Aula 9 - Controle $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ e Síntese μ

Adriano A. G. Siqueira

Universidade de São Paulo

Norma $\mathcal{H}_2$

- Godfrey H. Hardy (1877 - 1947, Inglaterra)

- **Espaço** $\mathcal{H}_2$: Funções de transferência com norma $\mathcal{H}_2$ limitada, ou seja, estritamente próprias e estáveis
- Norma $\mathcal{H}_2$:

$$\|G(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} tr[G(j\omega)G^T(-j\omega)]d\omega}$$

Norma $\mathcal{H}_2$

- Análise da norma $\mathcal{H}_2$
- Dado $y(s) = G(s)u(s)$, sendo $u(s)$ um sinal estocástico, $G(s)$ estável, as densidades espectral de potência de y e u são relacionadas por:

$$\Phi_{yy}(\omega) = G(j\omega)\Phi_{uu}(\omega)G^T(j\omega)$$

e

$$E\{y^t y\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} tr[\Phi_{yy}(\omega)]d\omega$$

Então, se $\Phi_{uu} = I$:

$$E\{y^t y\} = \|G(s)\|_2^2$$

- Problema LQG: caso especial - Skogestad, ed. 2, pág. 356

Norma $\mathcal{H}_\infty$

- **Espaço** $\mathcal{H}_\infty$: Funções de transferência com norma $\mathcal{H}_\infty$ limitada, ou seja, funções próprias e estáveis
- Norma $\mathcal{H}_\infty$

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \overline{\sigma}\{G(j\omega)\}$$

- *sup*: supremo, máximo dos máximos

- Dado $y(s) = G(s)u(s)$:

$$\overline{\sigma}(G(j\omega)) = \max_{u(\omega)\neq 0} \frac{\|y(\omega)\|_2}{\|u(\omega)\|_2}$$

- Temos:

$$\|G(s)\|_\infty = \max_{\omega} \max_{u(\omega)\neq 0} \frac{\|y(\omega)\|_2}{\|u(\omega)\|_2}$$

Norma $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$

- Caso escalar, SISO:

$$\|G(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega}$$

$$\|G(s)\|_\infty = \max_{\omega\in\mathbb{R}} |G(j\omega)|$$

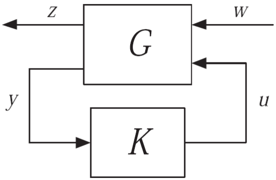
Planta + Controlador

- Considere o sistema linear

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B_1\mathbf{w} + B_2\mathbf{u}\\ \mathbf{z} &= C_1\mathbf{x} + D_{12}\mathbf{u}\\ \mathbf{y} &= C_2\mathbf{x} + D_{21}\mathbf{w}\end{aligned}$$

- Controlador $K(s)$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A_K\mathbf{x} + B_K\mathbf{y}\\ \mathbf{u} &= C_K\mathbf{x} + D_K\mathbf{y}\end{aligned}$$



- Controle $\mathcal{H}_\infty$ Ótimo

$$\gamma_{opt} := min\{\|T_{\mathbf{zw}}(s)\|_\infty : K(s) \text{ estabilizante}\}$$

sendo que a norma $\mathcal{H}_\infty$ de $T_{zw}(s)$ é definida como

$$\|T_{\mathbf{zw}}(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}\{T_{\mathbf{zw}}(j\omega)\} = \max_{\omega} \max_{\mathbf{w}} \frac{\|\mathbf{z}(\omega)\|_2}{\|\mathbf{w}(\omega)\|_2}$$

"If you do not know what you are up against,
plan for the worst and optimize."
Haykin, S. (1999). Neural Networks

- Controle $\mathcal{H}_\infty$ sub-ótimo

$$\|T_{\mathbf{zw}}(s)\|_\infty < \gamma$$

- Hipóteses simplificadoras
  - $(A,\ B_1)$ é estabilizável e $(C_1,\ A)$ é detectável
  - $(A,\ B_2)$ é estabilizável e $(C_2,\ A)$ é detectável
  - $D_{12}^T[C_1 \quad D_{12}] = [0 \quad I]$
  - $\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$

- Solução

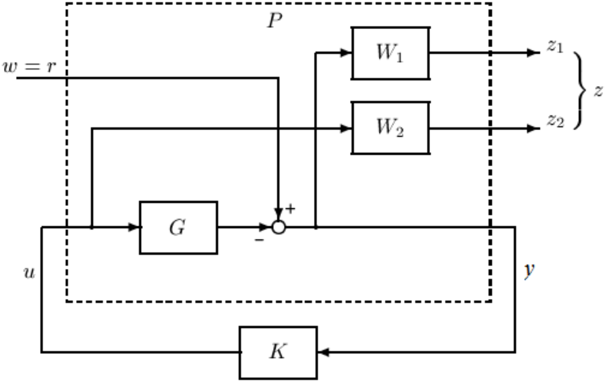
$$
\begin{aligned}
A_K &= A - B_2 B_2^T X + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X + -(I - \gamma^{-2} YX)^{-1} Y C_2^T C_2 \\
B_K &= (I - \gamma^{-2} YX)^{-1} Y C_2^T \\
C_K &= -B_2^T X \\
D_K &= 0
\end{aligned}
$$

sendo X e Y as soluções das equações algébricas de Ricatti

$$
A^T X + XA + C_1^T C_1 + X \left(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right) X = 0
$$

$$
YA^T + AY + B_1 B_1^T + Y \left(\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \right) Y = 0
$$

- Funções de Ponderação



- Funções de Ponderação
- Sensibilidade (referente ao erro)

$$\|W_1(s)S(s)\|_\infty < 1 \Rightarrow \|S(s)\|_\infty < \|W_1^{-1}(s)\|_\infty$$

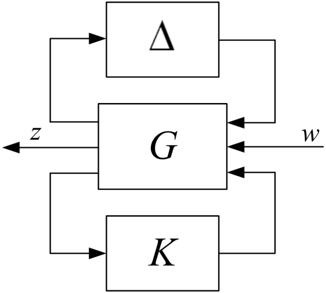
- Sensibilidade do Controle (referente à ação de controle)

$$\|W_2(s)K(s)S(s)\|_\infty < 1 \Rightarrow \|K(s)S(s)\|_\infty < \|W_2^{-1}(s)\|_\infty$$

- Sensibilidade Complementar (Malha Fechada) - Estabilidade Robusta

$$\|W_I(s)T(s)\|_\infty < 1 \Rightarrow \|T(s)\|_\infty < \|W_I^{-1}(s)\|_\infty$$

- Sistema com incerteza



- Transformação fracional linear (LFT)

$$z = F(s)w = \mathcal{F}_u(\mathcal{F}_l(G(s), K(s)), \Delta(s))w$$

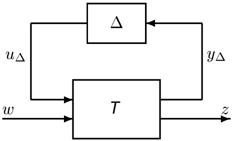
com

$$T(s) = \mathcal{F}_l(G(s), K(s)) = [G_{22} + G_{21}K(I - G_{11}K)^{-1}G_{12}]$$

$$F(s) = \mathcal{F}_u(T(s), \Delta(s)) = [T_{22} + T_{21}\Delta(I - T_{11}\Delta)^{-1}T_{12}]$$

Robustez da Estabilidade e do Desempenho

- Definições:
  - Nonimal Stability (NS) $\Leftrightarrow$ $T(s)$ internamente estável
  - Nonimal Performance (NP) $\Leftrightarrow$ $\|T_{22}\|_\infty < 1$ e NS
  - Robust Stability (RS) $\Leftrightarrow$ $F(s)$ estável $\forall\Delta$, $\|\Delta\|_\infty < 1$ e NS
  - Robust Performance (RP) $\Leftrightarrow \|F(s)\|_\infty < 1$, $\forall\Delta$, $\|\Delta\|_\infty < 1$ e NS



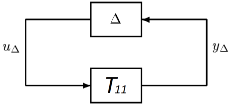
- Sistema $T(s)$-Δ

$$F(s) = \mathcal{F}_u(T(s), \Delta(s)) = [T_{22} + T_{21}\Delta(I - T_{11}\Delta)^{-1}T_{12}]$$

- Se NS, T_{22} é estável

- Então, única fonte de instabilidade é $(I - T_{11}\Delta)^{-1}$

- Sistema $T_{11}(s)$-Δ



Robustez da Estabilidade

- Incertezas não estruturadas
- Assuma $T_{11}(s)$ e $\Delta(s)$ estáveis, e $\|\Delta\|_\infty < 1$
- O sistema $T_{11}(s)$-Δ é estável se

$$\|T_{11}\|_\infty < 1$$

- Incerteza multiplicativa na entrada $G(s) = G_N(I + \Delta W_I)$

$$\|W_I(s) T_I(s)\|_\infty < 1$$

Incerteza Estruturada

- $\Delta(s)$ formada por blocos diagonais
- $\Delta(s) \in \mathbf{\Delta} : \|\Delta\|_\infty \leq 1$

$$\mathbf{\Delta} = \{diag[\delta_1 I, ..., \delta_S I, \Delta_1, ..., \Delta_F] : \delta_i \in \mathbb{C}, \Delta_j \in \mathbb{C}^{m_j \times m_j}\}$$

- com $\|\delta_i\|_\infty \leq 1$ e $\|\Delta_i\|_\infty \leq 1$

Valor Singular Estruturado

- Definição

$$\mu_\Delta(T_{11}(s)) : \frac{1}{min\{\overline{\sigma}(\Delta)|det(I - T_{11}(s)\Delta(s)) = 0\}}.$$

- Quanto menor $\mu_\Delta(T_{11}(s))$ mais incerteza o sistema aceita

Robustez da Estabilidade

- Assuma $T_{11}(s)$ e $\Delta(s)$ estáveis, e $\overline{\sigma}(\Delta(jw)) < 1, \forall w$
- O sistema $T_{11}(s)$-Δ é estável se e somente se

$$\mu_{\Delta}(T_{11}(jw)) < 1, \forall w$$

- Ou

$$\text{RS} \Leftrightarrow \mu_{\Delta}(T_{11}(jw))\overline{\sigma}(\Delta(jw)) < 1, \forall w$$

- Generalização do Teorema do Ganho Pequeno que leva em conta a estrutura de Δ

Robustez do Desempenho

- Assuma NS ($T(s)$ estável). Então:

$$\text{RP} \Leftrightarrow \|F(s)\|_\infty = \mathcal{F}_u(T(s), \Delta(s)) < 1, \quad \forall \Delta, \quad \|\Delta\|_\infty < 1$$

$$\Leftrightarrow \mu_{\widehat{\Delta}}(T(jw)) < 1, \forall w$$

- sendo

$$\widehat{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_P \end{bmatrix}$$

- Δ_P é uma perturbação complexa

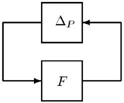
Robustez do Desempenho

RP

STEP A $\Updownarrow$

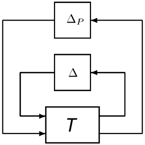
$$\| F \|_\infty < 1, \ \forall \ \| \Delta \|_\infty \leq 1$$

STEP B $\Updownarrow$



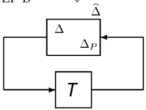
is RS, $\forall \| \Delta_P \|_\infty \leq 1$, $\forall \| \Delta \|_\infty \leq 1$

STEP C $\Updownarrow$



is RS, $\forall \| \Delta_P \|_\infty \leq 1$, $\forall \| \Delta \|_\infty \leq 1$

STEP D $\Updownarrow$



is RS, $\forall \| \hat{\Delta} \|_\infty \leq 1$

$\Updownarrow$ (RS theorem)

$$\mu_{\hat{\Delta}}(T) < 1, \ \forall w$$

Robustez da Estabilidade e do Desempenho

- Condições em função de μ_Δ:
  - Nonimal Stability (NS) $\Leftrightarrow$ $T(s)$ internamente estável
  - Nonimal Performance (NP) $\Leftrightarrow \overline{\sigma}(T_{22}) = \mu_{\Delta_P}(T_{22}) < 1$ e NS
  - Robust Stability (RS) $\Leftrightarrow \mu_\Delta(T_{11}(jw)) < 1, \forall w, \|\Delta\|_\infty < 1$ e NS
  - Robust Performance (RP) $\Leftrightarrow \mu_{\widehat{\Delta}}(T(jw)) < 1, \forall w, \|\Delta\|_\infty < 1$ e NS

Robustez da Estabilidade e do Desempenho

- Incerteza na entrada - SISO:
  - Nonimal Stability (NS) $\Leftrightarrow$ $T(s)$ internamente estável $\Leftrightarrow$ S, SG, KS e T_I estáveis
  - Nonimal Performance (NP) $\Leftrightarrow \overline{\sigma}(T_{22}) = |W_P S| < 1$
  - Robust Stability (RS) $\Leftrightarrow \mu_{\Delta}(T_{11}(jw)) = |W_I T_I| < 1, \forall w$
  - Robust Performance (RP) $\Leftrightarrow \mu_{\widehat{\Delta}}(T(jw)) = |W_P S| + |W_I T_I| < 1, \forall w$

- Exemplo:

$$G(s) = \frac{1}{75s+1}\begin{bmatrix} 87.8 & -86.4 \\ 108.2 & -109.6 \end{bmatrix} \qquad K(s) = \frac{0.7}{s}G(s)^{-1}$$

$$w_I(s) = \frac{s+0.2}{0.5s+1} \qquad w_P(s) = \frac{0.5s+0.05}{s}$$

Síntese μ

- Minimizar, sobre todos os controladores $K(s)$, o pico do valor singular estruturado de $T(jw)$

$$\min_{K} \max_{\omega} \mu_{\Delta}(T(jw))$$

- Propriedade

$$\mu_{\Delta}(T) \leq \min_{D} \overline{\sigma}(DTD^{-1})$$

- Sendo que a matriz de escalonamento D comuta com Δ, ou seja, $D\Delta = \Delta D$
- Se $\Delta = \delta I$ então $D =$ matriz cheia
- Se Δ matriz cheia então $D = dI$

Síntese μ

- Minimizar, sobre todos os controladores $K(s)$, o pico do valor singular estruturado de $T(jw)$

$$\min_K \max_\omega \min_D \overline{\sigma}(D(jw)T(jw)D^{-1}(jw))$$

- Ou

$$\min_K \min_D \max_\omega \overline{\sigma}(D(jw)T(jw)D^{-1}(jw))$$

- Norma $\mathcal{H}_\infty$

$$\min_K \min_D \left\| D(jw)T(jw)D^{-1}(jw) \right\|_\infty$$

Síntese μ

- Iteração DK
- Passo K: projete um controlador $\mathcal{H}_\infty$ para o problema escalonado com $D(s)$ fixa

$$\min_K \left\| D(jw)T(jw)D^{-1}(jw) \right\|_\infty$$

- Passo D: Encontre $D(jw)$ que minimize em cada frequência

$$\overline{\sigma}(D(jw)T(jw)D^{-1}(jw))$$

- com $T(s)$ fixa
- Encontre $D(s)$ e repita o processo até a norma convergir

- Exemplo:

$$G(s) = \frac{1}{75s+1}\begin{bmatrix} 87.8 & -86.4 \\ 108.2 & -109.6 \end{bmatrix}$$

$$w_I(s) = \frac{s+0.2}{0.5s+1} \qquad w_P(s) = \frac{0.5s+0.05}{s}$$