determine o ângulo θ para o equilíbrio. Pela ação do pino guia, a mola sempre está na posição vertical. Despreze o peso das hastes.



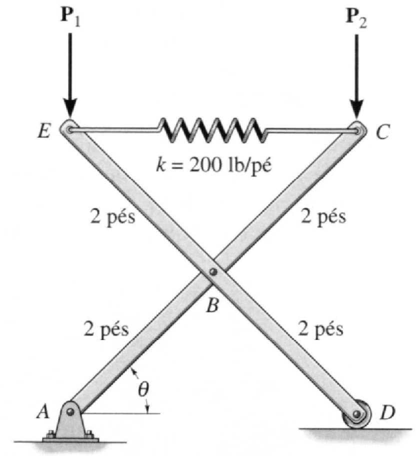
Problema 11.12

11.13 A barra fina de peso W está em repouso sobre uma parede e um piso lisos. Determine a intensidade da força **P** necessária para mantê-la em equilíbrio em um determinado ângulo θ.



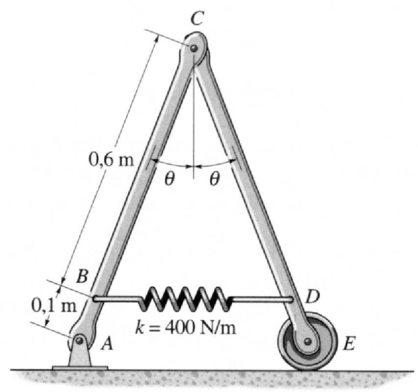
Problema 11.13

■11.14 As hastes com 4 pés de comprimento do mecanismo estão ligadas por pinos em seus pontos médios. Se as forças verticais P_1 e $P_2 = 30$ lb atuam nos pontos C e E, como mostrado na figura, determine o ângulo θ necessário para manter o equilíbrio. A mola está na posição não deformada quando $\theta = 45°$. Despreze o peso das hastes.



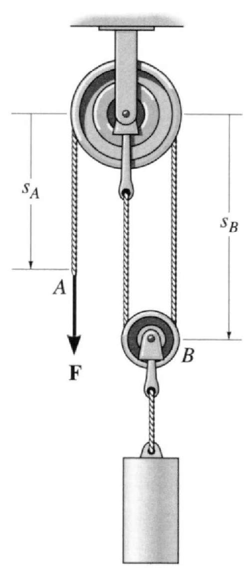
Problema 11.14

11.15 A mola tem comprimento, quando não deformada de 0,3 m. Determine o ângulo θ para manter o equilíbrio se as hastes uniformes têm cada uma massa de 5 kg.



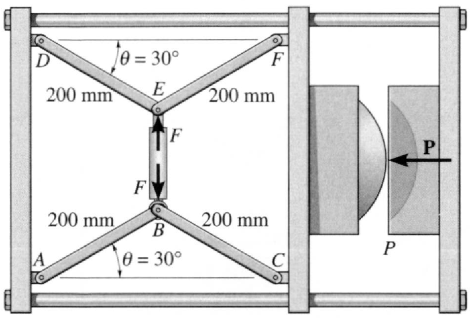
Problema 11.15

*11.16 Determine a força F necessária para levantar o bloco de peso de 100 lb. *Dica:* veja que as coordenadas s_A e s_B podem ser relacionadas com o comprimento vertical l da corda, que é constante.



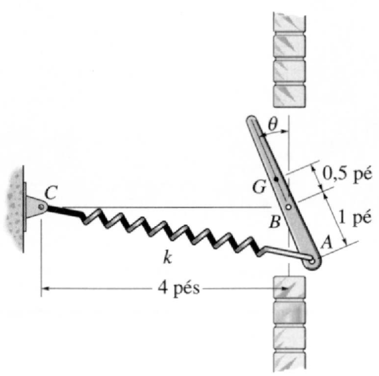
Problema 11.16

11.17 O equipamento mostrado na figura é usado para estampar placas metálicas. Ele consiste em duas alavancas articuladas ABC e DEF, que são operadas pelo cilindro hidráulico BE. As alavancas articuladas empurram a haste móvel FC para a frente, pressionando a placa p contra a cavidade. Se a força que a placa exerce na cabeça é $P = 8$ kN, determine a força **F** no cilindro hidráulico quando $\theta = 30°$.



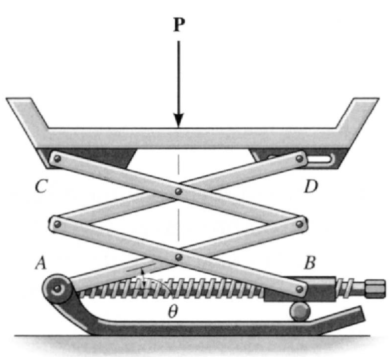
Problema 11.17

11.18 A placa de respiro é articulada em B por um pino. Se ela pesa 15 lb e tem centro de gravidade em G, determine a rigidez k da mola para que a placa permaneça em equilíbrio quando $\theta = 30°$. A mola está na posição não deformada quando $\theta = 0°$.



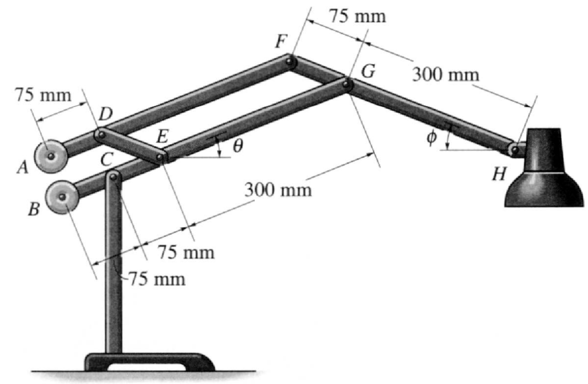
Problema 11.18

11.19 O macaco sanfona suporta uma carga **P**. Determine a força axial no parafuso necessária para o equilíbrio do macaco na posição θ. Cada uma das quatro hastes tem comprimento L e elas estão articuladas no ponto médio por um pino. Os pontos B e D podem se mover horizontalmente.



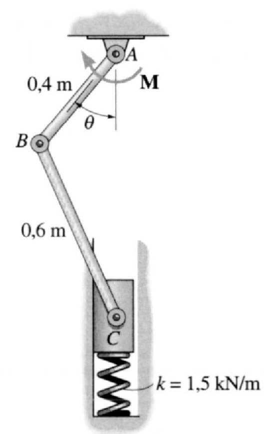
Problema 11.19

***11.20** Determine a massa de A e B necessária para manter a luminária da escrivaninha de massa 400 g em balanço para qualquer ângulo θ e ϕ. Despreze o peso do mecanismo e as dimensões da lâmpada.



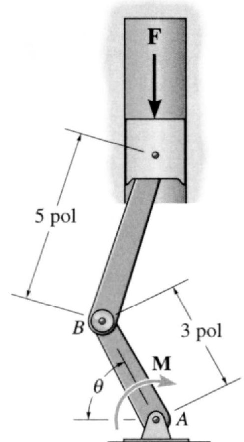
Problema 11.20

11.21 O pistão C se movimenta verticalmente entre duas paredes lisas. Se a mola de rigidez $k = 1{,}5$ kN/m está na posição não deformada quando $\theta = 0°$, determine o momento **M** que deve ser aplicado na haste AB para manter o mecanismo em equilíbrio quando $\theta = 30°$.



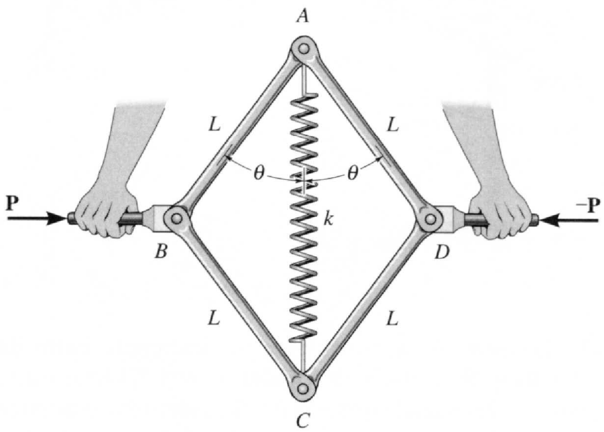
Problema 11.21

11.22 O sistema está sujeito a um torque $M = 50$ lb · pés. Determine a força vertical de compressão **F** aplicada no pistão para manter o equilíbrio quando $\theta = 60°$.



Problema 11.22

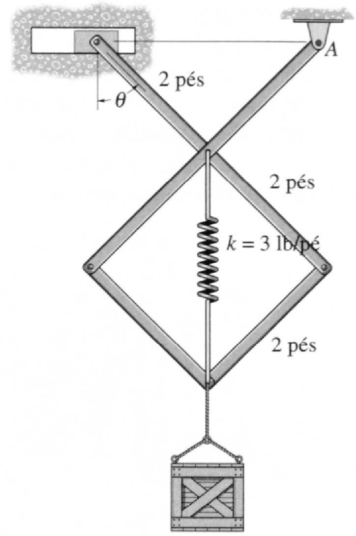
11.23 O equipamento é usado para exercícios. Ele consiste em quatro barras articuladas, cada uma com comprimento L, e na mola, que tem rigidez k e comprimento não deformado a ($< 2L$). Se as forças horizontais $\mathbf{P}$ e $-\mathbf{P}$ são aplicadas no cabo, de modo que θ decresce lentamente, determine o ângulo θ para o qual a intensidade de $\mathbf{P}$ torna-se máxima.



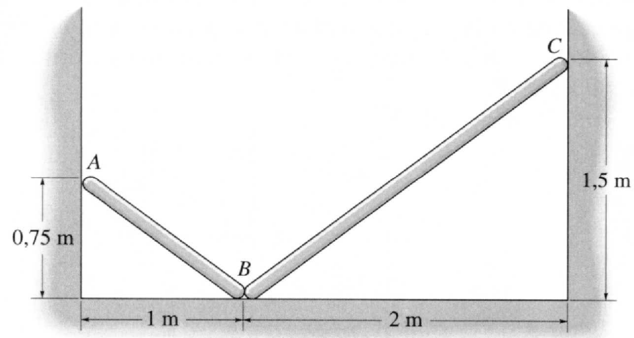
Problema 11.23

*__11.24__ Determine o peso W do caixote se o ângulo $\theta = 45°$. A mola está na posição não deformada quando $\theta = 60°$. Despreze o peso das hastes.

11.25 As barras AB e BC têm o centro de massa localizado em seus pontos médios. Se todas as superfícies de contato são lisas e BC tem massa de 100 kg, determine a massa adequada de AB necessária para o equilíbrio.



Probema 11.24



Problema 11.25

*11.4 FORÇAS CONSERVATIVAS

O trabalho realizado por uma força quando sujeita a um *deslocamento infinitesimal* foi definido como $dU = F\cos\theta \cdot ds$, Figura 11.1. Se a força é deslocada sobre uma trajetória de *comprimento finito s*, o trabalho é determinado pela integração ao longo da trajetória, isto é:

$$U = \int_s F \cos\theta\, ds$$

Para calcularmos a integral, é necessário obtermos uma relação entre F e o componente do deslocamento $ds\cos\theta$. Entretanto, em alguns casos o trabalho realizado por uma força não *depende* de sua trajetória e, em vez disso, depende somente de suas posições inicial e final da força ao longo da trajetória. Uma força com essa propriedade é chamada de *força conservativa*.

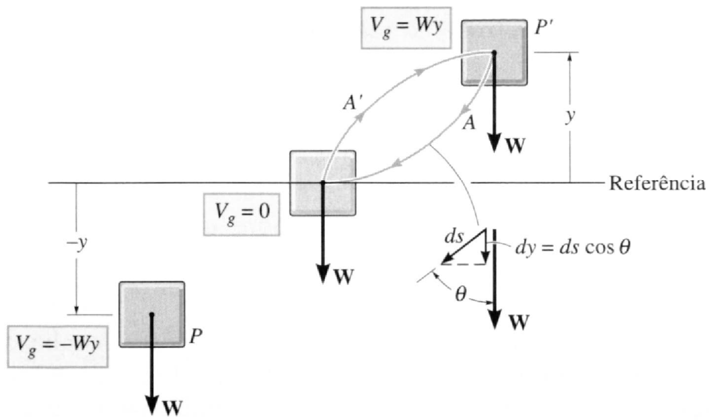


Figura 11.11

Peso. Considere o corpo da Figura 11.11, que inicialmente está em P'. Se ele está se movendo *para baixo* ao longo de uma *trajetória arbitrária* A para uma segunda posição, então, para dado deslocamento ds ao longo da trajetória, o componente do deslocamento na direção de **W** tem intensidade $d_y = ds \cos \theta$, como mostrado. Sendo ambas as forças no mesmo sentido, o trabalho é positivo; portanto:

$$U = \int_s W \cos\theta \, ds = \int_0^y W dy$$

ou

$$U = Wy$$

De maneira análoga, o trabalho realizado pela força peso quando o corpo se move de uma distância y voltando para P', ao longo da trajetória A', é dado por:

$$U = -Wy$$

Por que o trabalho é negativo?

O peso do corpo é, entretanto, uma força conservativa, pois o trabalho realizado pela força peso depende *apenas* do *deslocamento vertical* do corpo e é independente da trajetória ao longo da qual ele se move.

Mola Elástica. A força desenvolvida por uma mola elástica ($F_m = ks$) também é uma força conservativa. Se a mola é deformada pelo corpo e este é deslocado ao longo de uma *trajetória qualquer*, de modo que provoca a tração ou compressão da mola a partir da posição s_1 para uma posição s_2, o trabalho é negativo, pois a mola exerce uma força $\mathbf{F}_s$ *sobre o corpo* que é oposta ao deslocamento ds do corpo (Figura 11.12). Seja para tração ou compressão, o trabalho independe da trajetória e é dado por:

$$U = \int_{s_1}^{s_2} F_s \, ds = \int_{s_1}^{s_2} (-ks) \, ds$$
$$= -(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2)$$

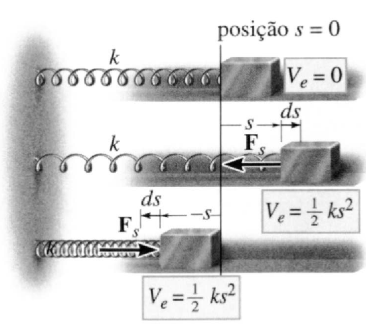


Figura 11.12

Atrito. Em contraste com as forças conservativas, considere a força de atrito exercida quando do deslizamento do corpo por uma superfície fixa. O trabalho realizado pela força de atrito depende da trajetória; quanto maior é a trajetória maior é o trabalho da força de atrito. Conseqüentemente, as forças de atrito são *não conservativas*, e o trabalho realizado é dissipado a partir do corpo na forma de calor.

*11.5 ENERGIA POTENCIAL

Quando uma força conservativa age sobre um corpo, fornece a ele a capacidade de realizar trabalho. Essa capacidade, medida como *energia potencial*, depende da localização do corpo.

Energia Potencial Gravitacional. Se o corpo está localizado a uma distância y *acima* de um referencial horizontal fixo ou uma referência (Figura 11.11), o peso do corpo tem energia potencial gravitacional *positiva* V_g, pois $\mathbf{W}$ tem capacidade de realizar trabalho positivo quando o corpo se move para baixo da referência. Da mesma forma, se o corpo está y *abaixo* da referência, V_g é *negativa*, pois o peso realiza trabalho negativo quando o corpo está se movendo para cima da referência. Na referência, $V_g = 0$.

Medindo y como *positivo para cima*, a energia potencial gravitacional da força peso $\mathbf{W}$ do corpo é, portanto:

$$\boxed{V_g = Wy} \tag{11.4}$$

Energia Potencial Elástica. A energia potencial elástica V_e que uma mola produz sobre um corpo quando é tracionada ou comprimida a partir de uma posição não deformada ($s = 0$) até uma posição final s é

$$\boxed{V_e = \tfrac{1}{2}ks^2} \tag{11.5}$$

Aqui V_e é *sempre positiva*, pois na posição deformada a mola tem a capacidade de realizar *trabalho positivo retornando* o corpo à posição da mola não deformada (Figura 11.12).

Função Potencial. No caso geral, se o corpo é submetido *tanto* a forças gravitacionais *como* elásticas, *a energia potencial ou função potencial V* do corpo pode ser expressa como uma soma algébrica:

$$\boxed{V = V_g + V_e} \tag{11.6}$$

onde a medição de V depende da localização do corpo com relação ao referencial escolhido, em concordância com as equações 11.4 e 11.5.

Em geral, se um sistema de corpos rígidos interligados e sem atrito tem um *único grau de liberdade*, de modo que a posição a partir do referencial é definida pela coordenada independente q, então a função potencial para o sistema pode ser expressa como $V = V(q)$. O trabalho realizado por todas as forças conservativas atuantes no sistema em movimento de q_1 para q_2 é medido pela *diferença* em V, isto é:

$$U_{1-2} = V(q_1) - V(q_2) \tag{11.7}$$

Por exemplo, a função potencial para o sistema que consiste no bloco de peso $\mathbf{W}$ suportado por uma mola (Figura 11.13*a*) pode ser expressa em função da coordenada independente ($q =$) y, medida a partir de uma referência fixa localizada no comprimento não deformado da mola; temos:

$$V = V_g + V_e$$

$$= -Wy + \tfrac{1}{2}ky^2 \tag{11.8}$$

Se o bloco se movimenta a partir de y_1 para uma posição mais baixa y_2, então o trabalho de $\mathbf{W}$ e de $\mathbf{F}_s$ é:

$$U_{1-2} = V(y_1) - V(y_2) = -W[y_1 - y_2] + \tfrac{1}{2}ky_1^2 - \tfrac{1}{2}ky_2^2$$

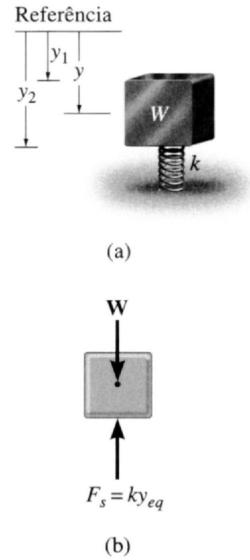


Figura 11.13

*11.6 Critério da Energia Potencial para o Equilíbrio

Sistema com um Grau de Liberdade. Quando o deslocamento de um sistema interligado e sem atrito é *infinitesimal*, isto é, a partir de q para $q + dq$, a Equação 11.7 torna-se:

$$dU = V(q) - V(q + dq)$$

ou

$$dU = -dV$$

Além disso, se o sistema sofre um *deslocamento virtual* δq, em vez de um deslocamento real dq, então $\delta U = -\delta V$. Para o equilíbrio, o princípio do trabalho virtual requer que $\delta U = 0$ e, portanto, conhecida a função potencial para o sistema, requer também que $\delta V = 0$. Podemos também expressar essa condição como:

$$\boxed{\frac{dV}{dq} = 0} \tag{11.9}$$

Por esse motivo, *quando* um *sistema de corpos rígidos articulados e sem atrito está em equilíbrio, a primeira variação ou mudança em V é nula.* Essa mudança é determinada pelo cálculo da primeira derivada da função potencial e impondo que ela seja igual a zero. Por exemplo, usando a Equação 11.8 para determinar a posição de equilíbrio para a mola e o bloco mostrados na Figura 11.13*a*, temos:

$$\frac{dV}{dy} = -W + ky = 0$$

Então, a posição de equilíbrio $y = y_{eq}$ é:

$$y_{eq} = \frac{W}{k}$$

Evidentemente, o *mesmo resultado* é obtido aplicando-se $\Sigma F_y = 0$ para as forças que atuam no diagrama de corpo livre do bloco (Figura 11.13*b*).

Sistemas com* n *Graus de Liberdade. Quando o sistema de corpos articulados tem n graus de liberdade, a energia potencial total armazenada no sistema será uma função de n coordenadas independentes q_n, isto é, $V = V(q_1, q_2, \ldots, q_n)$. Pela regra de aplicação do critério de equilíbrio $\delta V = 0$, ele é necessário para determinar a mudança na energia potencial δV pelo uso da 'regra da cadeia' do cálculo diferencial, isto é:

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial V}{\partial q_n}\delta q_n = 0$$

Sendo os deslocamentos virtuais $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ independentes um dos outros, a equação é satisfeita desde que:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial q_n} = 0$$

Portanto, *é possível escrever* ***n*** *equações independentes para um sistema com* ***n*** *graus de liberdade.*

*11.7 ESTABILIDADE DO EQUILÍBRIO

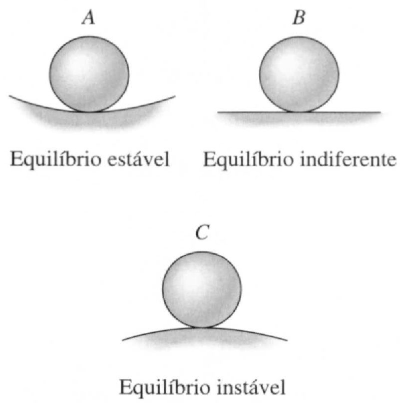


Figura 11.14

Uma vez que a configuração de equilíbrio para um sistema de corpos articulados é definida, torna-se importante investigar o 'tipo' de equilíbrio ou estabilidade da configuração. Por exemplo, considere a situação de uma bola que está em repouso em um ponto em cada uma das três trajetórias mostradas na Figura 11.14. Cada situação representa um estado de equilíbrio para a bola. Quando a bola está na situação A, ele é dito *equilíbrio estável,* porque, se for dado à bola um pequeno deslocamento para subir a rampa, ela sempre *retornará* para a posição original, mais baixa. Em A, a energia potencial total é *mínima*. Quando a bola está na situação B, encontra-se em *equilíbrio indiferente*. Um pequeno deslocamento tanto para a direita como para a esquerda de B não altera essa condição. A bola *permanece* em equilíbrio na posição deslocada e, portanto, sua energia potencial é *constante*. Quando a bola está na situação C, encontra-se em *equilíbrio instável*. Nesse caso um pequeno deslocamento causará um *decréscimo* na energia potencial da bola e, assim, ela rolará para longe de sua posição original no topo da rampa. Em C, a energia potencial da bola é *máxima*.

Tipos de Equilíbrio. O exemplo apresentado ilustra que um dos três tipos de posições de equilíbrio pode ser especificado para um corpo ou sistema de corpos articulados.

Com ventos fortes e ao realizar uma curva, esse caminhão de transporte de cana-de-açúcar pode tornar-se instável e tombar, pois seu centro de gravidade fica fora da pista quando ele está totalmente carregado.

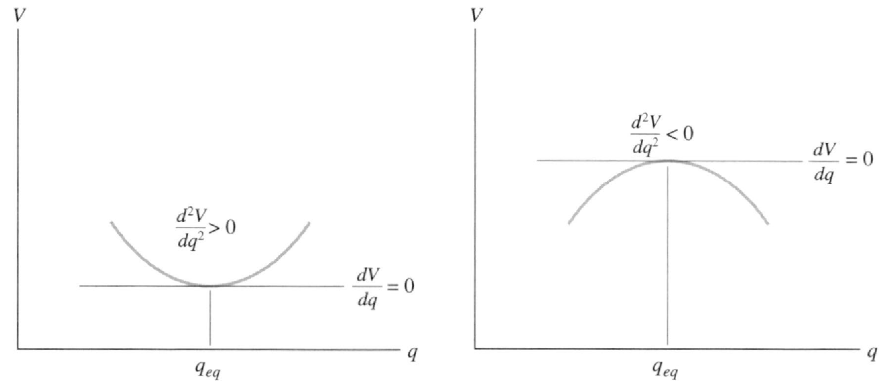
1. *Equilíbrio estável* ocorre quando um pequeno deslocamento do sistema causa o retorno dele à sua posição original. Nesse caso, a energia potencial inicial do sistema é mínima.
2. *Equilíbrio indiferente* ocorre quando um pequeno deslocamento do sistema causa a permanência dele no estado deslocado. Nesse caso, a energia potencial do sistema permanece constante.
3. *Equilíbrio instável* ocorre quando um pequeno deslocamento do sistema causa um movimento dele para longe de sua posição inicial. Nesse caso, a energia potencial inicial do sistema é máxima.

Sistemas com um Grau de Liberdade. Para o *equilíbrio* de um sistema com um grau de liberdade, definido por uma coordenada independente q, tem sido mostrado que a primeira derivada da função potencial do sistema deve ser igual a zero, isto é, $dV/dq = 0$. Se a função potencial $V = V(q)$ é colocada em um gráfico (Figura 11.15), a primeira derivada (posição de equilíbrio) é representada pela inclinação dV/dq, que é zero quando a função é máxima, mínima ou um ponto de inflexão.

Se a *estabilidade* do corpo deve ser investigada, é necessário determinar a *segunda derivada* de V e calculá-la na posição de equilíbrio $q = q_{eq}$. Como mostrado na Figura 11.15*a*, se $V = V(q)$ é *mínima*, então:

$$\boxed{\frac{dV}{dq} = 0, \quad \frac{d^2V}{dq^2} > 0 \qquad \text{Equilíbrio estável}} \tag{11.10}$$

Se $V = V(q)$ é *máxima* (Figura 11.15*b*), então:



Equilíbrio estável
(a)

Equilíbrio instável
(b)

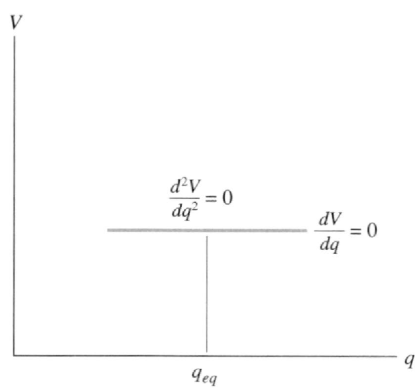
$$\boxed{\frac{dV}{dq} = 0, \quad \frac{d^2V}{dq^2} < 0 \quad \text{Equilíbrio instável}} \tag{11.11}$$

Se a segunda derivada é nula, torna-se necessário investigar as derivadas de *ordem superior* para determinar a estabilidade. Em particular, o equilíbrio estável ocorrerá se a ordem da mais baixa derivada não nula for *par* e o sinal da derivada não nula for positivo quando ela for calculada para $q = q_{eq}$ de outro modo, ele será instável.

Se o sistema está em equilíbrio indiferente (Figura 11.15*c*), é necessário que:

$$\boxed{\frac{dV}{dq} = \frac{d^2V}{dq^2} = \frac{d^3V}{dq^3} = \ldots = 0 \quad \text{Equilíbrio indiferente}} \tag{11.12}$$

uma vez que V deve ser constante sobre q_{eq} e em suas 'vizinhanças'.



Equilíbrio indiferente
(c)

Figura 11.15

Sistemas com dois Graus de Liberdade. Um critério para investigar estabilidade torna-se extremamente complexo quando o número de graus de liberdade do sistema aumenta. Para sistemas com dois graus de liberdade, definidos pelas coordenadas independentes (q_1 e q_2), pode ser verificado (usando-se o cálculo de funções para duas variáveis) que o equilíbrio e a estabilidade ocorrem no ponto (q_{1eq}, q_{2eq}) quando:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\,\partial q_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right)\right] < 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} > 0$$

Tanto o equilíbrio quanto a instabilidade ocorrem quando:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\,\partial q_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right)\right] < 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} < 0$$

Procedimento para Análise

Usando o método da energia potencial, a posição de equilíbrio e a estabilidade do corpo ou sistema de corpos articulados tem um grau de liberdade que pode ser obtido aplicando-se o seguinte procedimento:

Função Potencial

- Esquematize o sistema de modo que ele se localize em alguma *posição arbitrária* definida pela coordenada independente q.
- Estabeleça um *referencial* horizontal através de um *ponto fixo*† e expresse a *energia potencial gravitacional* V_g em função do peso W de cada elemento de ligação (haste ou barra) e de sua distância vertical y a partir do referencial, $V_g = Wy$.
- Expresse a energia potencial elástica V_e de um sistema em função da tração ou compressão s de qualquer mola conectada e de sua rigidez k, $V_e = \frac{1}{2}ks^2$.
- Formule a função potencial $V = V_g + V_e$ e expresse as *coordenadas de posição* y e s em função da coordenada independente q.

Posição de Equilíbrio

- A posição de equilíbrio é determinada pelo cálculo da primeira derivada de V e impondo que ela é igual a zero, $\delta V = 0$.

Estabilidade

- A estabilidade na posição de equilíbrio é determinada pelo cálculo da segunda derivada ou da derivada de maior ordem de V.
- Se a segunda derivada é maior que zero, o corpo é estável; se todas as derivadas são iguais a zero, o corpo está em equilíbrio indiferente; e, se a segunda derivada é menor que zero, o corpo é instável.

† A localização do referencial é *arbitrária*, pois somente as *mudanças* ou diferenciais de V são necessárias para a investigação da posição de equilíbrio e de sua estabilidade.

EXEMPLO 11.5

A haste uniforme mostrada na Figura 11.16*a* tem massa de 10 kg. A mola está na posição não deformada quando $\theta = 0°$. Determine o ângulo θ para a condição de equilíbrio e investigue a estabilidade na posição de equilíbrio.

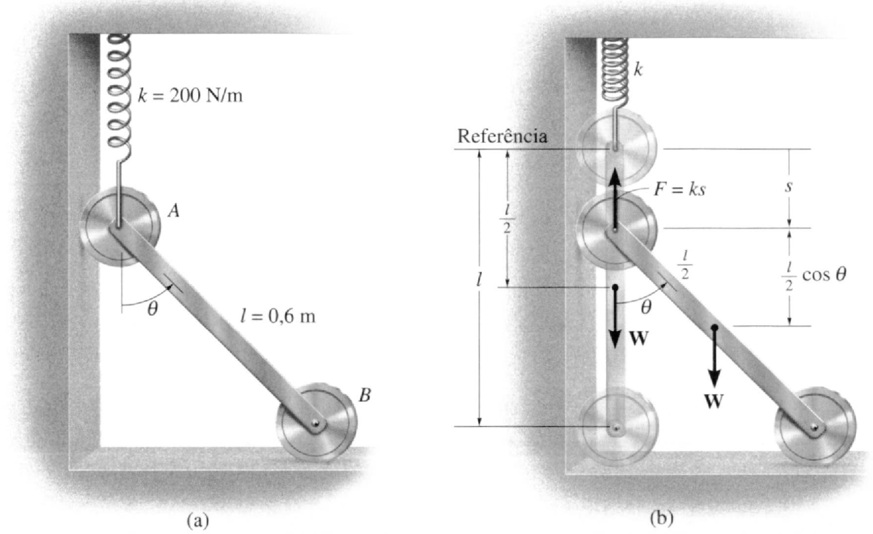


Figura 11.16

SOLUÇÃO

Função Potencial. O referencial é estabelecido no topo da haste, quando a *mola está na posição não deformada* (Figura 11.16*b*). Quando a haste está localizada em uma posição arbitrária θ, a mola aumenta a sua energia potencial pela sua deformação e o peso diminui sua energia potencial. Portanto:

$$V = V_e + V_g = \frac{1}{2}ks^2 - W\left(s + \frac{l}{2}\cos\theta\right)$$

Sendo $l = s + l\cos\theta$ ou $s = l(1 - \cos\theta)$, então:

$$V = \frac{1}{2}kl^2(1 - \cos\theta)^2 - \frac{Wl}{2}(2 - \cos\theta)$$

Posição de Equilíbrio. A primeira derivada de V fornece:

$$\frac{dV}{d\theta} = kl^2(1 - \cos\theta)\operatorname{sen}\theta - \frac{Wl}{2}\operatorname{sen}\theta = 0$$

ou

$$l\left[kl(1 - \cos\theta) - \frac{W}{2}\right]\operatorname{sen}\theta = 0$$

Essa equação é satisfeita desde que:

$$\operatorname{sen}\theta = 0 \qquad \theta = 0° \qquad \textit{Resposta}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(1 - \frac{W}{2kl}\right) = \cos^{-1}\left[1 - \frac{10(9{,}81)}{2(200)(0{,}6)}\right] = 53{,}8° \qquad \textit{Resposta}$$

Estabilidade. Determinando a segunda derivada de V, temos:

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = kl^2(1 - \cos\theta)\cos\theta + kl^2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta - \frac{Wl}{2}\cos\theta$$

$$= kl^2(\cos\theta - \cos 2\theta) - \frac{Wl}{2}\cos\theta$$

Substituindo as constantes por seus valores, com $\theta = 0°$ e $\theta = 53{,}8°$, temos:

$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=0°} = 200(0{,}6)^2(\cos 0° - \cos 0°) - \frac{10(9{,}81)(0{,}6)}{2}\cos 0°$$

$$= -29{,}4 < 0 \qquad \text{(equilíbrio instável para } \theta = 0°) \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=53{,}8°} = 200(0{,}6)^2(\cos 53{,}8° - \cos 107{,}6°) - \frac{10(9{,}81)(0{,}6)}{2}\cos 53{,}8°$$

$$= 46{,}9 > 0 \qquad \text{(equilíbrio estável para } \theta = 53{,}8°) \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

EXEMPLO 11.6

Determine a massa m do bloco necessária para a condição de equilíbrio da barra uniforme de 10 kg mostrada na Figura 11.17a quando $\theta = 20°$. Investigue a estabilidade na posição de equilíbrio.

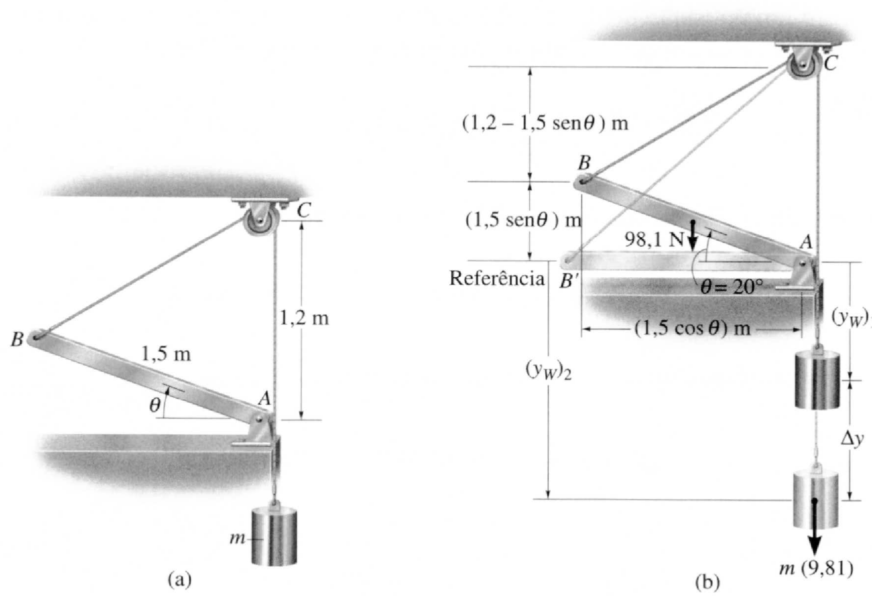


Figura 11.17

SOLUÇÃO

Função Potencial. O referencial é estabelecido através do ponto A (Figura 11.17b). Quando $\theta = 0°$, supõe-se que o bloco está suspenso $(y_w)_1$ abaixo do referencial. Portanto, na posição θ:

$$V = V_e + V_g = 98{,}1\left(\frac{1{,}5\ \text{sen}\ \theta}{2}\right) - m(9{,}81)(\Delta y) \tag{1}$$

A distância $\Delta y = (y_w)_2 - (y_w)_1$ pode ser relacionada à coordenada independente θ pela medida da diferença do comprimento da corda $B'C$ e BC. Como:

$$B'C = \sqrt{(1,5)^2 + (1,2)^2} = 1,92$$

$$BC = \sqrt{(1,5 \cos\theta)^2 + (1,2 - 1,5 \operatorname{sen}\theta)^2} = \sqrt{3,69 - 3,60 \operatorname{sen}\theta}$$

então:

$$\Delta y = B'C - BC = 1,92 - \sqrt{3,69 - 3,60 \operatorname{sen}\theta}$$

Substituindo o resultado acima na Equação 1, temos:

$$V = 98,1\left(\frac{1,5 \operatorname{sen}\theta}{2}\right) - m(9,81)(1,92 - \sqrt{3,69 - 3,60 \operatorname{sen}\theta}) \qquad (2)$$

Posição de Equilíbrio

$$\frac{dV}{d\theta} = 73,6 \cos\theta - \left[\frac{m(9,81)}{2}\right]\left(\frac{3,60 \cos\theta}{\sqrt{3,69 - 3,60 \operatorname{sen}\theta}}\right) = 0$$

$$\left.\frac{dV}{d\theta}\right|_{\theta=20^\circ} = 69,14 - 10,58m = 0$$

$$m = \frac{69,14}{10,58} = 6,53 \text{ kg} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Estabilidade. Calculando a segunda derivada da Equação 2, obtemos:

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -73,6 \operatorname{sen}\theta - \left[\frac{m(9,81)}{2}\right]\left(\frac{-1}{2}\right)\frac{-(3,60 \cos\theta)^2}{(3,69 - 3,60 \operatorname{sen}\theta)^{3/2}}$$

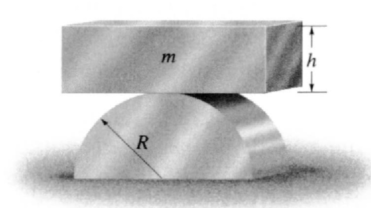
$$- \left[\frac{m(9,81)}{2}\right]\left(\frac{-3,60 \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{3,69 - 3,60 \operatorname{sen}\theta}}\right)$$

Para a posição de equilíbrio $\theta = 20^\circ$, com $m = 6,53$ kg:

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -47,6 < 0 \qquad \text{(equilíbrio instável para } \theta = 20^\circ) \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

EXEMPLO 11.7

O bloco homogêneo tem massa m e está em repouso no topo de uma superfície cilíndrica (Figura 11.18a). Mostre que essa é uma condição de equilíbrio instável se $h > 2R$.



(a)

Figura 11.18

SOLUÇÃO

Função Potencial. O referencial é estabelecido na base do cilindro (Figura 11.18b). Se o bloco é deslocado de uma quantidade θ a partir da posição de equilíbrio, a função potencial pode ser escrita na forma:

$$V = V_e + V_g$$

$$= 0 + mgy$$

Da Figura 11.18b:

$$y = \left(R + \frac{h}{2}\right)\cos\theta + R\theta \operatorname{sen}\theta$$

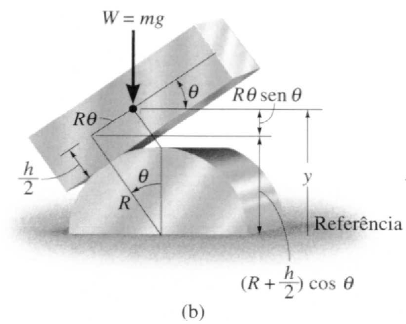


Figura 11.18

Assim:

$$V = mg\left[\left(R + \frac{h}{2}\right)\cos\theta + R\theta \operatorname{sen}\theta\right]$$

Posição de Equilíbrio

$$\frac{dV}{d\theta} = mg\left[-\left(R + \frac{h}{2}\right)\operatorname{sen}\theta + R\operatorname{sen}\theta + R\theta\cos\theta\right] = 0$$

$$= mg\left(-\frac{h}{2}\operatorname{sen}\theta + R\theta\cos\theta\right) = 0$$

Obviamente, $\theta = 0°$ é a posição de equilíbrio que satisfaz essa equação.

Estabilidade. Calculando a segunda derivada de V, temos:

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = mg\left(-\frac{h}{2}\cos\theta + R\cos\theta - R\theta\operatorname{sen}\theta\right)$$

Em $\theta = 0°$:

$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=0°} = -mg\left(\frac{h}{2} - R\right)$$

Como todas as constantes são positivas, o bloco está em equilíbrio instável se $h > 2R$, quando então $d^2V/d\theta^2 < 0$.

PROBLEMAS

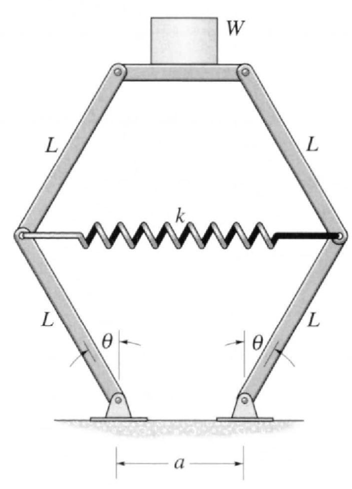
11.26. Se a função potencial para um sistema conservativo de um grau de liberdade é $V = (8x^3 - 2x^2 - 10)$ J, onde x é dado em metros, determine as posições para a condição de equilíbrio e investigue a estabilidade de cada uma dessas posições.

11.27. Se a função potencial para um sistema conservativo de um grau de liberdade é $V = (12 \operatorname{sen} 2\theta + 15 \cos\theta)$ J, onde $0° < \theta < 180°$, determine as posições para a condição de equilíbrio e investigue a estabilidade em cada uma delas.

11.28. Se a função potencial para um sistema conservativo de um grau de liberdade é $V = (10 \cos 2\theta + 25 \operatorname{sen}\theta)$ J, onde $0° < \theta < 180°$, determine as posições para a condição de equilíbrio e investigue a estabilidade em cada uma delas.

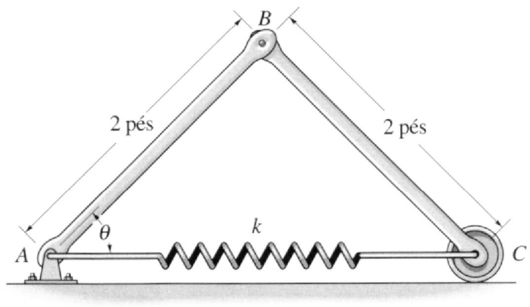
11.29. Se a função potencial para um sistema conservativo de dois graus de liberdade é $V = (9y^2 + 18x^2)$ J, onde x e y são dados em metros, determine as posições para a condição de equilíbrio e investigue a estabilidade de cada uma delas.

11.30. A mola de escala tem comprimento não deformado a. Determine o ângulo θ para a condição de equilíbrio quando um peso W é suportado na plataforma. Despreze o peso das barras. Qual é o valor W necessário para manter a escala na posição de equilíbrio indiferente quando $\theta = 0°$?



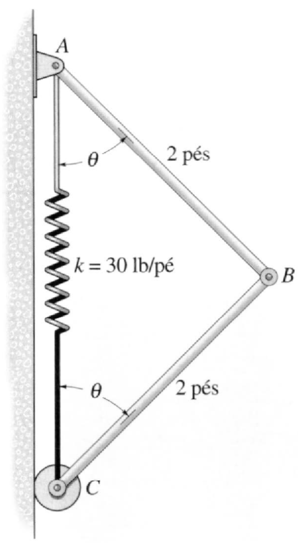
Problema 11.30

11.31. Duas barras têm cada uma peso de 8 lb. Determine a rigidez necessária k da mola para que as duas barras estejam na condição de equilíbrio quando $\theta = 30°$. A mola tem comprimento não deformado de 1 pé.



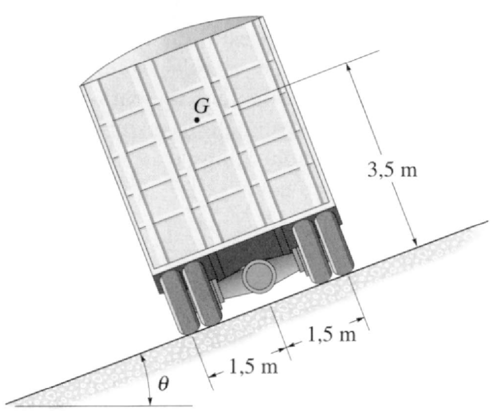
Problema 11.31

*11.32. Duas barras têm cada uma peso de 8 lb. Determine o ângulo θ para a condição de equilíbrio e investigue a estabilidade na posição de equilíbrio. A mola tem comprimento não deformado de 1 pé.



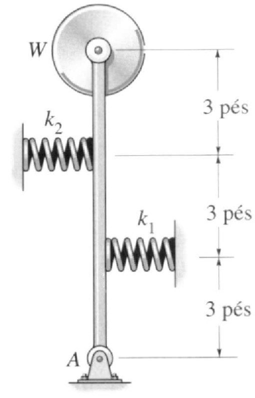
Problema 11.32

11.33. O caminhão tem massa de 20 toneladas e centro de massa em G. Determine o grau de inclinação θ em que ele pode estacionar sem tombar e investigue a estabilidade nessa posição.



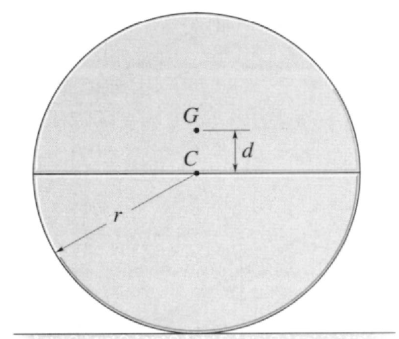
Problema 11.33

11.34. A barra suporta um peso $W = 500$ lb na extremidade. Se a mola está inicialmente na posição não deformada quando a barra está na vertical, determine a rigidez necessária para as molas $k_1 = k_2 = k$, de modo que a barra esteja na condição de equilíbrio indiferente quando na vertical.



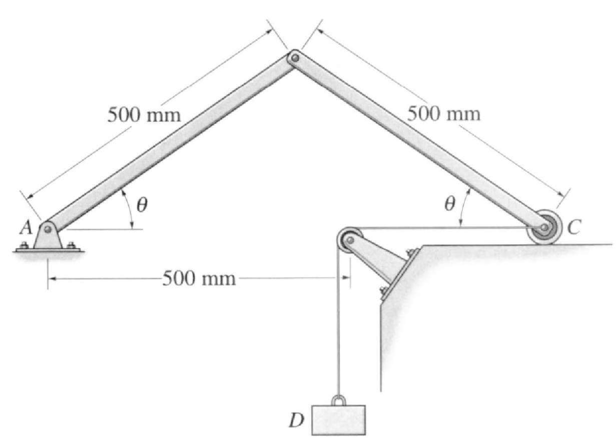
Problema 11.34

11.35. O cilindro é feito de dois materiais. Ele tem massa m e centro de gravidade no ponto G. Mostre que, quando G está acima do centróide C do cilindro, o equilíbrio é instável.



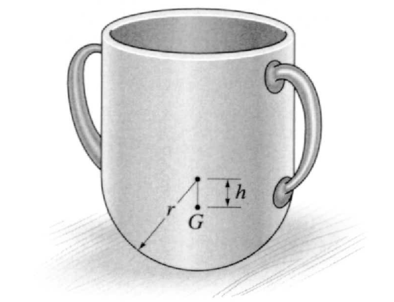
Problema 11.35

*11.36. Determine o ângulo θ para a condição de equilíbrio e investigue a estabilidade nessa posição. Cada barra tem massa de 3 kg e o bloco suspenso D tem massa de 7 kg. A corda DC tem comprimento total de 1 m.



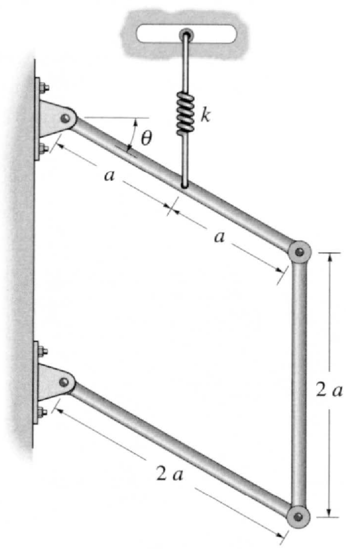
Problema 11.36

11.37. A xícara tem extremidade inferior hemisférica e massa m. Determine a posição h do centro de massa G para que a xícara esteja na condição de equilíbrio indiferente.



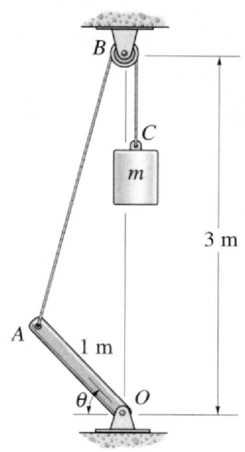
Problema 11.37

11.38. Se cada uma das três hastes do mecanismo tem peso W, determine o ângulo θ necessário para a condição de equilíbrio. A mola encontra-se sempre na posição vertical e está na condição não deformada quando $\theta = 0°$.



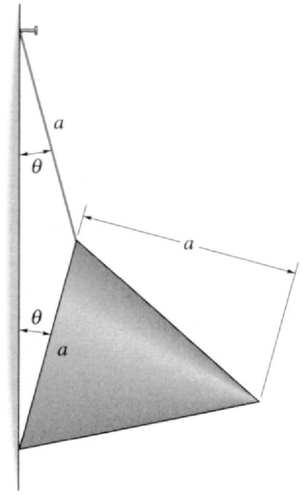
Problema 11.38

11.39. Se a barra uniforme OA tem massa de 12 kg, determine a massa m que manterá a barra na condição de equilíbrio quando $\theta = 30°$. O ponto C coincide com B quando OA está na horizontal. Despreze as dimensões da polia em B.



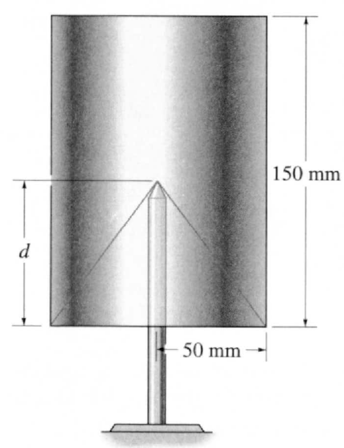
Problema 11.39

***11.40.** O cone de base circular tem massa m e é suportado por cordas, como mostrado na figura. Determine o ângulo θ para o qual ele está pendurado a partir da parede na condição de equilíbrio. O cone está na condição de equilíbrio estável?



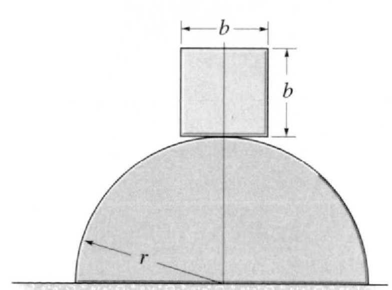
Problema 11.40

11.41. O cilindro homogêneo tem cavidade cônica feita no interior de sua base, como mostrado na figura. Determine a profundidade d da cavidade para a qual o cilindro balança sobre o pino e permanece na condição de equilíbrio indiferente.



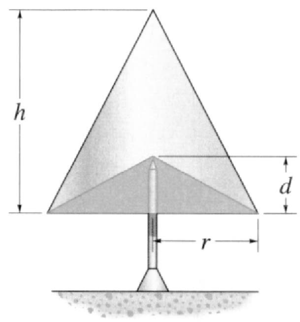
Problema 11.41

11.42. O bloco homogêneo está em repouso no topo da superfície cilíndrica. Calcule a relação entre o raio do cilindro, r, e a dimensão do bloco, b, para a condição de equilíbrio estável. *Dica*: estabeleça a função da energia potencial para um pequeno ângulo θ, isto é, utilize as aproximações sen $\theta \approx \theta$ e cos $\theta \approx 1 - \theta^2/2$.



Problema 11.42

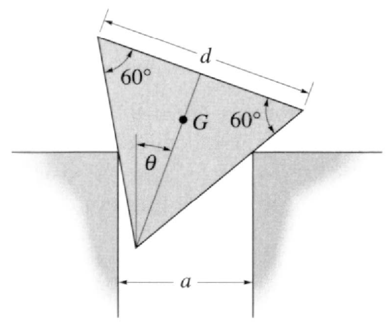
11.43. O cone homogêneo tem cavidade cônica cortada em seu interior, como mostrado na figura. Determine a profundidade d da cavidade em função de h, de modo que o cone balance sobre o pino e permaneça na condição de equilíbrio indiferente.



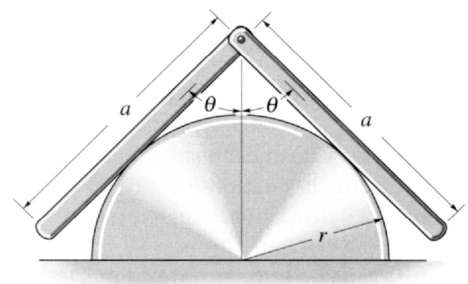
Problema 11.43

*__11.44.__ O bloco triangular de peso W está em repouso em cantos lisos que estão distantes de a. Se o bloco tem as três dimensões iguais de comprimento d, determine o ângulo θ para a condição de equilíbrio.

11.45. Duas barras uniformes, cada uma com peso W, estão articuladas nas extremidades. Se elas estão colocadas sobre uma superfície lisa cilíndrica, mostre qual é o ângulo θ para a condição de equilíbrio que deve satisfazer a equação $\cos\theta/\text{sen}^3\,\theta = a/2r$.



Problema 11.44



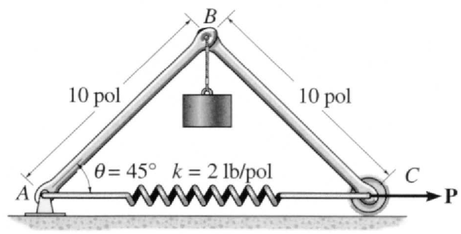
Problema 11.45

REVISÃO DO CAPÍTULO

- ***Princípio do Trabalho Virtual.*** As forças sobre um corpo realizam trabalho *virtual* quando ele está sujeito a um deslocamento ou rotação infinitesimal *imaginária*. Para a condição de equilíbrio, a soma dos trabalhos virtuais realizados por todas as forças atuantes no corpo deve ser igual a zero para qualquer deslocamento virtual. Esse conceito é chamado de *princípio do trabalho virtual* e é usado para encontrar a configuração de equilíbrio para um mecanismo ou uma força reativa atuando em uma série de hastes articuladas. Se o sistema tem um grau de liberdade, então sua posição pode ser especificada por uma coordenada independente q. Para aplicar o princípio do trabalho virtual, primeiro é necessária a utilização de *coordenadas de posição* para localizar todas as forças e momentos sobre o mecanismo que realizarão trabalho quando ele estiver sujeito a um movimento virtual δq. As coordenadas são relacionadas com a coordenada independente q e essas expressões são diferenciadas para relacionar a coordenada *virtual* do deslocamento com δq. Finalmente, a equação do trabalho virtual é escrita para mecanismos em função de um deslocamento comum δq, que então é igualado a zero. Pela fatoração de δq na equação é possível determinar uma força ou momento desconhecido ou a posição de equilíbrio q.
- ***Critério de Energia Potencial para o Equilíbrio.*** Quando um sistema está sujeito apenas a forças conservativas, tais como peso ou força de mola, então a configuração de equilíbrio pode ser determinada usando-se uma *função de energia potencial V* para o sistema. Essa função é estabelecida para expressar o peso e a energia potencial da mola para o sistema em função da coordenada independente q .Uma vez formulada, sua primeira derivada é imposta para ser igual a zero, $dV/dq = 0$. A solução levará à posição de equilíbrio q_{eq} do sistema. A estabilidade do sistema pode ser investigada pelo cálculo da segunda derivada de V. Se a estabilidade é calculada para q_{eq} e $d^2V/dq^2 > 0$, então ocorrerá *equilíbrio estável*; se $d^2V/dq^2 < 0$, ocorrerá equilíbrio instável, e se todas as derivadas superiores forem nulas, então o sistema estará em *equilíbrio indiferente.*

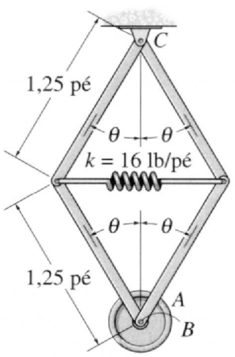
PROBLEMAS DE REVISÃO

11.46. As hastes uniformes AB e BC pesam cada uma 2 lb e o cilindro pesa 20 lb. Determine a força horizontal **P** necessária para manter o mecanismo na posição quando $\theta = 45°$. A mola na condição não deformada tem comprimento de 6 pol.



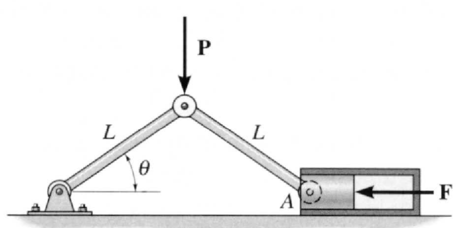
Problema 11.46

11.47. A mola presa ao mecanismo tem comprimento na condição não deformada quando $\theta = 90°$. Determine a posição θ para a condição de equilíbrio e investigue a estabilidade do mecanismo nessa posição. O disco A está conectado por pino na estrutura em B e tem peso de 20 lb. Despreze o peso das barras.



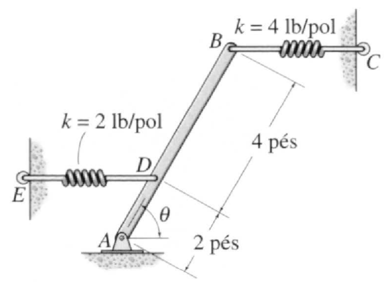
Problema 11.47

***11.48.** A alavanca articulada está sujeita a uma carga **P**. Determine a força de compressão F produzida pelo cilindro em A como uma função de θ.



Problema 11.48

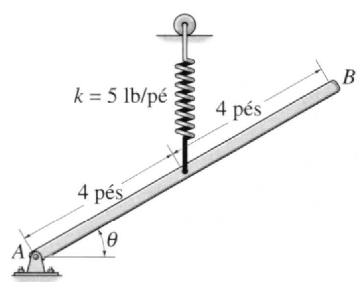
11.49. A viga uniforme AB pesa 100 lb. Se as duas molas DE e BC estão na condição não deformada quando $\theta = 90°$, determine o ângulo θ para a condição de equilíbrio usando o princípio da energia potencial. Investigue a estabilidade na posição de equilíbrio. As duas molas sempre agem na posição horizontal pela ação do pino guia em C e E.



Problema 11.49

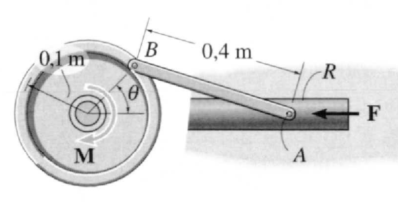
11.50. A barra uniforme AB pesa 10 lb e está presa a uma mola que está na condição não deformada quando $\theta = 90°$. Determine o ângulo θ para a condição de equilíbrio usando o princípio do trabalho virtual. Note que a mola é mantida na posição vertical pela ação do rolete guia.

11.51. Resolva o Problema 11.50 usando o princípio da energia potencial. Investigue a estabilidade da barra quando ela está na posição de equilíbrio.



Problemas 11.50/51

***11.52.** A prensa consiste em um êmbolo R conectado à barra AB e um volante. Se um torque $M = 50$ N · m é aplicado no volante, determine a força **F** aplicada no êmbolo para manter a barra na posição $\theta = 60°$.



Problema 11.52