Aula 3 - Controladores PID, Avanço e Atraso e no Espaço de Estados

SEM 5928 - Sistemas de Controle

Universidade de São Paulo

Adriano A. G. Siqueira

Universidade de São Paulo

Controlador Proporcional

- Entrada de controle linearmente proporcional ao erro

$$u(t) = Ke(t)$$

- Função de transferência

$$C(s) = K$$

Controlador Proporcional

- Exemplo: Sistema de Segunda Ordem

$$G(s) = \frac{1}{(s+4)(s+3)}$$

- Sistemas de ordem maior: instabilidade
- Redução do erro de regime X estabilidade
- Exemplo: Sistema de Terceira Ordem

$$G(s) = \frac{1}{(s+4)(s+3)(s+2)}$$

Controlador Integral

- Entrada de controle proporcional à integral do erro

$$u(t) = \frac{K}{T_I} \int_{t_0}^{t} e d\eta$$

- Função de transferência

$$C(s) = \frac{K}{T_I s}$$

- Erro de regime nulo e independente do valor de K

Controlador Proporcional-Integral

- Entrada de controle proporcional ao erro e à integral do erro

$$u(t) = K(e(t) + \frac{1}{T_I}\int_{t_0}^{t} e d\eta)$$

- Função de transferência

$$C(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)$$

Controlador Derivativo

- Entrada de controle proporcional à derivada do erro

$$u(t) = KT_D\dot{e}$$

- Função de transferência

$$C(s) = KT_D s$$

Controlador Derivativo

- Natureza antecipatória
- Não utilizado sozinho ($\dot{e} = 0 \Rightarrow u = 0$)
- Aumenta estabilidade

Controlador PID

- Entrada de controle proporcional ao erro, à integral do erro e à derivada do erro

$$u(t) = K\left(e(t) + \frac{1}{T_I}\int_{t_0}^{t} e d\eta + T_D\dot{e}\right)$$

- Função de transferência

$$C(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right)$$

- Pólos podem ser alocados em qualquer posição

- Exemplo:

$$G(s) = \frac{10}{(s+5)(s+10)}$$

Compensação em Avanço

- Compensador da forma

$$C(s) = K\frac{s+z}{s+p} = K_c\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$

- Avanço: $z < p$ ou $\alpha < 1$
- Próximo ao PD: $C(s) = K(T_D s + 1)$

Compensação em Avanço

- Exemplo

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

- Erro em regime permanente menor que 0.1 para entrada rampa
- Sobressinal $M_p < 25\%$

Compensação em Avanço

- Erro de regime

$$e_{ss} = lim_{s \to 0} s[1 - T(s)]R(s)$$

- Erro de regime para entrada rampa $R(s) = 1/s^2$

$$e_{ss} = lim_{s \to 0} \frac{1}{s + C(s)[1/(s+1)]} = \frac{1}{C(0)}$$

Compensação em Avanço

- Sendo
$$C(s) = K\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} \quad \Rightarrow \quad C(0) = K$$
- Para $e_{ss} = 0.1 \quad \Rightarrow \quad K = 10$
- *sisotool*

Compensação em Atraso

- Compensador da forma

$$C(s) = K\frac{s+z}{s+p} = K_c\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$

- Atraso: $z > p$ ou $\alpha > 1$
- Próximo ao PI: $C(s) = \frac{K}{s}(s + \frac{1}{T_I})$

Compensação em Atraso

- Exemplo

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

- $K = 10$
- *sisotool*

Espaço de Estados

- Representação no Espaço de Estados

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u}$$

- $\mathbf{x}$: estado
- $\mathbf{u}$: entrada
- $\mathbf{y}$: saída

Estabilidade no Espaço de Estados

- Espaço de Estados para Função Transferência

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

- Equação característica

$$det(sI - A) = 0$$

- Autovalores de A

$$det(\lambda I - A) = 0$$

- Pólos de $G(s) \Leftrightarrow$ autovalores de A
- Estabilidade: autovalores de A com parte real negativa

Função de Transferência para Espaço de Estados

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n}$$

- Forma canônica controlável

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}, \quad D_c = 0$$

- Exemplo

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+7s+12}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A_c\mathbf{x} + B_c u \\ y &= C_c\mathbf{x} + D_c u \end{aligned}$$

$$A_c = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D_c = 0$$

- Forma canônica modal:

$$G(s) = \frac{2}{s+4} + \frac{-1}{s+3}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= A_m \mathbf{z} + B_m u \\ y &= C_m \mathbf{z} + D_m u\end{aligned}$$

$$A_m = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_m = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad D_m = 0$$

Transformação de Estados

- Seja o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = F\mathbf{x} + Gu$$
$$y = H\mathbf{x} + Ju$$

- Matriz não singular T
- Transformação linear

$$\mathbf{x} = T\mathbf{z}$$

Transformação de Estados

- Equação dinâmica

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} = T\dot{\mathbf{z}} &= FT\mathbf{z} + Gu \\ \dot{\mathbf{z}} &= T^{-1}FT\mathbf{z} + T^{-1}Gu \\ \dot{\mathbf{z}} &= A\mathbf{z} + Bu\end{aligned}$$

- Equação da saída

$$y = HT\mathbf{z} + Ju = C\mathbf{z} + Du$$

Transformação de Estados

- Forma geral para forma canônica controlável

$$AT^{-1} = T^{-1}F$$

$$\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 F \\ t_2 F \\ t_3 F \end{bmatrix}$$

- $t_2 = t_3 F$
- $t_1 = t_2 F = t_3 F^2$

- Forma geral para forma canônica controlável

$$T^{-1}G = B$$

$$\begin{bmatrix} t_1 G \\ t_2 G \\ t_3 G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $t_3 G = 0$
- $t_2 G = t_3 FG = 0 \quad \Rightarrow \quad t_3 [G \quad FG \quad F^2 G] = [0\ 0\ 1]$
- $t_1 G = t_3 F^2 G = 1$

Transformação de Estados

- Forma geral para forma canônica controlável

$$t_3 = [0 \quad 0 \quad 1]\mathcal{C}^{-1}$$

$$\mathcal{C} = [G \quad FG \quad F^2G]$$

- Matrix de Controlabilidade
- Forma geral

$$\mathcal{C} = [G \quad FG \quad \cdots \quad F^{n-1}G]$$

- Caso geral

$$t_n = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1]\mathcal{C}^{-1}$$

- Matriz de Transformação

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} t_n F^{n-1} \\ t_n F^{n-2} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n}$$

- Forma canônica observável

$$A_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ -a_n & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$C_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad D_o = 0$$

Estudo da Controlabilidade

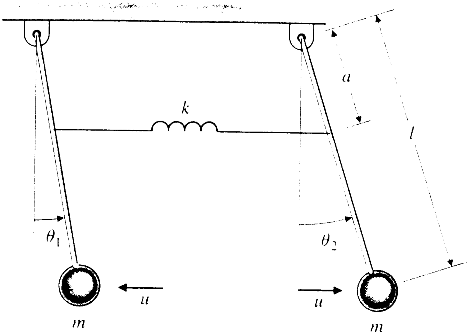
- Definição: O sistema (A, B) é controlável se existe uma entrada de controle (contínua) $u(t)$ que altera o estado do sistema de uma condição inicial x_0 para uma condição final desejada x_f num intervalo de tempo finito.
- Condição: Matriz de Controlabilidade

$$\mathcal{C} = [B \;\; AB \;\; \cdots \;\; A^{n-1}B]$$

deve ser não singular.

Controlabilidade

Dois pêndulos, acoplados por uma mola, são controlados por duas forças iguais e opostas, que são aplicadas aos pêndulos como mostrado na figura.



Controlabilidade

As equações de movimento linearizadas são:

$$ml^2\ddot{\theta}_1 = -ka^2(\theta_1 - \theta_2) - mgl\theta_1 - lu$$
$$ml^2\ddot{\theta}_2 = -ka^2(\theta_2 - \theta_1) - mgl\theta_2 + lu$$

a) Mostre que o sistema não é controlável. É possível associar um significado físico para os modos controláveis e não controláveis?

b) Existe uma forma de fazer o sistema ser controlável?

Espaço de estados: $\mathbf{x} = [\theta_1 \ \ \dot{\theta}_1 \ \ \theta_2 \ \ \dot{\theta}_2]^T$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{ka^2}{ml^2} + \frac{g}{l}\right) & 0 & \frac{ka^2}{ml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{ka^2}{ml^2} & 0 & -\left(\frac{ka^2}{ml^2} + \frac{g}{l}\right) & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{ml} \\ 0 \\ \frac{1}{ml} \end{bmatrix} u$$

Controlabilidade

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{ml} & 0 & \frac{1}{ml}\left(\frac{ka^2}{ml^2} + \frac{g}{l}\right) + \frac{ka^2}{m^3 l^3} \\ -\frac{1}{ml} & 0 & \frac{1}{ml}\left(\frac{ka^2}{ml^2} + \frac{g}{l}\right) + \frac{ka^2}{m^3 l^3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{ml} & 0 & -\frac{1}{ml}\left(\frac{ka^2}{ml^2} + \frac{g}{l}\right) - \frac{ka^2}{m^3 l^3} \\ \frac{1}{ml} & 0 & -\frac{1}{ml}\left(\frac{ka^2}{ml^2} + \frac{g}{l}\right) - \frac{ka^2}{m^3 l^3} & 0 \end{bmatrix}$$

Não controlável pois $det(\mathcal{C}) = 0$

Controlabilidade

Novo estado: $\mathbf{z} = [\alpha \;\; \dot{\alpha} \;\; \beta \;\; \dot{\beta}]^T$, com $\alpha = \theta_1 + \theta_2$ e $\beta = \theta_1 - \theta_2$

Equações dinâmicas:

$$
\begin{aligned}
ml^2\ddot{\alpha} &= -mgl\alpha \\
ml^2\ddot{\beta} &= -2ka^2\beta - mgl\beta + 2lu
\end{aligned}
$$

Controle no Espaço de Estados

- Cálculo do **controlador**: realimentação do estado
- Cálculo do **observador**
- Combinação do controlador + observador: realimentação da saída

Controle por Realimentação do Estado

- Lei de controle

$$u = -K\mathbf{x} = -[k_1 \;\; k_2 \;\; \cdots k_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- tal que

$$A - BK \;\; \text{seja estável}$$

Controle por Realimentação do Estado

- Equação característica desejada

$$(s - s_1)(s - s_2)\cdots(s - s_n) = 0$$
$$s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \cdots + \alpha_n = 0$$

- Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Pólos em: -2

- Forma canônica controlável

$$A - BK = \begin{bmatrix} -a_1 - k_1 & -a_2 - k_2 & \cdots & -a_n - k_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Equação caraterística

$$s^n + (a_1 + k_1)s^{n-1} + (a_2 + k_2)s^{n-2} + \cdots + (a_n + k_n) = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = -a_1 + \alpha_1, \;\; k_2 = -a_2 + \alpha_2, \;\; \cdots, \;\; k_n = -a_n + \alpha_n,$$

Controle por Realimentação do Estado

- Fórmula de Ackerman

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1} \alpha(A)$$

- com

$$\mathcal{C} = [B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \cdots \;\; A^{n-1}B]$$

$$\alpha(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + \cdots + \alpha_n I$$

- Transformar o sistema para a forma canônica controlável
- Obter o ganho K_c dados os pólos desejados
- Calcular o ganho $K = K_c T^{-1}$

Controle Ótimo Quadrático

- Sistema

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + Bu \\ y &= C\mathbf{x} + Du \end{aligned}$$

- Controlador: realimentação do estado

$$u = -K\mathbf{x}$$

- Alocação dos pólos

Controle Ótimo Quadrático

- Sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$

- Regulador Linear Quadrático (LQR)

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}^T Q\mathbf{x} + \mathbf{u}^T R\mathbf{u}$$

- Q e R: matrizes de ponderação (simétricas e definidas positivas)

Controle Ótimo Quadrático

- Solução

$$\mathbf{u} = -K\mathbf{x} = -R^{-1}B^TP\mathbf{x}$$

- P solução simétrica e definida positiva da Equação de Riccati

$$A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP + Q = 0$$

Observador

- Observador ou estimador
- Reconstrução do estado $\mathbf{x}$ a partir de y
- Estado estimado: $\hat{\mathbf{x}}$
- Controlador: $u = -K\hat{\mathbf{x}}$

Observador

- Observador com dinâmica

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A\hat{\mathbf{x}} + Bu$$

- Satisfatório se $\mathbf{x}(0)$ é conhecido e se fizermos $\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0)$
- Incertezas em A e B

Observador

- Erro de estimativa:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$$

- Então

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = A\tilde{\mathbf{x}}, \qquad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0)$$

- Erro $\rightarrow 0$ se A estável

Observador

- Realimentação da diferença entre a saída (conhecida) e a saída estimada:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A\hat{\mathbf{x}} + Bu + L(y - C\hat{\mathbf{x}})$$

- sendo

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}$$

Observador

- Erro de estimativa:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (A - LC)\tilde{\mathbf{x}},$$

- Se $(A - LC)$ é estável $\Rightarrow \tilde{\mathbf{x}} \to 0$
- Independentemente de $u(t)$ e $\mathbf{x}(0)$

Observador

- Pólos desejados: $s_i = \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$

$$(s-\beta_1)(s-\beta_2)\cdots(s-\beta_n) = 0$$

- Exemplo: Pólos do observador: -5 e -10

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$C = [1 \quad 0]$$

Observador

- Dualidade
- Controlador: $A - BK$
- Observador: $A - LC$
- Temos

$$(A - LC)^T = A^T - C^T L^T$$

- Observador: Fórmula de Ackerman com $A = A^T$, $B = C^T$ e $K = L^T$

- Compensador: Controlador + Observador

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} - BK\hat{\mathbf{x}} = (A - BK)\mathbf{x} + BK\tilde{\mathbf{x}}$$

- Dinâmica do sistema e do erro

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$$

Compensador: Controlador + Observador

- Estabilidade do sistema

$$det \begin{bmatrix} sI - A + BK & -BK \\ 0 & sI - A + LC \end{bmatrix} = 0$$

$$det\,[sI - A + BK] \cdot det\,[sI - A + LC] = 0$$

- **Princípio da Separação**: projetos do controlador e do observador podem ser feitos independentemente um do outro

Compensador: Controlador + Observador

- Dinâmica do Sistema

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + Bu \\ y &= C\mathbf{x} + Du\end{aligned}$$

- Dinâmica do Compensador: Controlador + Observador

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= (A - BK - LC)\hat{\mathbf{x}} + Ly \\ u &= -K\hat{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

Espaço de Estados

- Sistema em malha fechada

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC - LDK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$$

Compensador: Controlador + Observador

- Exemplo: $G(s) = \frac{1}{s^2}$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

- Pólos do controlador: $\omega_n = 1$ rad/s e $\zeta = 0.707$
- Pólos do observador: $\omega_n = 5$ rad/s e $\zeta = 0.5$