

PSI3483

Ondas Eletromagnéticas em Meios Guiados

GUIAS DE ONDAS

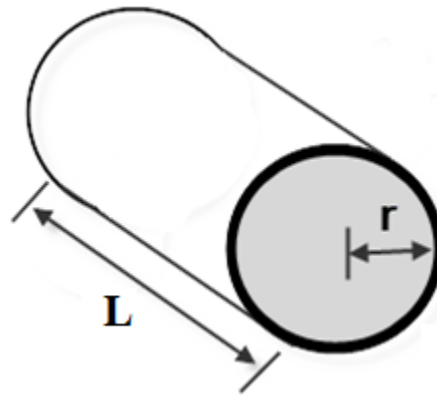
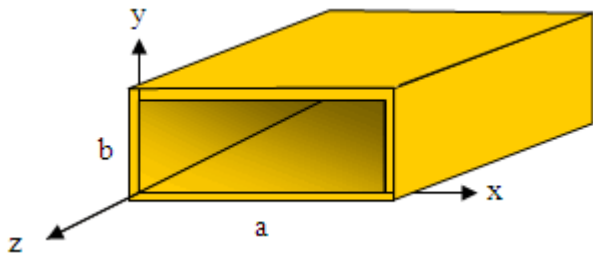
Prof.^a Fatima Salete Correra

Sumário

- Guias de Ondas - Conceito
- Guia de Ondas Retangular
- Guia de Ondas Cilíndricos
- Métodos de alimentação de guias de ondas

Guias de Ondas

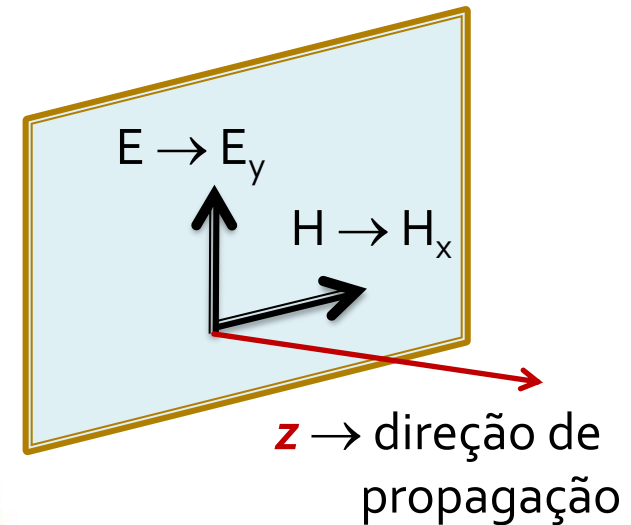
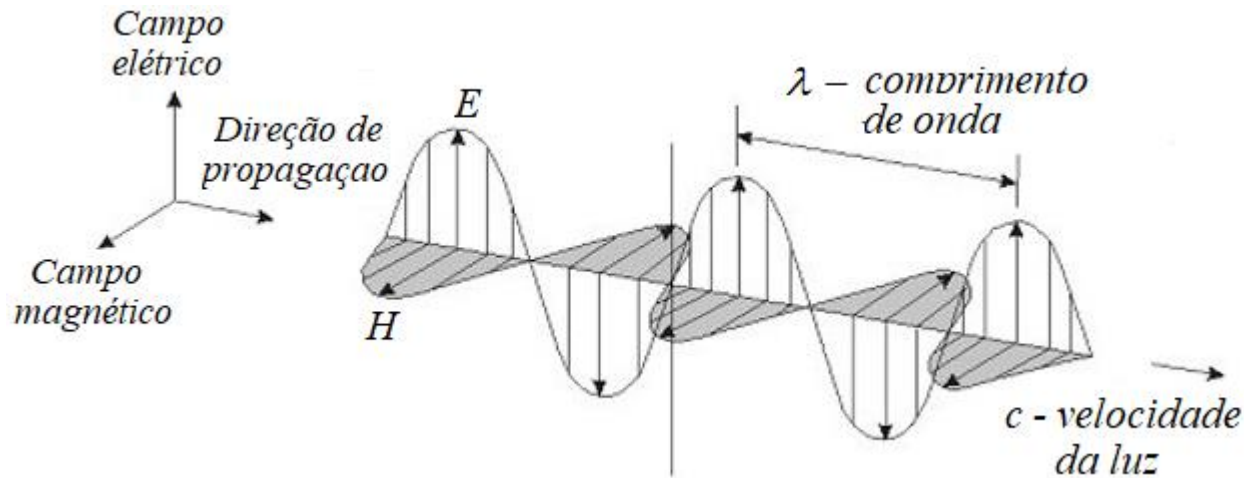
- Guias de ondas
 - Estruturas ocas
 - De material condutor
 - Com seção transversal constante
 - Retangular, circular, elíptica ou outras
 - Preenchidas por dielétrico (em geral ar)



Guias de Ondas

Propagação de campos EM no espaço livre e em cabos coaxiais

- Onda **TEM** ou onda **T**ransversal **E**leto **M**agnética
- Campos E e H são transversais entre si e à direção de propagação
- Transversais \Rightarrow perpendiculares
- Ilustração de onda TEM propagando-se no ar



$$E_z = 0 \text{ e } H_z = 0$$

Guias de Ondas

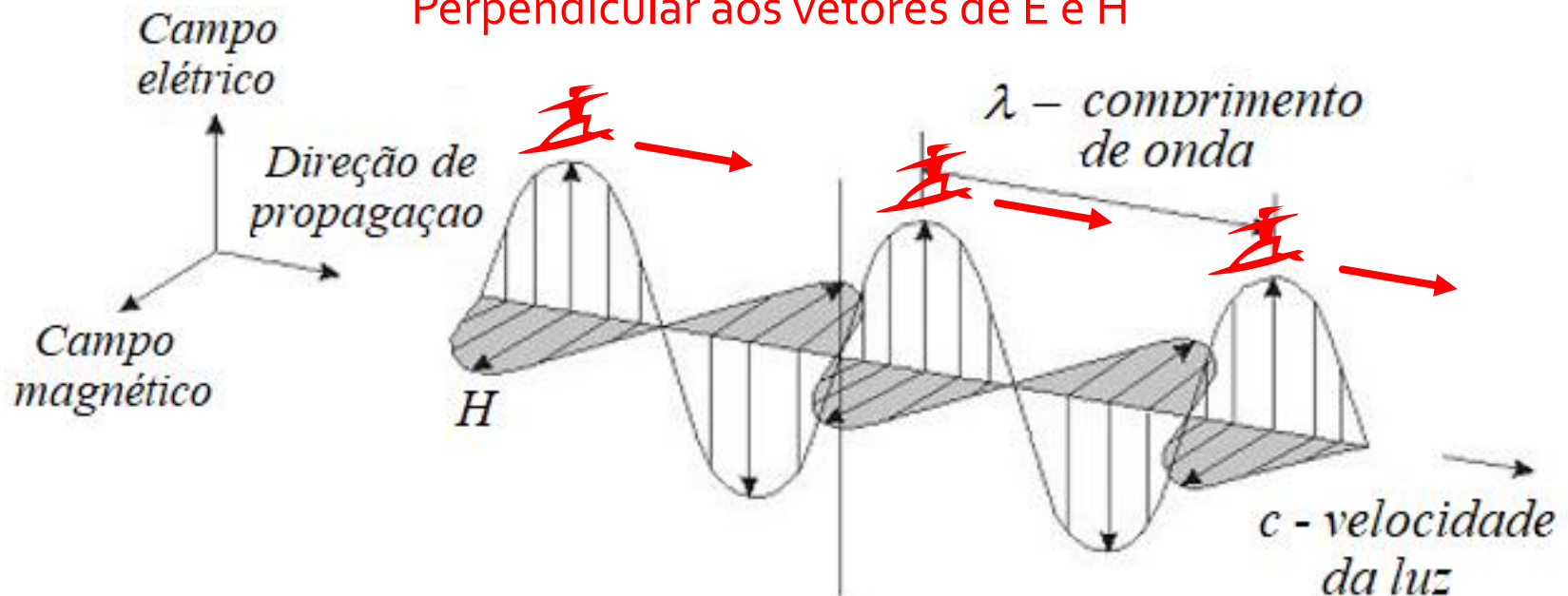
Propagação de campos EM no espaço livre e em cabos coaxiais

- Onda **TEM** ou onda **T**ransversal **E**letró **M**agnética

Surfista na frente de onda

Desloca-se na direção de propagação da onda

Perpendicular aos vetores de E e H



Guias de Ondas

■ Propagação da onda EM no guia de ondas

- Modo **TEM não é suportado** em guias de ondas
 - Necessita dois ou mais condutores

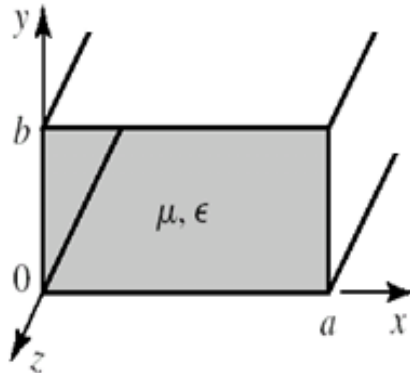
- No interior dos guias de ondas propagam-se

- **Modos TM** → **T**ransversal **M**agnético →

$$H_z = 0 \quad \text{e} \quad E_z \neq 0$$

- **Modos TE** → **T**ransversal **E**létrico →

$$E_z = 0 \quad \text{e} \quad H_z \neq 0$$



Sendo a **direção de propagação z**

Guias de Ondas

■ Modos de propagação TM

■ **Modos TM** – Modos Transversais Magnéticos

- **H** é perpendicular à direção de propagação
- **E** tem componente na direção de propagação
- Adotando a propagação da onda no guia segundo a **direção z**

$$H_z = 0 \quad \text{e} \quad E_z \neq 0$$

■ Possibilidades das demais componentes dos campos **E** e **H**

$$\left\{ \begin{array}{l} H_x = 0 \quad \text{e} \quad E_y = 0 \\ H_y \neq 0 \quad \text{e} \quad E_x \neq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_x \neq 0 \quad \text{e} \quad E_y \neq 0 \\ H_y = 0 \quad \text{e} \quad E_x = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_x \neq 0 \quad \text{e} \quad E_y \neq 0 \\ H_y \neq 0 \quad \text{e} \quad E_x \neq 0 \end{array} \right.$$

Guias de Ondas

- **Modos de propagação TE**
 - **Modos TE** – Transversais Elétricos
 - **E** é perpendicular à direção de propagação
 - **H** tem componente na direção de propagação
 - Adotando a propagação da onda no guia segundo a **direção z**

$$E_z = 0 \quad \text{e} \quad H_z \neq 0$$

- Possibilidades das demais componentes dos campos **E** e **H**

$$\left\{ \begin{array}{l} H_x = 0 \quad \text{e} \quad E_y = 0 \\ H_y \neq 0 \quad \text{e} \quad E_x \neq 0 \end{array} \right.$$

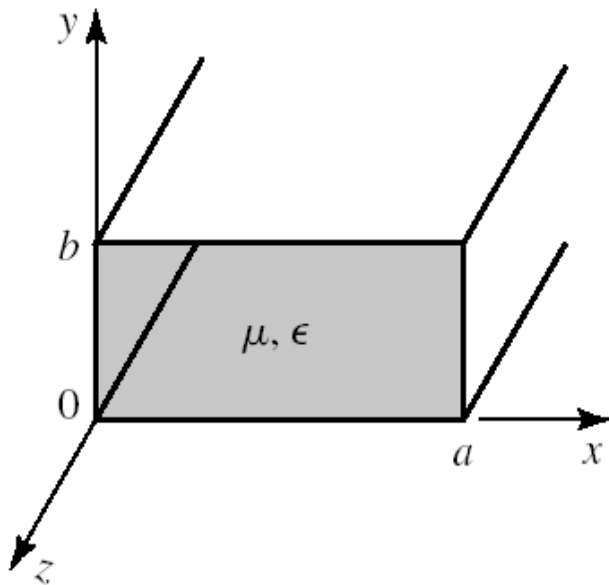
$$\left\{ \begin{array}{l} H_x \neq 0 \quad \text{e} \quad E_y \neq 0 \\ H_y = 0 \quad \text{e} \quad E_x = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_x \neq 0 \quad \text{e} \quad E_y \neq 0 \\ H_y \neq 0 \quad \text{e} \quad E_x \neq 0 \end{array} \right.$$

Guias de Ondas

Guia de Ondas Retangular

Guia de Ondas Retangular



- Direção de propagação: **z**
- **a**: maior dimensão da seção transversal
- **b**: menor dimensão da seção transversal
- Em geral $b \approx \frac{a}{2}$
- Meio dielétrico que preenche o guia de ondas

$$\boldsymbol{\mu} = \mu_r \cdot \mu_0 \quad \boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$$

- Velocidade da onda no meio sem fronteiras com

$$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\mu} = \mu_r \cdot \mu_0$$



$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \cdot \epsilon_r}}$$

c : velocidade da luz no vácuo

Guia de Ondas Retangular

- Exemplo

- Guia de ondas WR-90

- $a = 0,9$ polegada e $b = 0,4$ polegada

- $a = 2,286$ cm e $b = 1,016$ cm

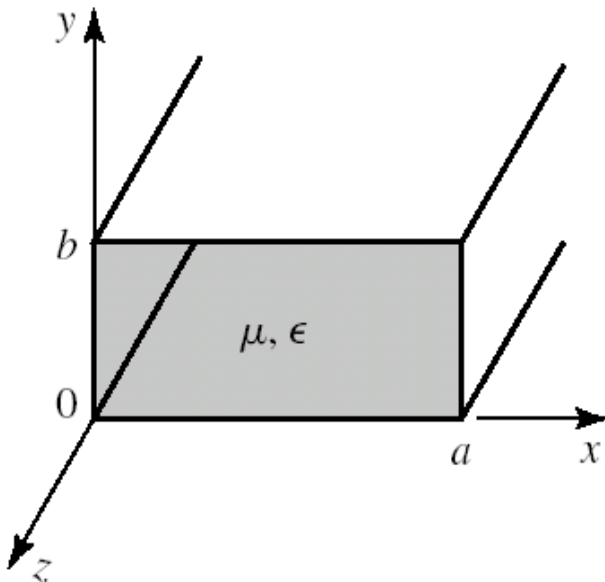
- Preenchido com ar

- $\mu = \mu_0$ e $\epsilon = \epsilon_0$

- $v = c$ (no meio sem fronteiras)

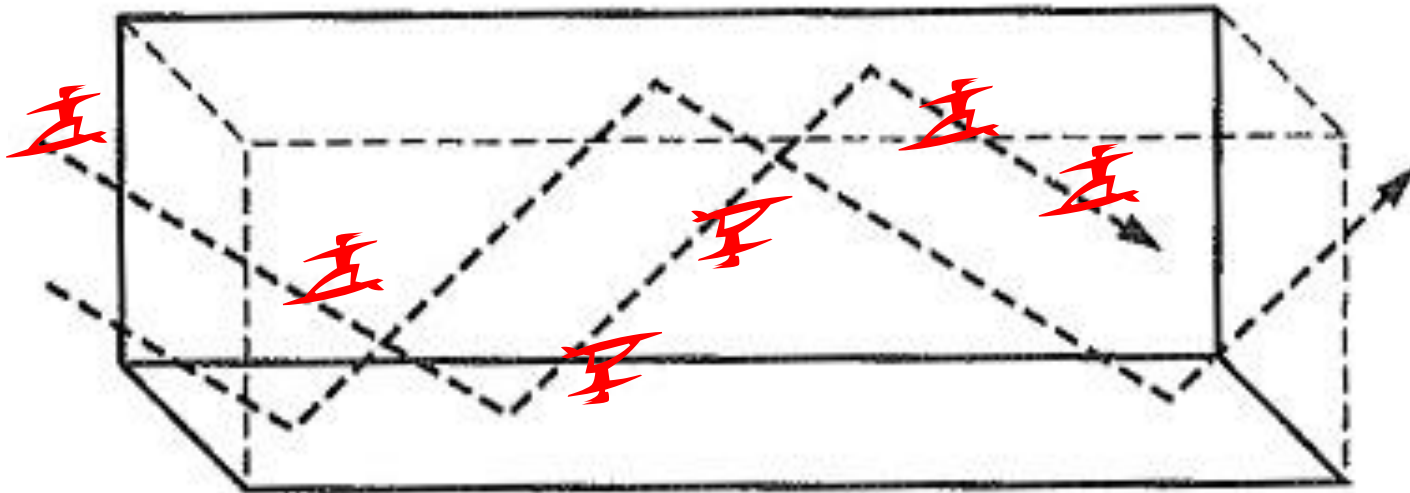
- Aplicação: banda X

- 8,2 a 12,4 GHz



Equações de Maxwell

- Propagação de ondas EM no guia de ondas retangular
- Como a onda se propaga no interior do guia de ondas?



Equações de Maxwell

■ Propagação de ondas EM no guia de ondas retangular

- Resolução das equações de Maxwell no interior do guia de ondas
- Equações de Maxwell na forma diferencial

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

- E: intensidade de campo elétrico (V/m)
- H: intensidade de campo magnético (A/m)
- D: densidade de fluxo elétrico (Coulomb/m)
- B: densidade de fluxo magnético (Weber/m)
- J: densidade de corrente elétrica (A/m²)
- ρ: densidade de carga elétrica (Coulomb/m³)

Equações de Maxwell → { Quatro equações
Cinco incógnitas → $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}$ e t

Equações de Maxwell

■ Resolução das equações de Maxwell no guia de ondas

- Considerando o interior do guia de ondas

- Dielétrico ideal
- Sem cargas ou correntes

$$\rho = 0$$

$$J = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

- Equações de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Equações de Maxwell

■ Resolução das equações de Maxwell no guia de ondas

- Considerando adicionalmente o interior do guia como um meio

- Linear → não depende da amplitude do campo EM
- Isotrópico → não depende da direção do campo EM
- Homogêneo → mesma composição em todos os pontos
- Invariante no tempo
- Relações constitutivas do meio

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \quad \text{e} \quad \vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

ϵ : permissividade elétrica do meio (F/m)

μ : permeabilidade magnética do meio (H/m)

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$

Equação de Onda ou de Helmholtz

■ Resolução das equações de Maxwell no guia de ondas

- Equações de Maxwell nesse caso reduzem-se a

$$\underbrace{\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}} \quad \underbrace{\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{H} = 0$$

\vec{E} é função de \vec{H} e t \vec{H} é função de \vec{E} e t

- Manipulação matemática das equações de Maxwell
 - Objetivo: obter equações com uma única variável de campo
 - Uma equação do campo elétrico em função de \vec{E} e t
 - Uma equação do campo magnético em função de \vec{H} e t
 - **Equações de Onda ou Equações de Helmholtz**

Equação de Onda ou de Helmholtz

- Consideremos a equação $\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$
- Aplicando o rotacional nos dois termos da equação, temos

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu \frac{\partial (\nabla \times \vec{H})}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (\text{pois } \rho = 0)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$-\mu \frac{\partial \nabla \times \vec{H}}{\partial t} = -\mu \cdot \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

Equação de Onda ou de Helmholtz

- De forma análoga obtém-se

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

- Equações de Onda no domínio do tempo

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

- Válidas para meios
 - Lineares
 - Isotrópicos
 - Homogêneos
 - Invariantes no tempo

Guia de Ondas Retangular

- Considerando \vec{E} e \vec{H} campos harmônicos ou senoidais

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \text{Re}[\bar{E}(x, y, z) \cdot e^{j\omega t}]$$

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \text{Re}[\bar{H}(x, y, z) \cdot e^{j\omega t}]$$

- $\bar{E}(x, y, z)$ e $\bar{H}(x, y, z)$ são os fasores dos campos \vec{E} e \vec{H}
- Em coordenadas cartesianas

$$\bar{E} = E_x \cdot \hat{a}_x + E_y \cdot \hat{a}_y + E_z \cdot \hat{a}_z$$

$$\bar{H} = H_x \cdot \hat{a}_x + H_y \cdot \hat{a}_y + H_z \cdot \hat{a}_z$$

Guia de Ondas Retangular

■ Equação de onda na forma fasorial

- Em meio dielétrico sem perdas, linear, homogêneo e isotrópico, sem fontes de campo (ρ e J)

$$\nabla^2 \bar{E} + k^2 \bar{E} = \vec{0} \qquad k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

$$\nabla^2 \bar{H} + k^2 \bar{H} = \vec{0}$$

$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$: constante de propagação

ω : frequência angular, $\omega = 2\pi f$

μ : permeabilidade magnética do meio

ϵ : permissividade elétrica do meio

$$\bar{E} = E_x \cdot \hat{a}_x + E_y \cdot \hat{a}_y + E_z \cdot \hat{a}_z \qquad \bar{H} = H_x \cdot \hat{a}_x + H_y \cdot \hat{a}_y + H_z \cdot \hat{a}_z$$

Guia de Ondas Retangular

- **Equação de onda fasorial**

- Em função das componentes do fasor do Campo Elétrico: E_x , E_y e E_z

$$\nabla^2 \bar{E} + k^2 \bar{E} = \vec{0} \quad \left[\begin{array}{l} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0 \quad \text{em } \hat{a}_x \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k^2 E_y = 0 \quad \text{em } \hat{a}_y \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0 \quad \text{em } \hat{a}_z \end{array} \right.$$

Sendo $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$

Guia de Ondas Retangular

- **Equação de onda fasorial**

- Em função das componentes do fasor do Campo Magnético H_x , H_y e H_z

$$\nabla^2 \bar{H} + k^2 \bar{H} = \vec{0} \quad \left[\begin{array}{l} \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + k^2 H_x = 0 \quad \text{em } \hat{a}_x \\ \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + k^2 H_y = 0 \quad \text{em } \hat{a}_y \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k^2 H_z = 0 \quad \text{em } \hat{a}_z \end{array} \right.$$

Sendo $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$

Guia de Ondas Retangular

Modos TM

Guia de Ondas Retangular

■ Solução dos Modos TM

- Em modos TM existe componente de campo elétrico não-nula na direção de propagação z

$$E_z \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{a ser determinado}$$

- Campo harmônico ou senoidal

$$E_z(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \neq 0$$

- Cálculo de $E_z \Rightarrow$ equação de onda na direção z

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0$$

Guia de Ondas Retangular

- **Modos TM** - Equação de onda

$$\frac{\partial^2 [X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)]}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 [X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)]}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 [X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)]}{\partial z^2} + k^2 [X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)] = 0$$

Sendo: $X''(x) = \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}$ $Y''(y) = \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}$ $Z''(z) = \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}$

Tem-se:

$$X''(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) + X(x) \cdot Y''(y) \cdot Z(z) + X(x) \cdot Y(y) \cdot Z''(z) + k^2 [X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)] = 0$$

Guia de Ondas Retangular

- **Modos TM**

- Dividindo-se ambos os termos de

$$X''(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) + X(x) \cdot Y''(y) \cdot Z(z) + X(x) \cdot Y(y) \cdot Z''(z) + k^2 [X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)] = 0$$

por $E_z(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \neq 0$

Obtém-se
$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} + k^2 = 0$$

Guia de Ondas Retangular

■ Modos TM

$$\underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}} + \underbrace{\frac{Y''(y)}{Y(y)}} + \underbrace{\frac{Z''(z)}{Z(z)}} + k^2 = 0$$

Ou

$$-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + k^2 = 0$$

onde

$$-k_x^2 = \frac{X''}{X} \quad -k_y^2 = \frac{Y''}{Y} \quad -k_z^2 = \frac{Z''}{Z} = \gamma^2$$

$$k_x \text{ e } k_y : \text{ constantes} \quad \gamma = \alpha + j \cdot \beta$$

γ : fator de propagação da onda EM ao longo da direção de propagação z , de forma geral é um número complexo

Guia de Ondas Retangular

■ Modos TM

Soluções genéricas de equações diferenciais

$$\frac{X''}{X} = -k_x^2 \rightarrow A \cdot \cos(k_x \cdot x) + B \cdot \text{sen}(k_x \cdot x)$$

$$\frac{Y''}{Y} = -k_y^2 \rightarrow C \cdot \cos(k_y \cdot y) + D \cdot \text{sen}(k_y \cdot y)$$

$$\frac{Z''}{Z} = \gamma^2 \rightarrow F \cdot e^{-\gamma \cdot z} + G \cdot e^{+\gamma \cdot z}$$

$$-k_x^2 - k_y^2 + \gamma^2 + k^2 = 0 \quad \gamma = \alpha + j \cdot \beta$$

Guia de Ondas Retangular

■ Modos TM

- Solução geral de $E_z = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$

$$E_z = [A \cdot \cos(k_x \cdot x) + B \cdot \text{sen}(k_x \cdot x)] \cdot \\ [C \cdot \cos(k_y \cdot y) + D \cdot \text{sen}(k_y \cdot y)] \cdot \\ [F \cdot e^{-\gamma \cdot z} + G \cdot e^{+\gamma \cdot z}]$$

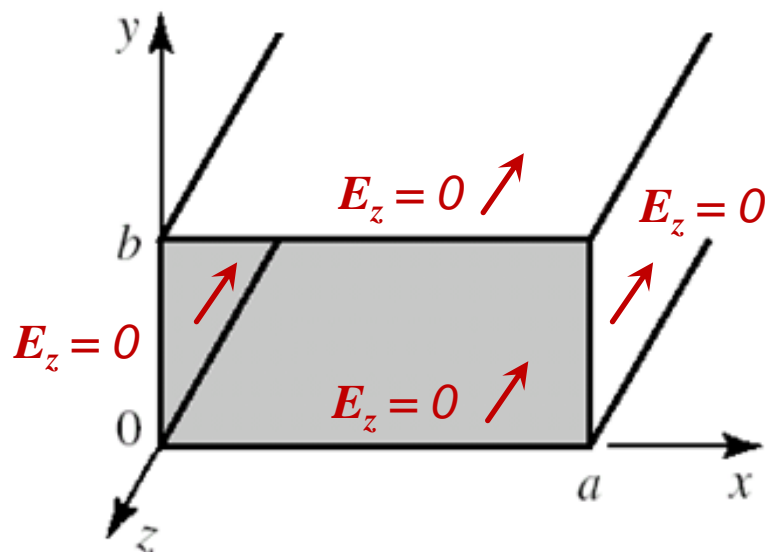
sendo A, B, C, D, F e G constantes

- Determinação das constantes A, B, C, D, F e G
 - Aplicação das condições de contorno do guia de ondas

Guia de Ondas Retangular

■ Modos TM

- Condições de contorno
 - Campo elétrico tangencial ao metal é nulo
 - Logo E_z é nulo nas paredes metálicas do guia de ondas



■ $E_z = 0$

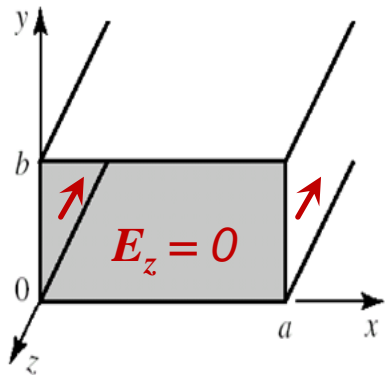
- Paredes verticais do guia
 - $x = 0$ e $x = a$
- Paredes horizontais do guia
 - $y = 0$ e $y = b$

Guia de Ondas Retangular

Modos TM

$$E_z = \left[A \cdot \cos(k_x \cdot x) + B \cdot \text{sen}(k_x \cdot x) \right] \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

- $E_z = 0$ em $x = 0$ e $x = a$, paredes verticais do guia



- $x = 0 \rightarrow A = 0$

- $x = a \rightarrow \text{sen}(k_x \cdot a) = 0 \rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a}, m = 1, 2, 3..$

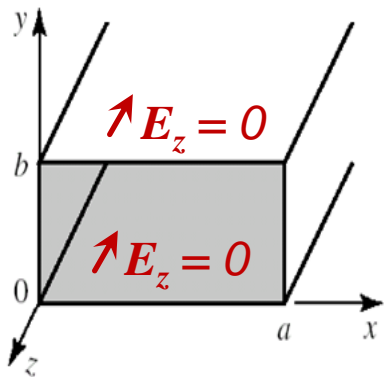
$$E_z = B \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Guia de Ondas Retangular

Modos TM

$$E_z = X(x) \cdot \left[C \cdot \cos(k_y \cdot y) + D \cdot \text{sen}(k_y \cdot y) \right] \cdot Z(z)$$

- $E_z = 0$ em $y = 0$ e $y = b$, paredes horizontais do guia



- $y = 0 \rightarrow C = 0$

- $y = b \rightarrow \text{sen}(k_y \cdot y) = 0 \rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b}, n = 1, 2, 3, \dots$

$$E_z = B \cdot D \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot Z(z) \quad \begin{array}{l} m = 1, 2, 3, \dots \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{array}$$

Guia de Ondas Retangular

Modos TM

$$E_z = X(x) \cdot Y(y) \cdot \left[F \cdot e^{-\gamma z} + G \cdot e^{+\gamma z} \right]$$

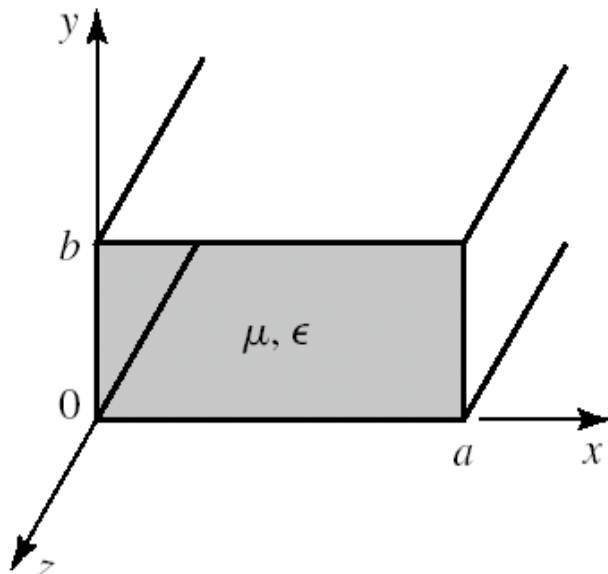
- Supondo propagação na direção de z positivo
- Se $G \cdot e^{+\gamma z} = G \cdot e^{+(\alpha + j\beta)z} = G \cdot e^{+\alpha \cdot z} \cdot e^{j\beta \cdot z} \neq 0$
 - Amplitude da onda EM cresce a medida que se propaga
 - Não tem sentido físico
 - Logo $G = 0$

$$E_z = \underbrace{B \cdot D \cdot F}_{E_0} \cdot \text{sen} \left(\frac{m\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{n\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma z} \quad \begin{array}{l} m = 1, 2, 3 \dots \\ n = 1, 2, 3 \dots \end{array}$$

Guia de Ondas Retangular

- **Modos TM** – propagação segundo o eixo z positivo

$$E_z = E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z} \quad H_z = 0$$



- **Modo TM_{mn}**

onde

- $m = 1, 2, 3, \dots$
- $n = 1, 2, 3, \dots$

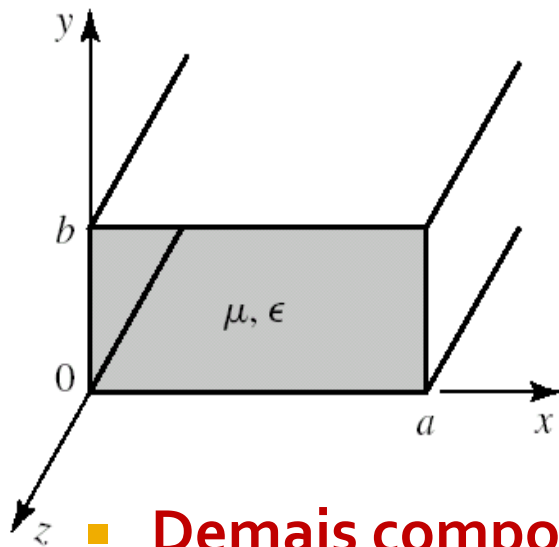
Importante: $m \neq 0$ e $n \neq 0$

(se m ou $n = 0 \Rightarrow E_z = 0 \Rightarrow$ não é modo TM!)

- **Modos TM_{11} TM_{12} TM_{21} TM_{22} TM_{13} TM_{31} TM_{23} **

Guia de Ondas Retangular

- **Modos TM** – propagação segundo o eixo z positivo



$$H_z = 0$$

$$E_z = E_0 \cdot \text{sen} \left(\frac{m\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{n\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$m = 1, 2, 3, \dots \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- **Demais componentes dos modos TM?**

$$H_x = ? \quad H_y = ?$$

$$E_x = ? \quad E_y = ?$$

Guia de Ondas Retangular

Campos E e H dependentes de $e^{-\gamma \cdot z}$

- Equações de Maxwell na forma fasorial
- Meio linear, isotrópico e homogêneo
- Sem correntes ($J = 0$) ou cargas ($\rho = 0$)

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial y} + j\gamma E_y &= -j\omega\mu H_x \\ -j\gamma E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -j\omega\mu H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -j\omega\mu H_z\end{aligned}$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_z}{\partial y} + j\gamma H_y &= j\omega\epsilon E_x \\ -j\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= j\omega\epsilon E_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= j\omega\epsilon E_z\end{aligned}$$

Guia de Ondas Retangular

Campos E e H dependentes de $e^{-\gamma \cdot z}$

- Resolvendo-se o sistema de 6 equações, do slide anterior
- Obtém-se E_x , E_y , H_x e H_y em função de $\frac{\partial E_z}{\partial x}$, $\frac{\partial E_z}{\partial y}$, $\frac{\partial H_z}{\partial x}$ e $\frac{\partial H_z}{\partial y}$

$$E_x = \frac{-j}{k_c^2} \left(\gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right)$$

$$E_y = \frac{j}{k_c^2} \left(-\gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)$$

$$H_x = \frac{j}{k_c^2} \left(\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)$$

$$H_y = \frac{-j}{k_c^2} \left(\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} \right)$$

$$k_c^2 = k^2 - \gamma^2$$

$$k^2 = \omega^2 \cdot \mu \cdot \epsilon$$

Guia de Ondas Retangular

Modos TM_{mn} $\Rightarrow H_z = 0$ e $E_z = E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$

$$E_x = \frac{-j\gamma m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_y = \frac{-j\gamma n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$H_x = \frac{j\omega\epsilon n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$H_y = \frac{-j\omega\epsilon m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

Guia de Ondas Retangular

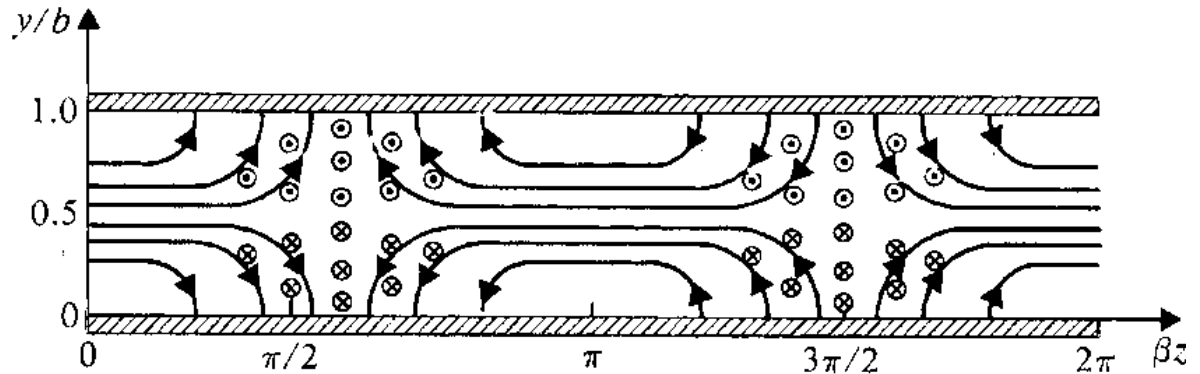
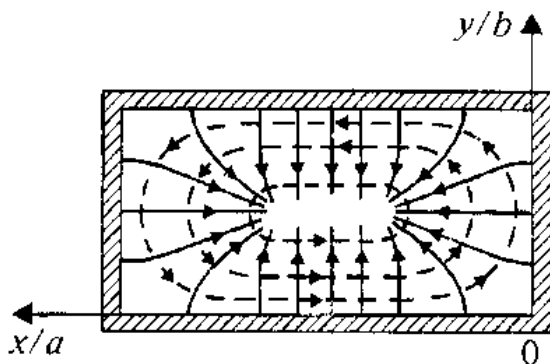
Modo TM_{11}

- $m = 1$
- $n = 1$

$$E_z = E_0 \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_x = \frac{-j\gamma\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot E_0 \cdot \cos \left(\frac{\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_y = \frac{-j\gamma\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot E_0 \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$



—— Campo E - - - - Campo H

Guia de Ondas Retangular

Modo TM_{21}

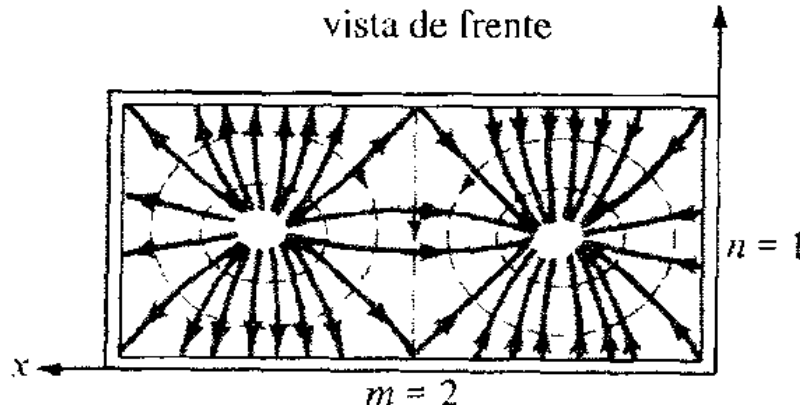
- $m=2$
- $n=1$

$$E_z = E_0 \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

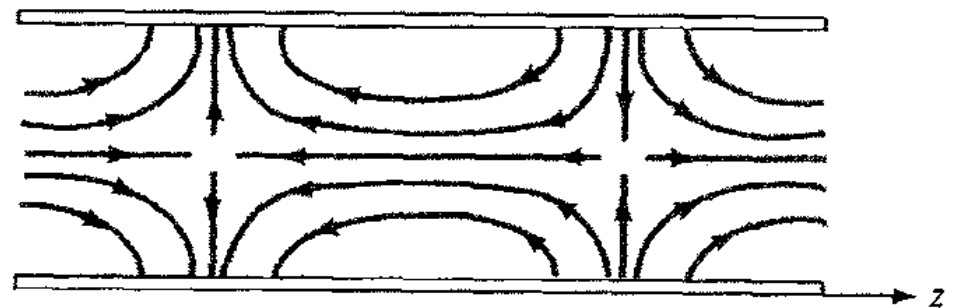
$$E_x = \frac{-j\gamma\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot E_0 \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_y = \frac{-j\gamma\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot E_0 \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

vista de frente



vista de lado



—— Campo E

----- Campo H

Guia de Ondas Retangular

Comparando os modos TM_{11} e TM_{21}

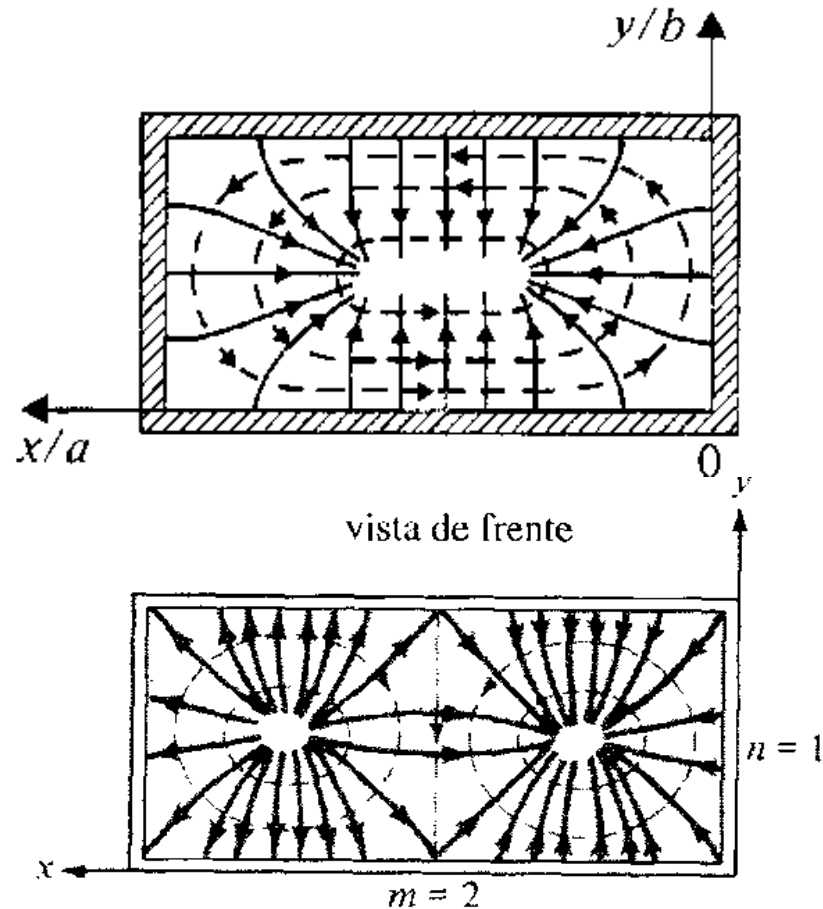
- Modo TM_{11}

- $m = 1$
- $n = 1$

- Modo TM_{21}

- $m = 2$
- $n = 1$

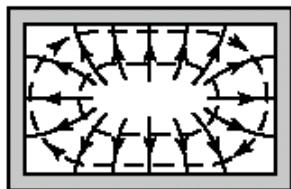
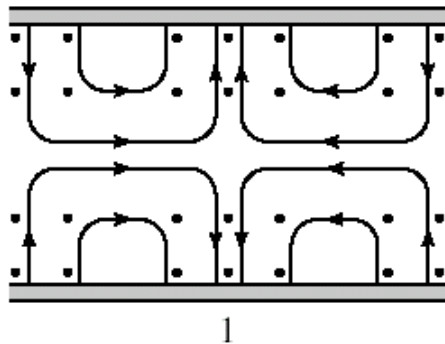
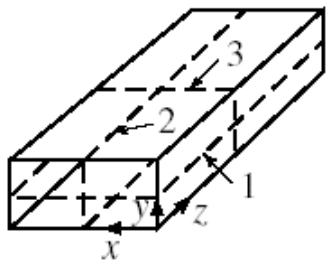
— Campo E
- - - Campo H



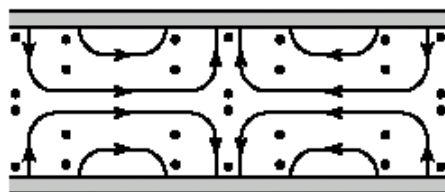
Guia de Ondas Retangular

Comparando os modos TM_{11} e TM_{21}

TM_{11}

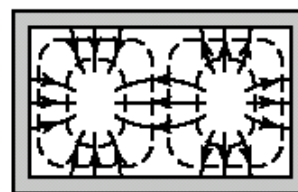
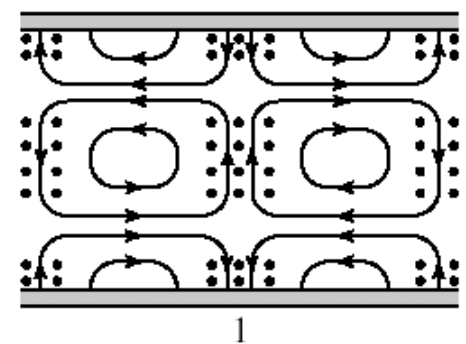
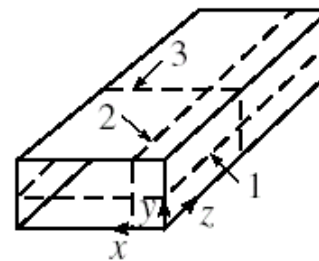


3

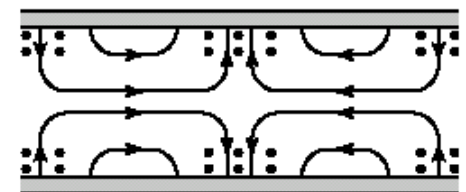


2

TM_{21}



3



2

Guia de Ondas Retangular

γ - Fator de propagação do modo TM_{mn}

$$-k_x^2 - k_y^2 + \gamma^2 + k^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}$$

- Modos TM

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon}$$

Guia de Ondas Retangular

Fator de propagação do modo TM_{mn}

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon}$$

- γ é função
 - Características do guia de ondas
 - a, b, μ e ϵ
 - Do modo de propagação: m e n
 - Da frequência: $\omega = 2\pi f$

Guia de Ondas Retangular

Fator de propagação do modo TM_{mn}

- Dependendo da frequência, tem-se três condições

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon}$$

$$\omega \text{ tal que } \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon > 0 \rightarrow \gamma = \alpha, \text{ número real}$$

$$\omega \text{ tal que } \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon = 0 \rightarrow \gamma = 0$$

$$\omega \text{ tal que } \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon < 0 \rightarrow \gamma = j\beta, \text{ número imaginário}$$

Guia de Ondas Retangular

Fator de propagação do modo TM_{mn}

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon}$$

- γ é função da frequência $\rightarrow \omega = 2\pi f$
- Operação do guia de ondas, dependendo da frequência

$$\gamma = \alpha$$



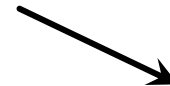
Modos
evanescentes

$$\gamma = 0$$



Corte

$$\gamma = j \cdot \beta$$



Modos
propagantes

Guia de Ondas Retangular

Modos evanescentes

- Para ω tal que
$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon > 0$$
- Fator de propagação do modo TM_{mn} é um número real e positivo

$$\rightarrow \gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon} = \alpha, \text{ número real e positivo}$$

O campo EM é **evanescente** → decresce exponencialmente com **z**,
direção de propagação

$$E_z = E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot \overbrace{e^{-\alpha \cdot z}}$$

Guia de Ondas Retangular

Modos propagantes

- Para ω tal que $\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon < 0$
- Fator de propagação do modo TM_{mn} é um número puramente imaginário

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon} = j \cdot \beta$$

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

O campo EM **propaga-se** ao longo de **z**, com constante de propagação β

$$E_z = E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot \overbrace{e^{-j \cdot \beta \cdot z}}$$

Guia de Ondas Retangular

Corte

Frequência angular de corte do modo TM_{mn} - ω_c

- ω_c é a frequência angular limite entre modos evanescentes e propagantes
- Na frequência angular de corte - ω_c

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega_c^2 \mu\epsilon} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega_c^2 \mu\epsilon = 0$$

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \cdot \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad \text{ou} \quad \omega_c = v \cdot \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

v : velocidade da onda no meio sem fronteiras

Guia de Ondas Retangular

Corte

Frequência de corte do modo TM_{mn} - f_c

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{v}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \longrightarrow f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

- A frequência de corte é função de
 - a e b - dimensões da seção transversal do guia
 - m e n – índices do modo de propagação
 - μ e ϵ do meio dielétrico que preenche o guia de ondas
- Modos $TM_{mn} \rightarrow m = 1, 2, 3, \dots$ e $n = 1, 2, 3, \dots$
 - TM_{11} TM_{12} TM_{21} TM_{22} TM_{13} TM_{31} TM_{23} ...

Guia de Ondas Retangular

Corte

Frequência de corte do modo TM_{mn} - f_c

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

- Guias de ondas comportam-se como **filtros passa-alta**
- Somente sinais com frequência $f > f_c$ propagam-se no guia
 - $f < f_c \rightarrow$ *modos evanescentes* \rightarrow *a onda EM é exponencialmente atenuada no interior do guia de onda*
 - $f = f_c \rightarrow$ *corte* \rightarrow *frequência limite entre atenuação ou propagação*
 - $f > f_c \rightarrow$ *a onda EM propaga-se no interior do guia de ondas*

Guia de Ondas Retangular

Exercício – Modos TM_{mn}

- Considere um guia de ondas retangular, sem perdas
 - Dimensões da seção transversal: $a = 40 \text{ mm}$, $b = 20 \text{ mm}$
 - Preenchido por ar $\rightarrow \epsilon_r = 1 \rightarrow v = c = 3 \cdot 10^{11} \text{ mm/s}$
- Calcule a frequência de corte dos modos TM_{11} , TM_{21} , e TM_{12} e TM_{22}

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \Rightarrow f_c = \frac{3 \cdot 10^{11}}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{40}\right)^2 + \left(\frac{n}{20}\right)^2}$$

$$f_c = 1,5 \cdot 10^{11} \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{40}\right)^2 + \left(\frac{n}{20}\right)^2} \text{ (Hz)} \quad \text{ou} \quad f_c = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{40}\right)^2 + \left(\frac{n}{20}\right)^2} \text{ (GHz)}$$

Guia de Ondas Retangular

Exercício – Modos TM_{mn}

- Frequência de corte dos modos TM_{11} , TM_{21} , e TM_{12} e TM_{22}

$$TM_{11} \rightarrow m=1 \text{ e } n=1 \rightarrow f_c = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{40}\right)^2 + \left(\frac{1}{20}\right)^2} = 8,38 \text{ GHz}$$

$$TM_{21} \rightarrow m=2 \text{ e } n=1 \rightarrow f_c = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{40}\right)^2 + \left(\frac{1}{20}\right)^2} = 10,61 \text{ GHz}$$

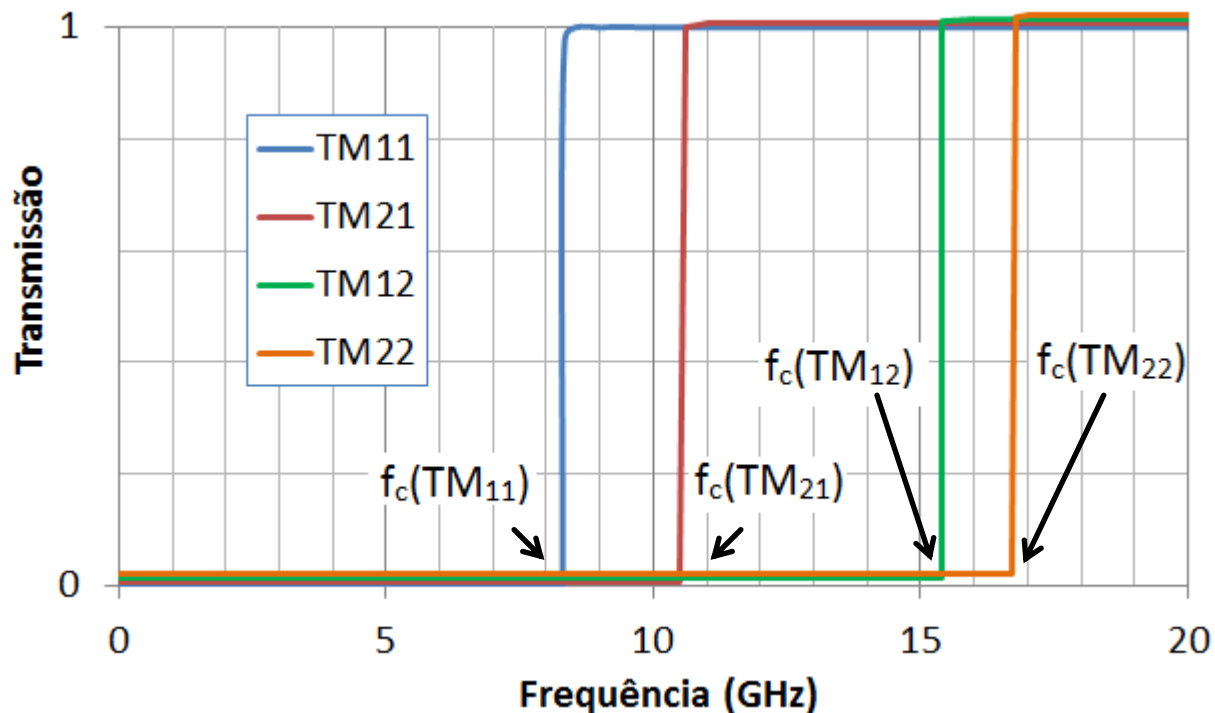
$$TM_{12} \rightarrow m=1 \text{ e } n=2 \rightarrow f_c = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{40}\right)^2 + \left(\frac{2}{20}\right)^2} = 15,46 \text{ GHz}$$

$$TM_{22} \rightarrow m=2 \text{ e } n=2 \rightarrow f_c = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{40}\right)^2 + \left(\frac{2}{20}\right)^2} = 16,77 \text{ GHz}$$

Guia de Ondas Retangular

Exercício – Modos TM_{mn}

Frequência de corte dos modos TM_{11} , TM_{21} , e TM_{12} e TM_{22}



Guia de Ondas Retangular

Exercício – Modos TM_{mn}

- Guia WR90, sem perdas
 - Dimensões da seção transversal
 - $a = 22,86 \text{ mm}$
 - $b = 10,16 \text{ mm}$
 - Preenchido por ar
 - Calcule a frequência de corte dos modos TM_{11} , TM_{21}

$$TM_{11} \rightarrow m=1 \text{ e } n=1 \rightarrow f_c = 16,16 \text{ GHz}$$

$$TM_{21} \rightarrow m=2 \text{ e } n=1 \rightarrow f_c = 19,75 \text{ GHz}$$

Guia de Ondas Retangular

Campo EM no domínio do tempo

- Uma vez conhecidos os fasores de campo elétrico e magnético

$$\bar{E} = E_x \cdot \hat{a}_x + E_y \cdot \hat{a}_y + E_z \cdot \hat{a}_z$$

$$\bar{H} = H_x \cdot \hat{a}_x + H_y \cdot \hat{a}_y + H_z \cdot \hat{a}_z$$

- Obtém-se os vetores de campo elétrico magnético

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \text{Re}[\bar{E}(x, y, z) \cdot e^{j\omega t}]$$

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \text{Re}[\bar{H}(x, y, z) \cdot e^{j\omega t}]$$

Guia de Ondas Retangular

Campo EM no domínio do tempo

- Fasor do campo elétrico: $\bar{E}(x, y, z) = E_x \cdot \hat{a}_x + E_y \cdot \hat{a}_y + E_z \cdot \hat{a}_z$
- Modo TM

$$E_x = \frac{-j\gamma m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_y = \frac{-j\gamma n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_z = E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

Guia de Ondas Retangular

Campo EM no domínio do tempo – Modo TM

- Acima da frequência de corte → modos propagantes
- Guia de ondas sem perdas: $\gamma = j \cdot \beta$

$$E_x = \frac{-j\gamma m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z}$$

$$E_y = \frac{-j\gamma n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z}$$

$$E_z = E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z}$$

Guia de Ondas Retangular

Campo EM no domínio do tempo – Modo TM

Campo Elétrico em função de x, y, z e $t \rightarrow \vec{E}(x, y, z, t) = \text{Re}[\bar{E}(x, y, z) \cdot e^{j\omega t}]$

$$\begin{aligned} \vec{E} = & \text{Re} \left[\frac{-j\gamma m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-j\beta \cdot z} \cdot e^{j\omega t} \right] \cdot \hat{a}_x \\ & + \text{Re} \left[\frac{-j\gamma n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-j\beta \cdot z} \cdot e^{j\omega t} \right] \cdot \hat{a}_y \\ & + \text{Re} \left[E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-j\beta \cdot z} \cdot e^{j\omega t} \right] \cdot \hat{a}_z \end{aligned}$$

Guia de Ondas Retangular

Campo EM no domínio do tempo – Modo TM

- Campo Elétrico $\vec{E}(x, y, z, t)$

$$\begin{aligned}\vec{E} = & \operatorname{Re} \left[-j \cdot E_x \cdot \cos \left(\frac{m\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t - \beta \cdot z)} \right] \cdot \hat{a}_x \\ & + \operatorname{Re} \left[-j \cdot E_y \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \cos \left(\frac{n\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t - \beta \cdot z)} \right] \cdot \hat{a}_y \\ & + \operatorname{Re} \left[E_z \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t - \beta \cdot z)} \right] \cdot \hat{a}_z\end{aligned}$$

Guia de Ondas Retangular

Campo EM no domínio do tempo – Modo TM

- Campo Elétrico

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, y, z, t) = & \left[E_x \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - \beta \cdot z) \right] \cdot \hat{a}_x \\ & + \left[E_y \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - \beta \cdot z) \right] \cdot \hat{a}_y \\ & + \left[E_z \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot z) \right] \cdot \hat{a}_z\end{aligned}$$

Guia de Ondas Retangular

Campo EM no domínio do tempo – Modo TM

- De forma similar obtém-se o Campo Magnético

$$\begin{aligned}\vec{H}(x, y, z, t) = & \left[-H_x \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - \beta \cdot z) \right] \cdot \hat{a}_x \\ & + \left[H_y \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - \beta \cdot z) \right] \cdot \hat{a}_y \\ & + [0] \cdot \hat{a}_z\end{aligned}$$

Guia de Ondas Retangular

λ_g - Comprimento de onda guiado do modo TM_{mn}

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta_{mn}} \quad \text{sendo} \quad \beta_{mn} = \sqrt{\underbrace{\omega^2 \mu \varepsilon}_{k^2} - \left[\underbrace{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}_{k_c^2 = \omega_c^2 \mu \varepsilon} \right]}$$

Logo:

$$\beta_{mn} = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - \omega_c^2 \mu \varepsilon} = 2\pi \sqrt{f^2 \mu \varepsilon - f_c^2 \mu \varepsilon} = 2\pi \sqrt{\left(\frac{f}{v}\right)^2 - \left(\frac{f_c}{v}\right)^2}$$

Guia de Ondas Retangular

Comprimento de onda guiado do modo TM_{mn}

Logo:

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta_{mn}} = \frac{2\pi}{2\pi \sqrt{\left(\frac{f}{v}\right)^2 - \left(\frac{f_c}{v}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{f^2 - f_c^2}}$$

Dividindo os dois termos por f

$$\lambda_g = \frac{\frac{v}{f}}{\sqrt{\left(\frac{f}{f}\right)^2 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \rightarrow$$

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

sendo $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r} \cdot f}$ ou

$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r} \cdot f}$ para $\mu_r = 1$

Guia de Ondas Retangular

Comprimento de onda guiado do modo TM_{mn}

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

sendo $\lambda = \frac{v}{f}$ ou $\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$ e $\lambda_0 = \frac{c}{f}$

λ : comprimento da onda que se propagaria no dielétrico que preenche o guia, sem fronteiras

λ_g : comprimento de onda guiado (no interior do guia de ondas)

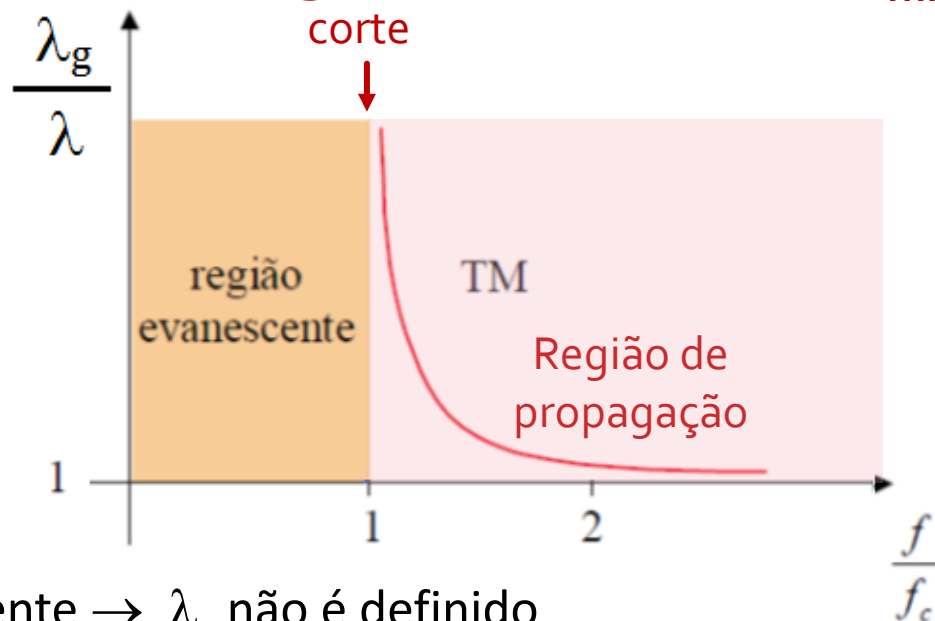
f_c : frequência de corte do modo guiado

- Vale apenas para $f > f_c$
- Depende do modo de propagação TM_{mn} dentro do guia de ondas

Guia de Ondas Retangular

Comprimento de onda guiado do modo TM_{mn}

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$



Para $f < f_c \rightarrow$ região evanescente $\rightarrow \lambda_g$ não é definido

Para $f = f_c \rightarrow$ corte $\rightarrow \lambda_g$ tende a infinito

Para $f > f_c \rightarrow$ região de propagação $\rightarrow \lambda_g$ decresce cresce com a frequência

Para $f \gg f_c \rightarrow$ região de propagação $\rightarrow \lambda_g$ tende a λ , comprimento de onda do meio

Guia de Ondas Retangular

Comprimento de onda guiado do modo TM_{mn}

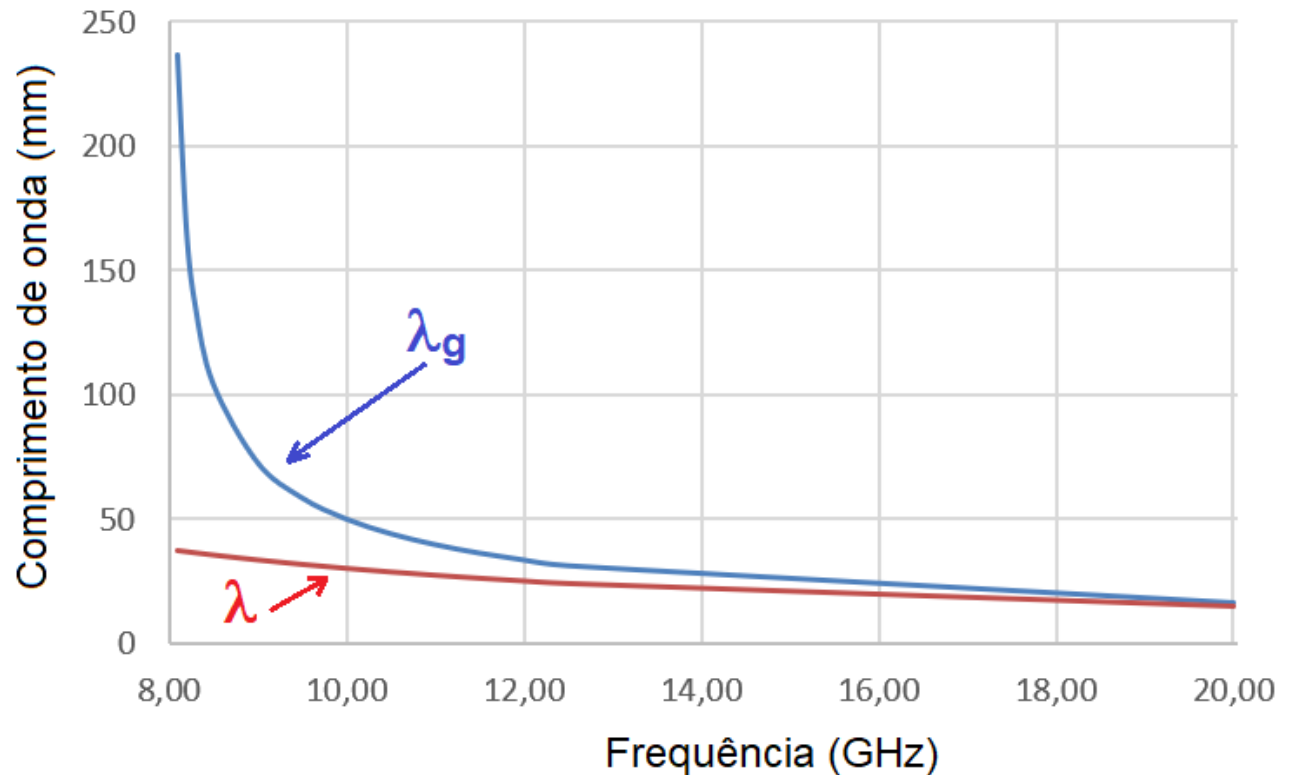
Exemplo

- Guia retangular
- Preenchido por ar
- Modo TM
- $f_c = 8$ GHz

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\epsilon_r}}$$

Comprimento de onda x frequência



Guia de Ondas Retangular

Z_{TM} - Impedância de onda do guia de ondas no modo TM_{mn}

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x}$$

- Na região de propagação, com $f > f_c$

$$E_x = \frac{-j\beta m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-j\beta \cdot z}$$

$$H_y = \frac{-j\omega\epsilon m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-j\beta \cdot z}$$

- Logo $Z_{TM} = \frac{\beta}{\omega\epsilon}$ sendo $\beta = \sqrt{\omega^2 \mu\epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$

Guia de Ondas Retangular

Impedância de onda do guia de ondas no modo TM_{mn}

- Lembrando que

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \sqrt{k^2 - k_c^2} \\ k_c^2 &= \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = \omega_c^2 \mu \epsilon \end{aligned} \right\} \rightarrow \beta = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \omega_c^2 \mu \epsilon}$$

Logo
$$Z_{TM} = \frac{\beta}{\omega \epsilon} = \frac{\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \omega_c^2 \mu \epsilon}}{\omega \epsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_c^2}{\omega^2}} = \eta \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$$

$$Z_{TM} = \eta \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad \text{sendo} \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad \text{e} \quad \eta_0 = 377 \, \Omega$$

Guia de Ondas Retangular

- Impedância de onda do guia de ondas no modo TM_{mn}

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} \Rightarrow Z_{TM} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

η : impedância de onda intrínseca do meio que preenche o guia de ondas

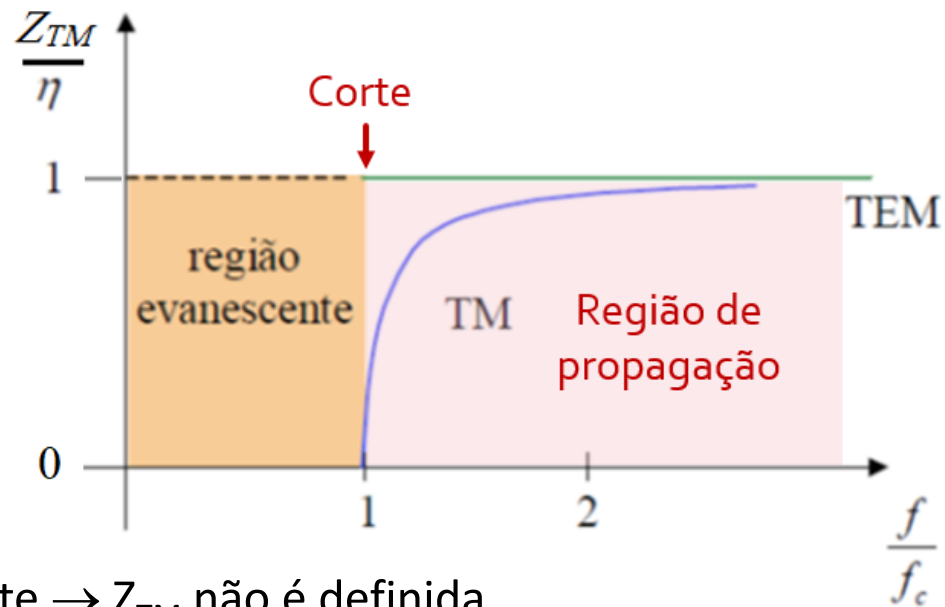
f_c : frequência de corte do modo guiado

- Equação válida somente para $f > f_c$
- Z_{TM} depende
 - da frequência do sinal
 - da frequência de corte do modo
- Z_{TM} é função de frequência \Rightarrow **dispersão**

Guia de Ondas Retangular

Impedância de onda do guia de ondas no modo TM_{mn}

$$Z_{TM} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$



Para $f < f_c \rightarrow$ região evanescente $\rightarrow Z_{TM}$ não é definida

Para $f = f_c \rightarrow$ corte $\rightarrow Z_{TM}$ é nula \rightarrow curto-circuito

Para $f > f_c \rightarrow$ região de propagação $\rightarrow Z_{TM}$ cresce com a frequência de operação

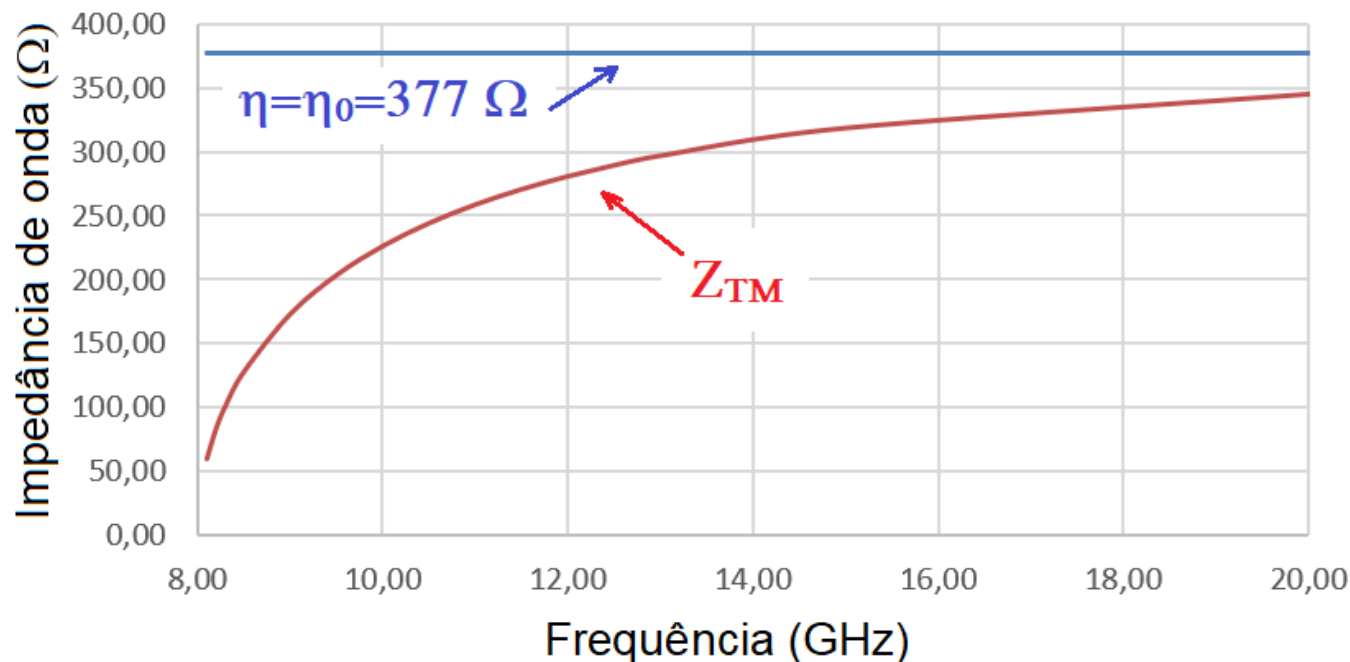
Para $f \gg f_c \rightarrow$ região de propagação $\rightarrow Z_{TM}$ tende a η , impedância intrínseca do meio

Guia de Ondas Retangular

Comprimento de onda guiado do modo TM_{mn}

Exemplo: Guia retangular, preenchido por ar, modo TM , $f_c = 8$ GHz

Impedância de onda x frequência



$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y}$$

$$Z_{TM} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

Guia de Ondas Retangular

Modos TE

Guia de Ondas Retangular

- **Solução dos Modos TE** $E_z = 0$ e $H_z \neq 0$
 - Componente de campo magnético não nulo na direção de propagação z

$$H_z \neq 0 \rightarrow \text{a ser determinado}$$

- Campo harmônico ou senoidal

$$H_z(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \neq 0$$

- Cálculo de $H_z \Rightarrow$ equação de onda na direção z

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k^2 H_z = 0$$

Guia de Ondas Retangular

Modos TE

- Solução geral de H_z do modo TE
 - Similar a obtida para E_z no modo TM

$$H_z = \left[A \cdot \cos(k_x \cdot x) + B \cdot \sin(k_x \cdot x) \right] \cdot \left[C \cdot \cos(k_y \cdot y) + D \cdot \sin(k_y \cdot y) \right] \cdot \left[F \cdot e^{-\gamma \cdot z} + G \cdot e^{+\gamma \cdot z} \right]$$

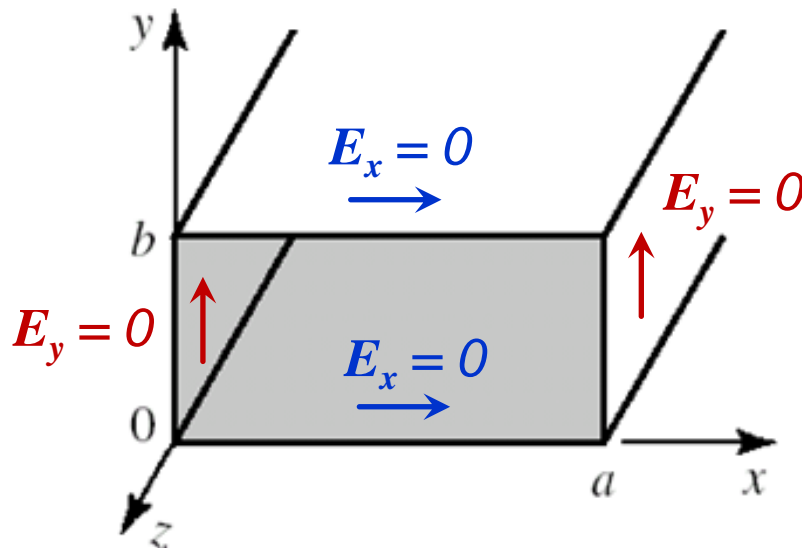
MAS A, B, C, D, F e G são constantes diferentes das do modo TM

- Determinação das constantes A, B, C, D, F e G
 - Aplicação das condições de contorno do guia de ondas

Guia de Ondas Retangular

Modos TE

- Condições de contorno
 - Campo elétrico tangencial ao metal é nulo
 - H_z não é nulo nas paredes do guia, mas temos



- $E_y = 0$ nas paredes verticais do guia
 - $x = 0$ e $x = a$
- $E_x = 0$ nas paredes horizontais do guia
 - $y = 0$ e $y = b$

Guia de Ondas Retangular

Modos TE

- Campos E_x e E_y são funções de derivadas de H_z

$$E_x = \frac{-j}{k_c^2} \left(\gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right)$$

$$E_y = \frac{j}{k_c^2} \left(-\gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)$$

- No modo TE $\rightarrow E_z=0$

$$E_x = -j \frac{\gamma \omega \mu}{k_c^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad e \quad E_y = -j \frac{\gamma \omega \mu}{k_c^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

Guia de Ondas Retangular

Modos TE

- Como

$$E_x = -j \frac{\gamma \omega \mu}{k_c^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

e

$$H_z = \left[A \cdot \cos(k_x \cdot x) + B \cdot \sin(k_x \cdot x) \right] \cdot \left[C \cdot \cos(k_y \cdot y) + D \cdot \sin(k_y \cdot y) \right] \cdot \left[F \cdot e^{-\gamma \cdot z} + G \cdot e^{+\gamma \cdot z} \right]$$

$$E_x \propto \frac{\partial H_z}{\partial y} = \left[A \cdot \cos(k_x \cdot x) + B \cdot \sin(k_x \cdot x) \right] \cdot \left[-C \cdot k_y \cdot \sin(k_y \cdot y) + D \cdot k_y \cdot \cos(k_y \cdot y) \right] \cdot \left[F \cdot e^{-\gamma \cdot z} + G \cdot e^{+\gamma \cdot z} \right]$$

$$\left[-C \cdot k_y \cdot \sin(k_y \cdot y) + D \cdot k_y \cdot \cos(k_y \cdot y) \right] \cdot \left[F \cdot e^{-\gamma \cdot z} + G \cdot e^{+\gamma \cdot z} \right]$$

Condição de contorno

$E_x = 0$ nas paredes horizontais do guia

$y = 0$ e $y = b$

Guia de Ondas Retangular

Modos TE

- Como

$$E_y = -j \frac{\gamma \omega \mu}{k_c^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$H_z = \left[A \cdot \cos(k_x \cdot x) + B \cdot \cancel{\text{sen}(k_x \cdot x)} \right] \cdot \left[C \cdot \cos(k_y \cdot y) \right] \cdot \left[F \cdot e^{-\gamma \cdot z} + G \cdot e^{+\gamma \cdot z} \right]$$

$$E_y \propto \frac{\partial H_z}{\partial x} = \left[-A \cdot k_x \cdot \text{sen}(k_x \cdot x) + \cancel{B \cdot k_x \cdot \cos(k_x \cdot x)} \right] \cdot \left[C \cdot \cos(k_y \cdot y) \right] \cdot \left[F \cdot e^{-\gamma \cdot z} + G \cdot e^{+\gamma \cdot z} \right]$$

Condição de contorno

$E_y = 0$ nas paredes verticais do guia

$x = 0$ e $x = a$

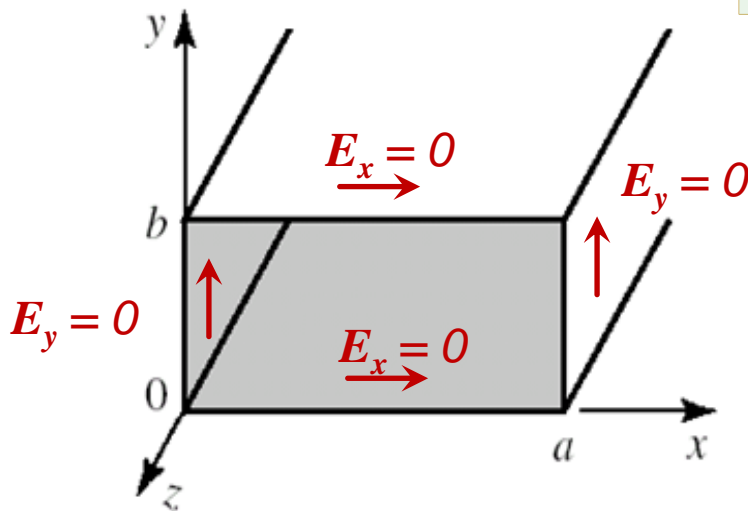
Guia de Ondas Retangular

Modos TE

- Aplicando-se as condições de contorno de E_x e E_y nas paredes do guia de ondas, obtém-se

$$E_z = 0$$

$$H_z = H_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$



onde

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$m + n \neq 0$$

Se $m + n = 0 \Rightarrow H_z = H_0 = \text{cte}$
 \Rightarrow não é modo TE

Guia de Ondas Retangular

Modos TE

- A partir de H_z calcula-se

$$E_x = \frac{j\omega\mu n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot H_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_y = \frac{-j\omega\mu m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot H_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$H_x = \frac{j\gamma m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot H_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$H_y = \frac{j\gamma n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot H_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

Guia de Ondas Retangular

- **Modos TE_{mn}**

- $m = 0, 1, 2, 3$ $n = 0, 1, 2, 3$ e $m + n \neq 0$

Modos TE₀₁ TE₁₀ TE₁₁ TE₀₂ TE₂₀ TE₂₁ TE₂₂ TE₀₃

- **Frequência de corte do modo TE_{mn}**

- Depende dos índices m e n

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

$f < f_c$: modos evanescentes

$f = f_c$: corte

$f > f_c$: propagação no guia de ondas

Guia de Ondas Retangular

■ Modo TE₁₀

- **Modo dominante** → menor frequência de corte
- Frequência de corte para m = 1 e n = 0

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{0}{b}\right)^2} \rightarrow f_c = \frac{v}{2 \cdot a}$$

$$E_x = \frac{j\omega\mu n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot H_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z} \rightarrow E_x = 0$$

$$E_y = \frac{-j\omega\mu m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot H_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z} \rightarrow E_y \propto \text{sen}\left(\frac{\pi}{a} \cdot x\right)$$

Guia de Ondas Retangular

- **Modo TE₁₀**

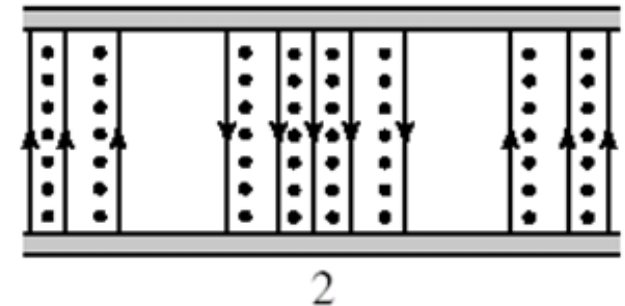
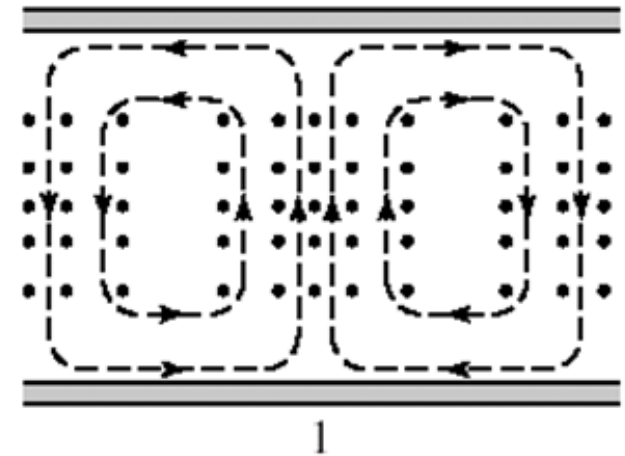
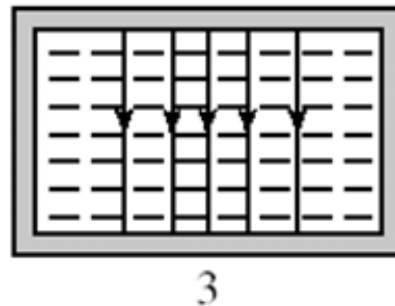
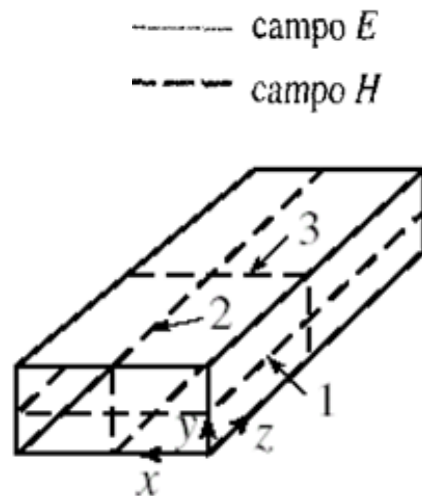
- Dominante

- Menor frequência de corte

$$f_c = \frac{v}{2 \cdot a}$$

$$E_x = 0$$

$$E_y \propto \text{sen} \left(\frac{\pi}{a} \cdot x \right)$$

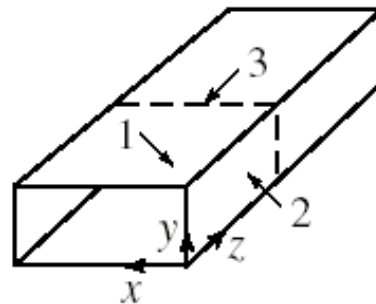


Guia de Ondas Retangular

■ Modo TE₁₁

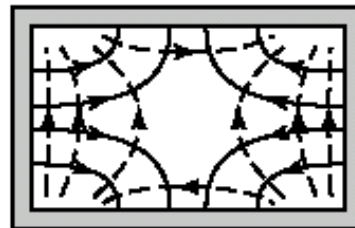
$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}$$

$$E_x(x, y) \propto \cos\left(\frac{\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{b} \cdot y\right)$$

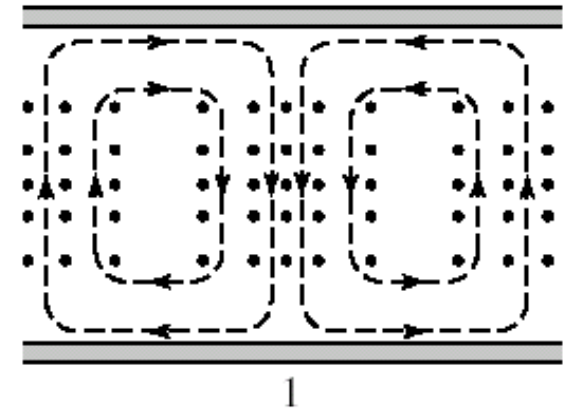


----- campo E
 - - - - - campo H

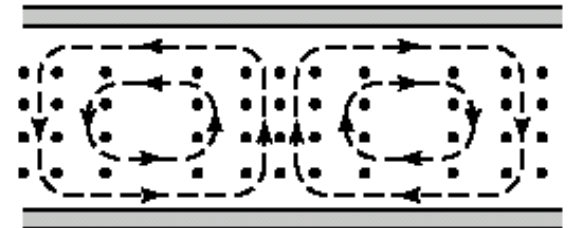
$$E_y(x, y) \propto \text{sen}\left(\frac{\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{b} \cdot y\right)$$



3



1



2

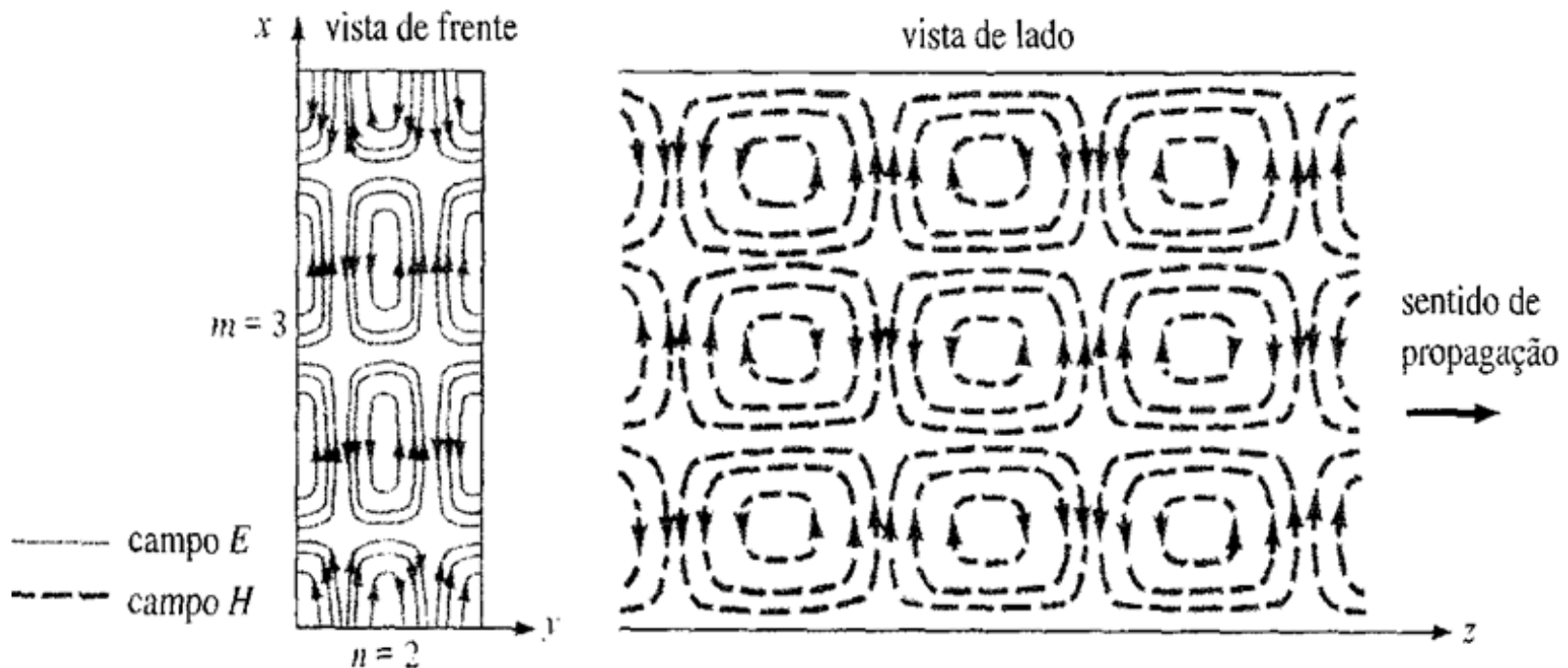
Guia de Ondas Retangular

■ Modo TE₃₂

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{3}{a}\right)^2 + \left(\frac{2}{b}\right)^2}$$

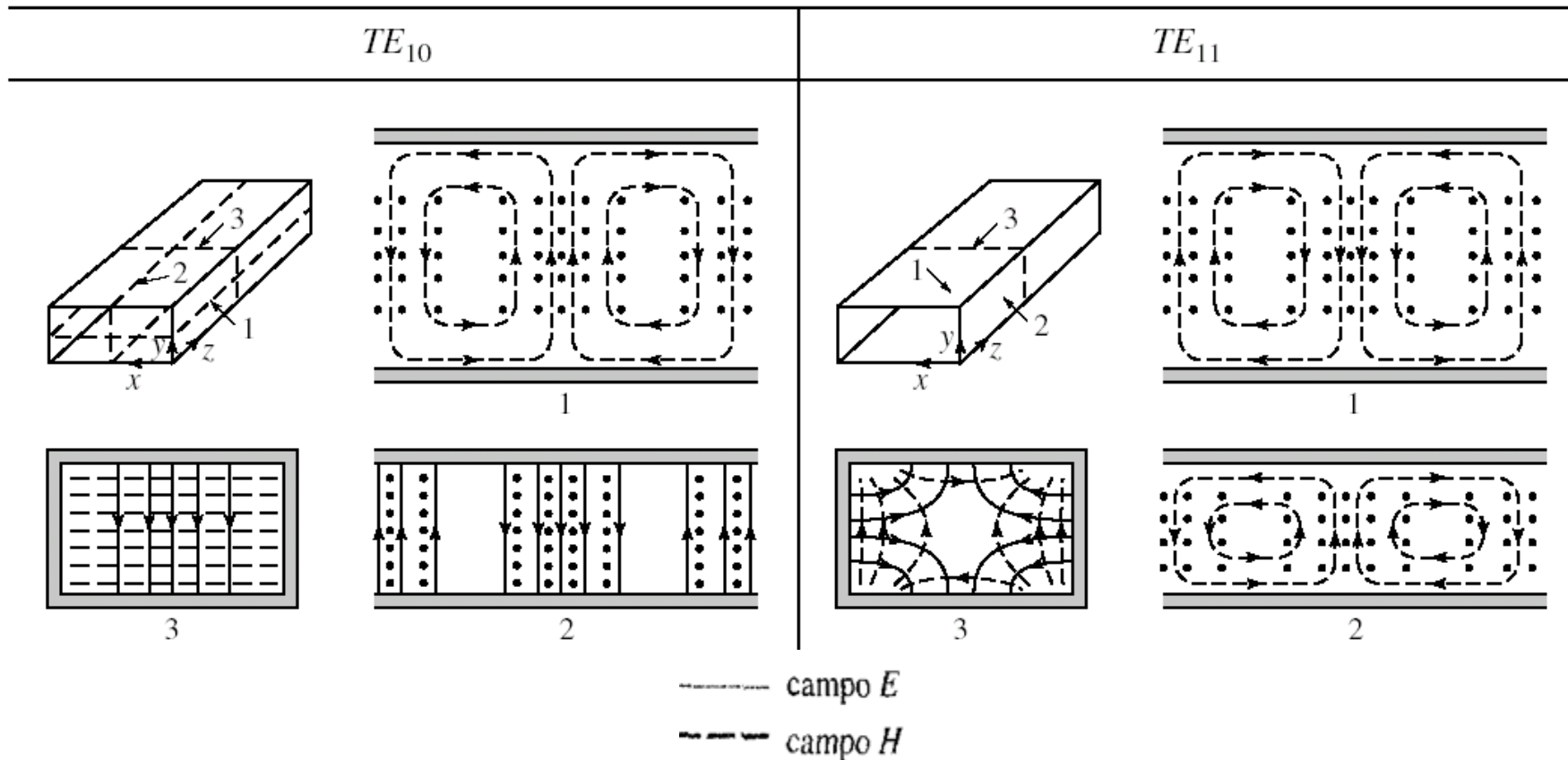
$$E_x(x,y) \propto \cos\left(\frac{3\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{b} \cdot y\right)$$

$$E_y(x,y) \propto \text{sen}\left(\frac{3\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{cos}\left(\frac{2\pi}{b} \cdot y\right)$$



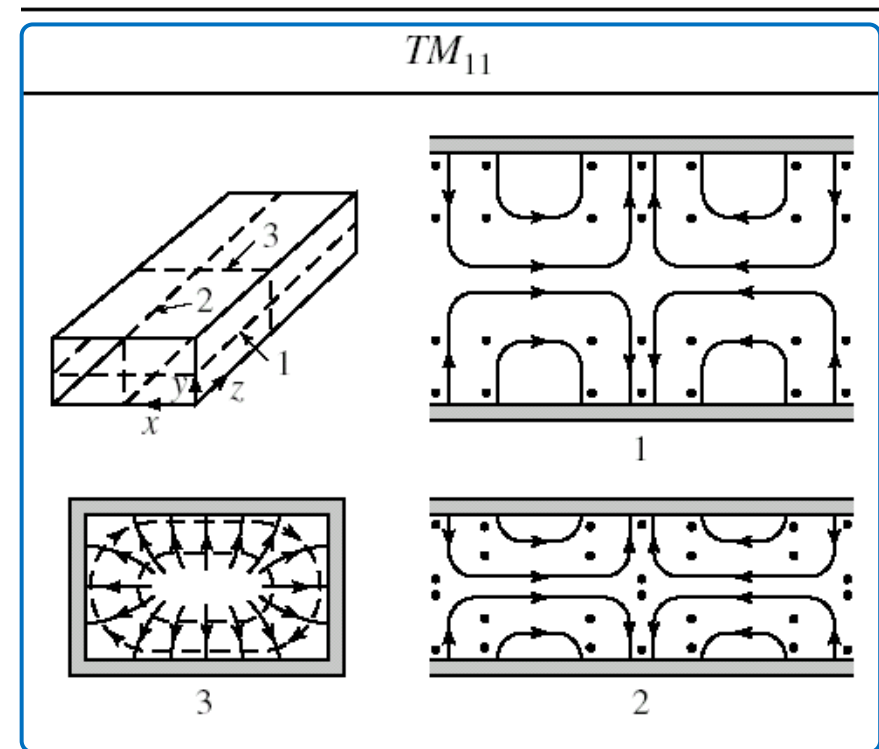
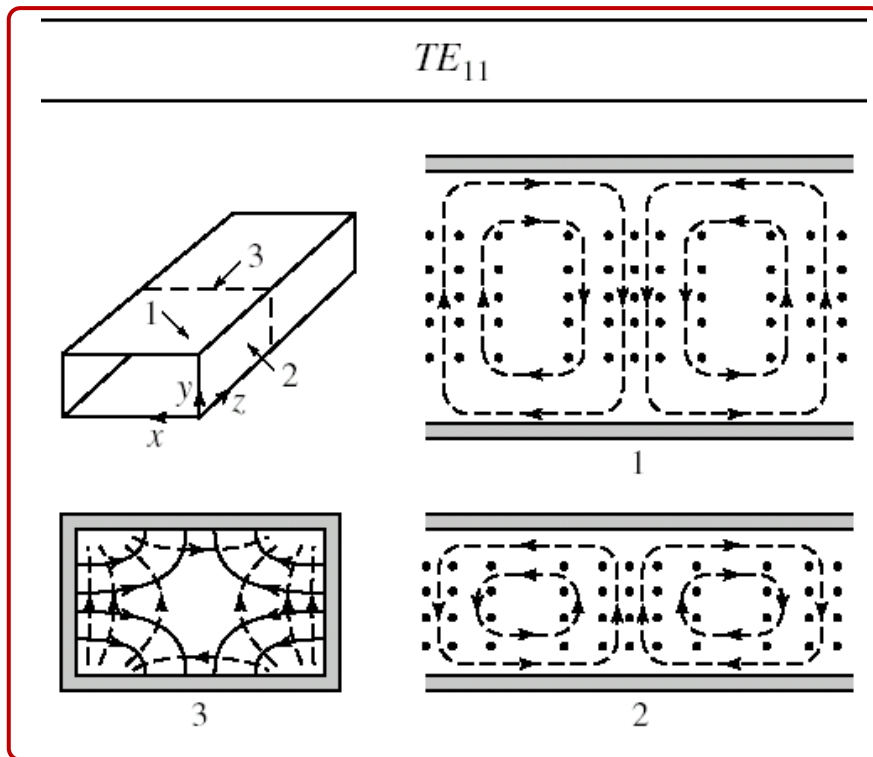
Guia de Ondas Retangular

- Modos TE_{10} e TE_{11}



Guia de Ondas Retangular

- Comparando os modos TE_{11} e TM_{11} - mesma f_c



----- campo E
 - - - - - campo H

Guia de Ondas Retangular

Exercício – Modos TE_{mn}

- Considere um guia de ondas retangular, sem perdas
 - Dimensões da seção transversal: $a = 40 \text{ mm}$, $b = 20 \text{ mm}$
 - Preenchido por ar $\rightarrow \epsilon_r = 1 \rightarrow v = c = 3 \cdot 10^{11} \text{ mm/s}$
- Calcule a frequência de corte dos modos TE_{10} , TE_{01} , e TE_{20} e TE_{11}

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \Rightarrow f_c = \frac{3 \cdot 10^{11}}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{40}\right)^2 + \left(\frac{n}{20}\right)^2}$$

$$f_c = 1,5 \cdot 10^{11} \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{40}\right)^2 + \left(\frac{n}{20}\right)^2} \text{ (Hz)} \quad \text{ou} \quad f_c = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{40}\right)^2 + \left(\frac{n}{20}\right)^2} \text{ (GHz)}$$

Guia de Ondas Retangular

Exercício – Modos TE_{mn}

- Frequência de corte dos modos TE_{11} , TE_{21} , e TE_{12} e TE_{22}

$$TE_{10} \rightarrow m=1 \text{ e } n=0 \rightarrow f_c = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{40}\right)^2 + \left(\frac{0}{20}\right)^2} = 3,75 \text{ GHz}$$

$$TE_{01} \rightarrow m=0 \text{ e } n=1 \rightarrow f_c = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{0}{40}\right)^2 + \left(\frac{1}{20}\right)^2} = 7,5 \text{ GHz}$$

$$TE_{20} \rightarrow m=2 \text{ e } n=0 \rightarrow f_c = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{40}\right)^2 + \left(\frac{0}{20}\right)^2} = 7,5 \text{ GHz}$$

$$TE_{11} \rightarrow m=1 \text{ e } n=1 \rightarrow f_c = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{40}\right)^2 + \left(\frac{1}{20}\right)^2} = 8,38 \text{ GHz}$$

(e TM_{11})

Guia de Ondas Retangular

Modo fundamental

- Modo com menor frequência de corte
- Frequência de corte

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

- Modo fundamental → Modo TE_{10}
 - Como $m=1$ e $n=0$ e $a > b$

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{0}{b}\right)^2} \rightarrow f_c^{(TE_{10})} = \frac{v}{2 \cdot a}$$

Guia de Ondas Retangular

Modos degenerados

- Modos com a mesma frequência de corte
- Frequência de corte para modos TM_{mn} e TE_{mn}

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

- Modos TE e TM com mesmos índices (m e n) têm a mesma frequência de corte → são modos degenerados

TE₁₁ e TM₁₁

TE₁₃ e TM₁₃

TE₂₁ e TM₂₁

TE₄₄ e TM₄₄

TE₃₁ e TM₃₁

.....

Guia de Ondas Retangular

Modos degenerados

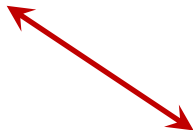
- Quando **a** é um **múltiplo inteiro** de **b**, têm-se outros modos degenerados

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

- Exemplo: **$a = 2 \cdot b$**

Modo TE₀₁ → $f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{0}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2} = \frac{v}{2 \cdot b}$

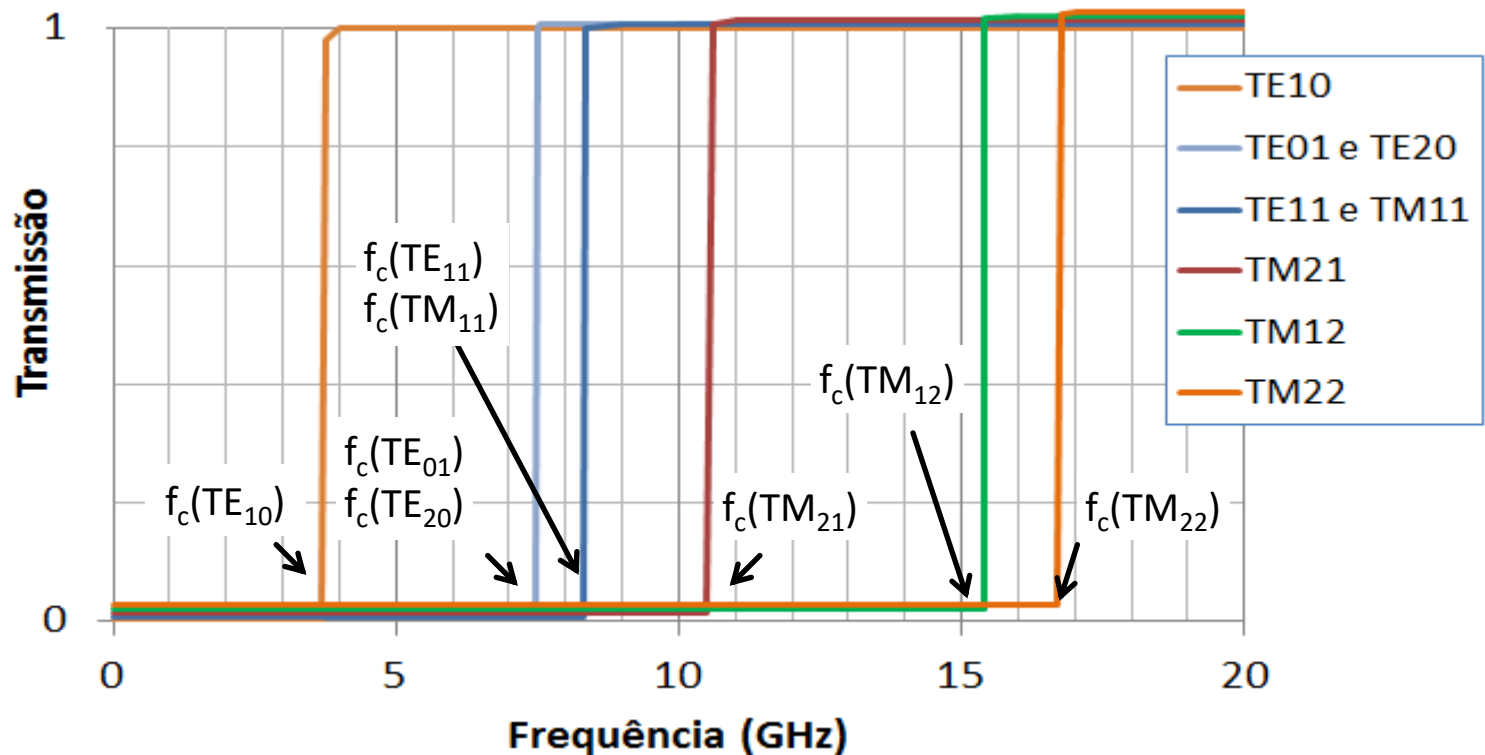
Modo TE₂₀ → $f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)^2 + \left(\frac{0}{b}\right)^2} = \frac{2 \cdot v}{2 \cdot a} = \frac{v}{a} = \frac{v}{2 \cdot b}$



Guia de Ondas Retangular

Frequência de corte dos modos TE_{mn} e TM_{mn}

Modos TE_{10} , TE_{01} , TE_{20} , TE_{11} , TM_{11} , TM_{21} , e TM_{12} e TM_{22}



Guia de Ondas Retangular

Frequências de corte de modos TM e TE – guia WR90

- | a(cm) | b(cm) | m | n | Er | fc(GHz) |
|-------|-------|------|------|--------|---------|
| 2,286 | 1,016 | 1,00 | 0,00 | 1,0000 | 6,5617 |
| 2,286 | 1,016 | 0,00 | 1,00 | 1,0000 | 14,7638 |
| 2,286 | 1,016 | 2,00 | 0,00 | 1,0000 | 13,1234 |
| 2,286 | 1,016 | 1,00 | 1,00 | 1,0000 | 16,1563 |
| 2,286 | 1,016 | 2,00 | 1,00 | 1,0000 | 19,7533 |
| 2,286 | 1,016 | 1,00 | 2,00 | 1,0000 | 30,2478 |
| 2,286 | 1,016 | 2,00 | 2,00 | 1,0000 | 32,3125 |
| 2,286 | 1,016 | 3,00 | 0,00 | 1,0000 | 19,6850 |
| 2,286 | 1,016 | 0,00 | 3,00 | 1,0000 | 44,2913 |

Guia de Ondas Retangular

■ Frequência de corte do modo TE_{mn}

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

← Mesma equação que para o modo TM_{mn}

- Como no modo TM_{mn}

■ Comprimento de onda guiado do modo TE_{mn}

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta_{mn}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

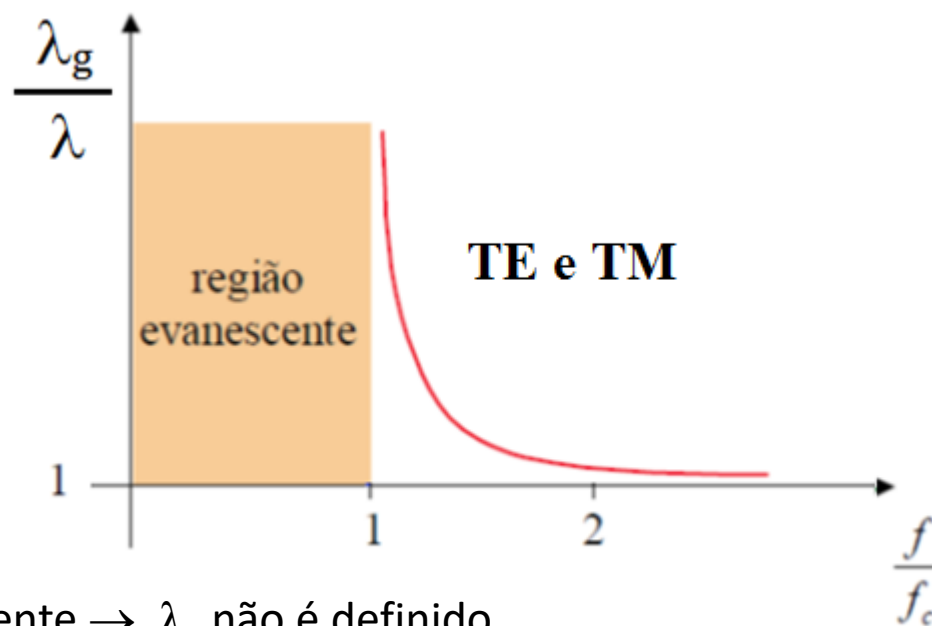
← Mesma equação que para o modo TM_{mn}

- Vale apenas para $f > f_c$
- Como no modo TM_{mn}

Guia de Ondas Retangular

Comprimento de onda guiado do modo TE_{mn} (e TM_{nm})

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$



Como nos modos TM_{mn}

Para $f < f_c \rightarrow$ região evanescente $\rightarrow \lambda_g$ não é definido

Para $f = f_c \rightarrow$ corte $\rightarrow \lambda_g$ tende a infinito \rightarrow circuito aberto

Para $f > f_c \rightarrow$ região de propagação $\rightarrow \lambda_g$ decresce cresce com a frequência de operação

Para $f \gg f_c \rightarrow$ região de propagação $\rightarrow \lambda_g$ tende a λ , comprimento de onda do meio

Guia de Ondas Retangular

- Impedância de onda do guia de ondas no modo TE_{mn}

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} \quad \Rightarrow \quad Z_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

η : impedância intrínseca do meio que preenche o guia de ondas

f_c : frequência de corte do modo guiado

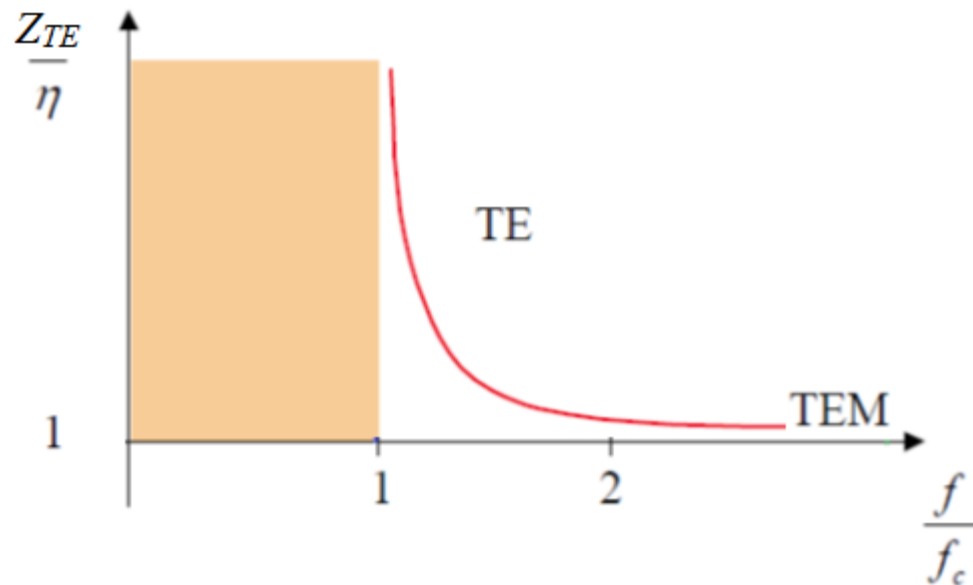
- Vale apenas para $f > f_c$
- Depende da frequência de corte do modo
- Z_{TE} é função de frequência \Rightarrow **dispersão**

- **NOTE:** Z_{TE} é diferente de $Z_{TM} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$

Guia de Ondas Retangular

- Impedância de onda do guia de ondas nos modos TE_{mn}

$$Z_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$



Para $f < f_c$ → região evanescente → Z_{TE} não é definida

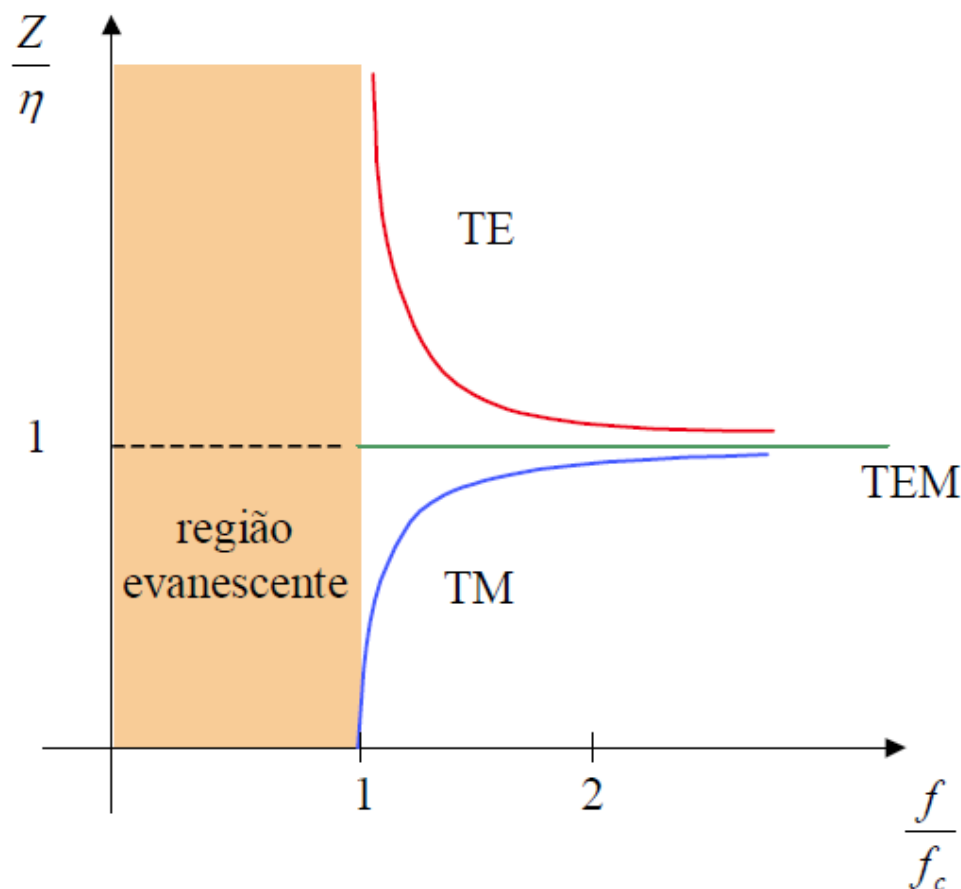
Para $f = f_c$ → corte → Z_{TE} tende a infinito

Para $f > f_c$ → região de propagação → Z_{TE} decresce com a frequência de operação

Para $f \gg f_c$ → região de propagação → Z_{TE} tende a η , impedância intrínseca do meio

Guia de Ondas Retangular

- Impedância de onda do guia de ondas nos modos TM_{mn} e TE_{mn}



$$Z_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

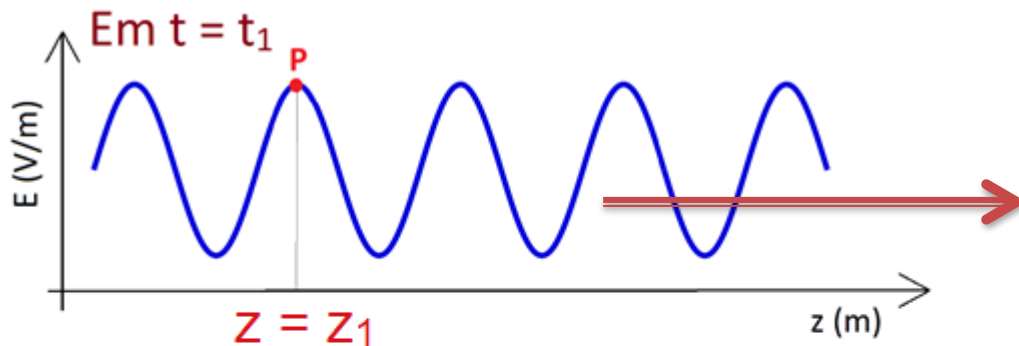
$$Z_{TM} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

Guia de Ondas Retangular

Velocidade de fase e de grupo dos modos guiados

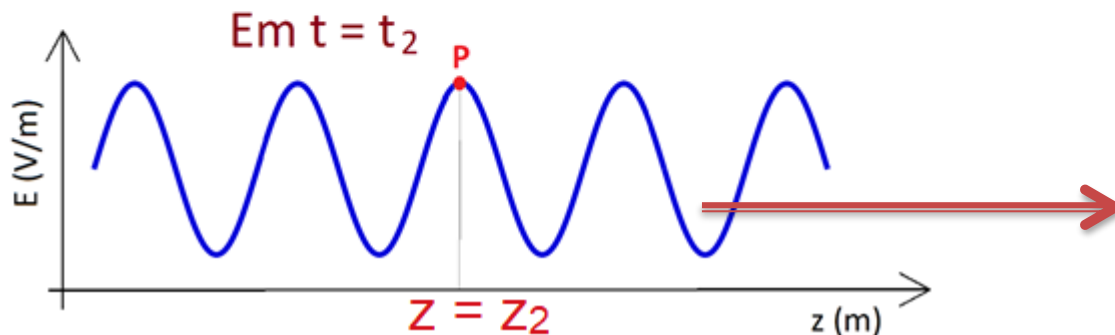
Velocidade de fase em meio sem fronteiras

- Velocidade da fase da onda na direção de propagação



- Propagação na direção z

$$v_f = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1}$$



- Onda no espaço livre

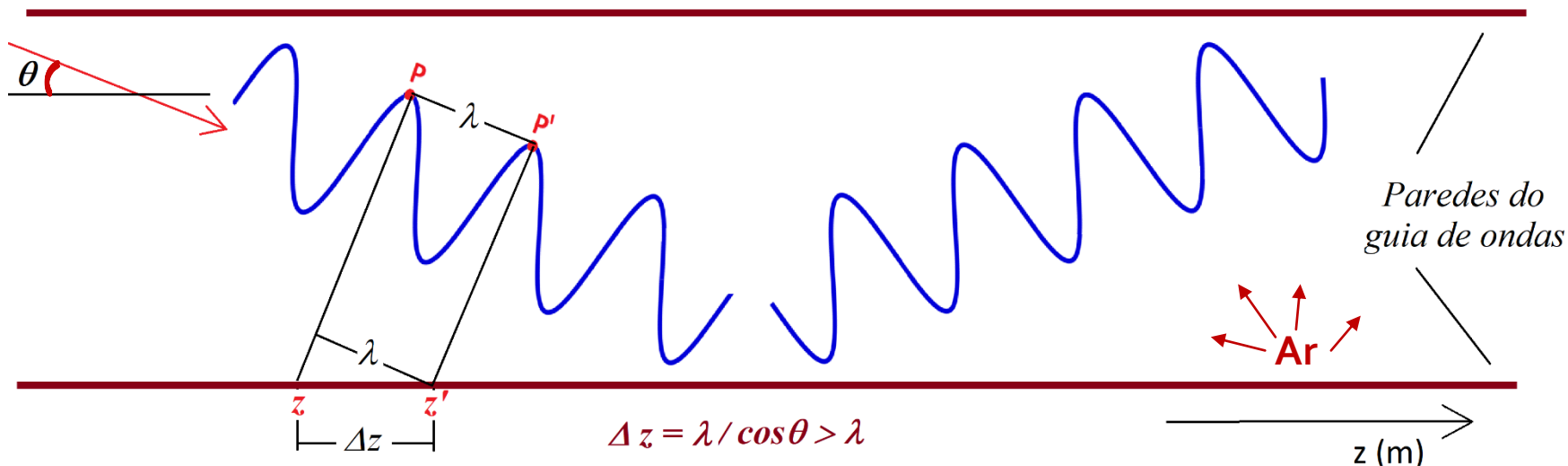
$$v_f = \frac{\Delta z}{\Delta t} = c$$

Guia de Ondas Retangular

Velocidade de fase e de grupo dos modos guiados

Velocidade de fase no guia de ondas

- Onda incidindo com ângulo θ em relação à direção de propagação z



- Velocidade de fase na direção de incidência: $v_f = c$
- Velocidade de fase na direção de propagação z : $v_f = c / \cos\theta > c$

Guia de Ondas Retangular

Velocidade de fase e de grupo dos modos guiados

Velocidade de fase na direção de propagação

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \geq v \qquad v = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \cdot \epsilon_r}}$$

- Vale apenas para $f > f_c$
- Guias de ondas preenchido com ar $\rightarrow v_f$ é maior que a velocidade da luz!
- Definida para um sinal monocromático
 - \rightarrow sinal de frequência única, sem modulação
 - \rightarrow não transporta informação
- Não representa o transporte de informação, sendo portanto compatível com a teoria EM

Guia de Ondas Retangular

Velocidade de fase e de grupo dos modos guiados

Velocidade de grupo

- Definida para um sinal modulado pela informação
 - é a velocidade de propagação da envoltória do sinal
 - velocidade de propagação da informação

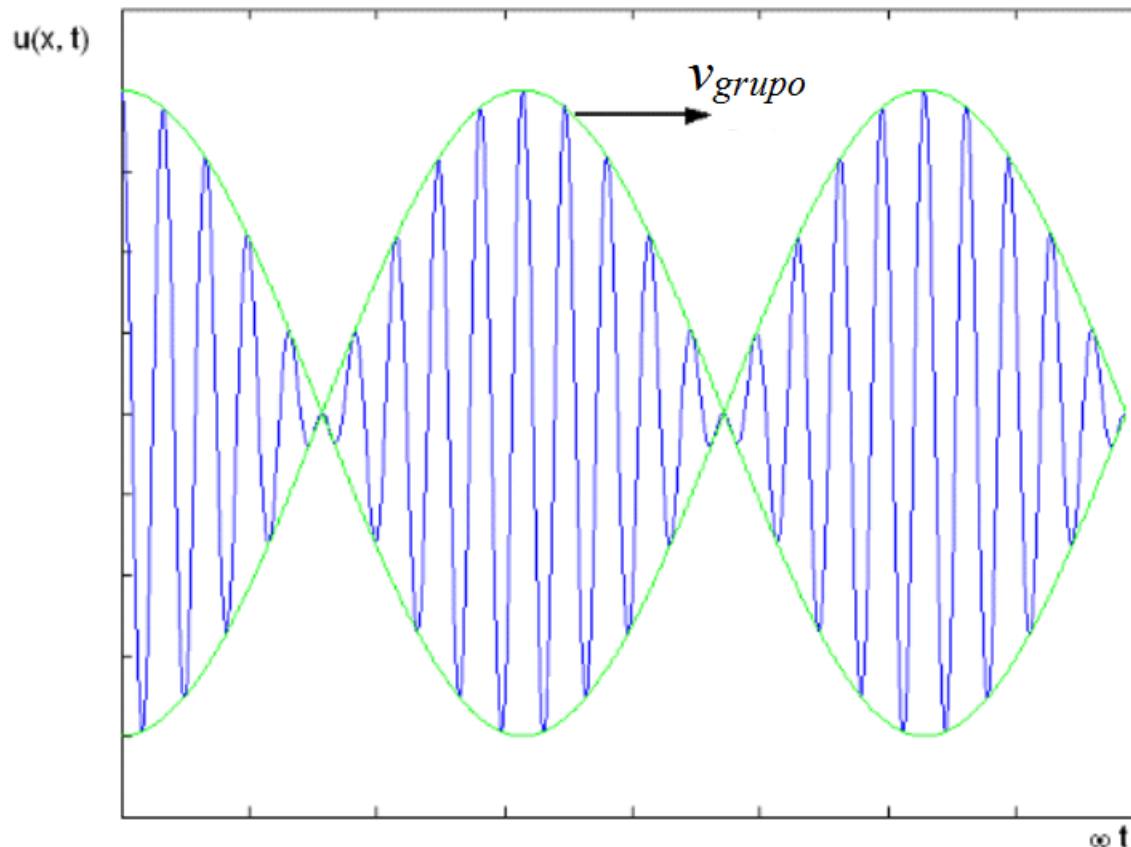
$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = v \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \leq v \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \cdot \epsilon_r}}$$

- Vale apenas para $f > f_c$
- Representa a velocidade com que se propaga o envoltório de um sinal modulado pela informação

Guia de Ondas Retangular

Velocidade de grupo

Velocidade de propagação da envoltória do sinal modulado



Guia de Ondas Retangular

Velocidade de fase e de grupo dos modos guiados

- Velocidade de fase

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \geq v$$

- Velocidade de grupo

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = v \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \leq v$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}}$$
$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \cdot \epsilon_r}}$$

- Resulta

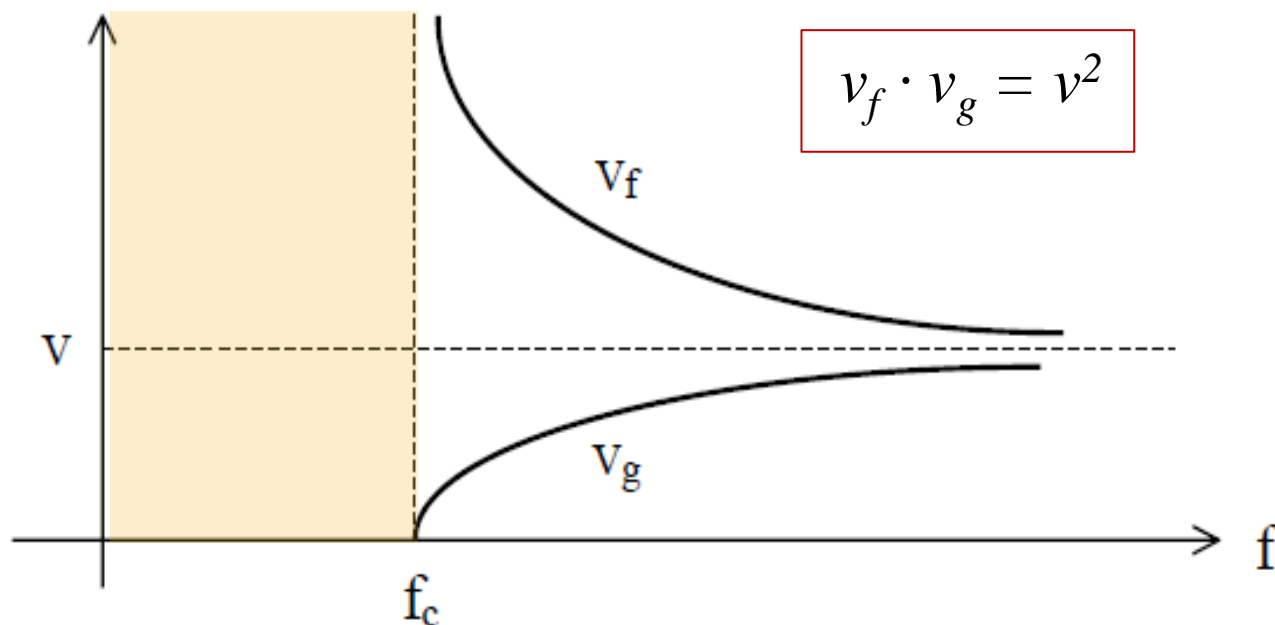
$$v_f \cdot v_g = v^2$$

- Velocidades de fase e de grupo dependem
 - da frequência de corte f_c
 - do modo de propagação

Guia de Ondas Retangular

■ Velocidade de fase e de grupo dos modos guiados

- Velocidades de fase e de grupo
 - para um dado de modo de propagação



Guia de Ondas Retangular

Resumo – guia de ondas retangular sem perdas

Modos de propagação

- **Modos TM** → **T**ransversal **M**agnético → $H_z = 0$ e $E_z \neq 0$
- **Modos TE** → **T**ransversal **E**létrico → $E_z = 0$ e $H_z \neq 0$

Dedução das equações dos modos de propagação

- Resolução das equações de onda
 - Correntes e cargas nulas no interior do guia de ondas

Guia de Ondas Retangular

Resumo – guia de ondas retangular sem perdas

Equações de onda

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

- Válidas para meios
 - Lineares
 - Isotrópicos
 - Homogêneos
 - Invariantes no tempo

Condições de contorno

- Campo Elétrico tangencial às paredes do guia é nulo

Guia de Ondas Retangular

Modos TM_{mn}

$$m = 1, 2, 3... \quad n = 1, 2, 3...$$

$$H_z = 0 \quad E_z = E_0 \cdot \text{sen} \left(\frac{m\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{n\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

Modos TE_{mn}

$$m = 0, 1, 2... \quad n = 0, 1, 2... \quad m+n \neq 0$$

$$E_z = 0 \quad H_z = H_0 \cdot \text{cos} \left(\frac{m\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \text{cos} \left(\frac{n\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

Guia de Ondas Retangular

Modos TM_{mn}

$m = 1, 2, 3 \dots$ $n = 1, 2, 3 \dots$

$$H_z = 0$$

$$E_z = E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_x = \frac{-j\beta m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_y = \frac{-j\beta n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$H_x = \frac{j\omega\epsilon n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$H_y = \frac{-j\omega\epsilon m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

Modos TE_{mn}

$m = 0, 1, 2 \dots$ $n = 0, 1, 2 \dots$ $m + n \neq 0$

$$E_z = 0$$

$$H_z = H_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_x = \frac{j\omega\mu n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot H_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_y = \frac{-j\omega\mu m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot H_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$H_x = \frac{j\beta m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot H_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$H_y = \frac{j\beta n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot H_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

Guia de Ondas Retangular

Modos TE_{mn} e TM_{mn}

Fator de propagação $\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon}$

Frequência de corte $f = f_c$
tal que $\gamma = 0$ $f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$ **TE: $m, n = 0, 1, 2, \dots$ $m + n \neq 0$**
TM: $m, n = 1, 2, 3, \dots$

Modos evanescentes $f < f_c$
 $\gamma = \alpha$, número real $\alpha = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon}$

Modos propagantes $f > f_c$:
 $\gamma = j \cdot \beta$ $\beta = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$ $\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta_{mn}} = \lambda / \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$

Guia de Ondas Retangular

Modos TM_{mn}

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad f = f_c : Z_{TM} = 0 \quad f \gg f_c : Z_{TM} \rightarrow \eta$$

Dispersão de Z_{TM} com frequência

Modos TE_{mn}

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \quad f = f_c : Z_{TE} \rightarrow \text{infinito} \quad f \gg f_c : Z_{TE} \rightarrow \eta$$

Dispersão de Z_{TE} com frequência

Guia de Ondas Retangular

■ Exercício

- Dado um guia de ondas retangular, preenchido com ar, com $a = 4$ cm e $b = 2$ cm, obtivemos as frequências de corte:

$$TE_{10} \rightarrow 3,75 \text{ GHz}$$

$$TE_{11} \text{ e } TM_{11} \rightarrow 8,38 \text{ GHz}$$

$$TE_{01} \rightarrow 7,50 \text{ GHz}$$

$$TE_{21} \text{ e } TM_{21} \rightarrow 10,61 \text{ GHz}$$

$$TE_{20} \rightarrow 7,50 \text{ GHz}$$

$$TE_{12} \text{ e } TM_{12} \rightarrow 15,46 \text{ GHz}$$

1. Quais os modos de propagação de uma onda eletromagnética de 10 GHz propagando-se nesse guia?
2. Qual o modo de propagação e o comprimento de onda de um onda EM de 5 GHz propagando-se nesse guia?
3. Qual a impedância de onda vista por essa onda EM de 5 GHz?
4. Quais as velocidades de fase e de grupo em 5 GHz?

Guia de Ondas Retangular

Guia de ondas real → perdas → atenuação do sinal propagante

- Origem das perdas no guia de ondas
 - Perdas dielétricas
 - No interior do guia de ondas
 - Permissividade elétrica $\epsilon = \epsilon' - j \cdot \epsilon'' \rightarrow \text{tg} \delta = \epsilon'' / \epsilon'$
 - Perdas condutivas
 - Nas paredes do guia de ondas
 - Condutor com **condutividade σ finita**
 - Exemplo, Cobre → $\sigma = 5,8 \cdot 10^7 \text{ S/m}$
 - Perda mais significativa em guias de ondas

Guia de Ondas Retangular

■ Para o modo fundamental TE₁₀

Perda dielétrica $\alpha_{d10} = 8,686 \cdot \frac{\omega \sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon'} \cdot (\epsilon'' / \epsilon')}{\eta \cdot b \cdot \sqrt{1 - (f_{c10} / f)^2}} \text{ (dB / m)}$

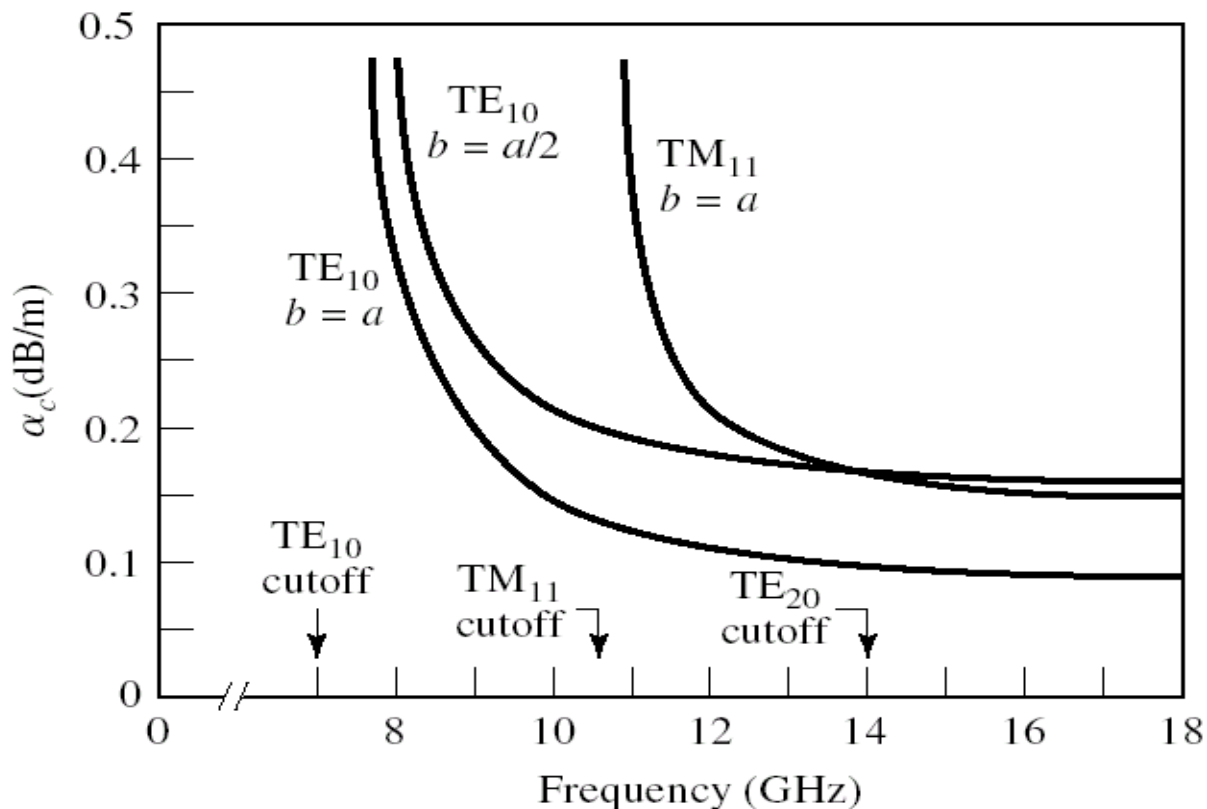
Perda condutiva $\alpha_{c10} = 8,686 \cdot \frac{R_s [1 + (2b/a) \cdot (f_{c10} / f)^2]}{\eta \cdot b \cdot \sqrt{1 - (f_{c10} / f)^2}} \text{ (dB / m)}$

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} \quad \eta = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{377}{\sqrt{\epsilon_r}} \Omega$$

Perda total $\alpha \text{ (dB / m)} = \alpha_c \text{ (dB / m)} + \alpha_d \text{ (dB / m)}$

Guia de Ondas Retangular

■ Perda condutiva α_c de modos TE



- Em $f = f_c$
 $\alpha_c \rightarrow \infty$
- Para $f > f_c$
 α_c diminuiu com o aumento da frequência

Guia de Ondas Retangular

- **Faixa de operação recomendada**
 - Modo fundamental
 - Modo com a menor frequência de corte
 - Modo TE₁₀

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

- Para $m = 1$ e $n = 0$

$$f_c = \frac{v}{2 \cdot a}$$

Guia de Ondas Retangular

■ Faixa de operação recomendada

- Limite inferior da faixa de operação → baixas perdas
- Principal origem das perdas
 - Perda condutiva
 - Paredes condutores do guia de onda
 - $\alpha_c \rightarrow \infty$ em $f = f_c$
- Para evitar perdas condutivas elevadas, adota-se frequência de operação f

$$f \geq 1,25 \cdot f_c (TE_{10})$$

Guia de Ondas Retangular

- **Faixa de operação recomendada**
 - Limite superior da faixa de operação
 - Deseja-se propagação em um único modo guiado
 - Guia deve operar em frequências inferiores à de corte do segundo modo que se propaga no guia
 - Assumindo $a \approx 2 \cdot b$
 - Modos que surgem logo após o modo fundamental
 - Modos TE_{01} e TE_{20} – com frequências de corte próximas

$$f_c(TE_{01}) = \frac{v}{2 \cdot b} \approx f_c(TE_{20}) = \frac{v}{a}$$

Guia de Ondas Retangular

■ Faixa de operação recomendada

- Frequência de corte do modo fundamental – TE₁₀

$$f_c(TE_{10}) = \frac{v}{2 \cdot a}$$

- Frequência de corte dos modos – TE₀₁ e TE₂₀

$$f_c(TE_{01}) \approx f_c(TE_{20}) = \frac{v}{a} = 2 \cdot f_c(TE_{10})$$

- Limite superior faixa de frequência de operação $f < 2 \cdot f_c(TE_{10})$
- Para que se propague um único modo, com baixas perdas, a faixa de operação recomendada é

$$1,25 \cdot f_c(TE_{10}) \leq f \leq 1,9 \cdot f_c(TE_{10})$$

Guia de Ondas Retangular

■ Faixa de operação recomendada

$$1,25.f_c(TE_{10}) \geq f \geq 1,9.f_c(TE_{10})$$

Exemplo

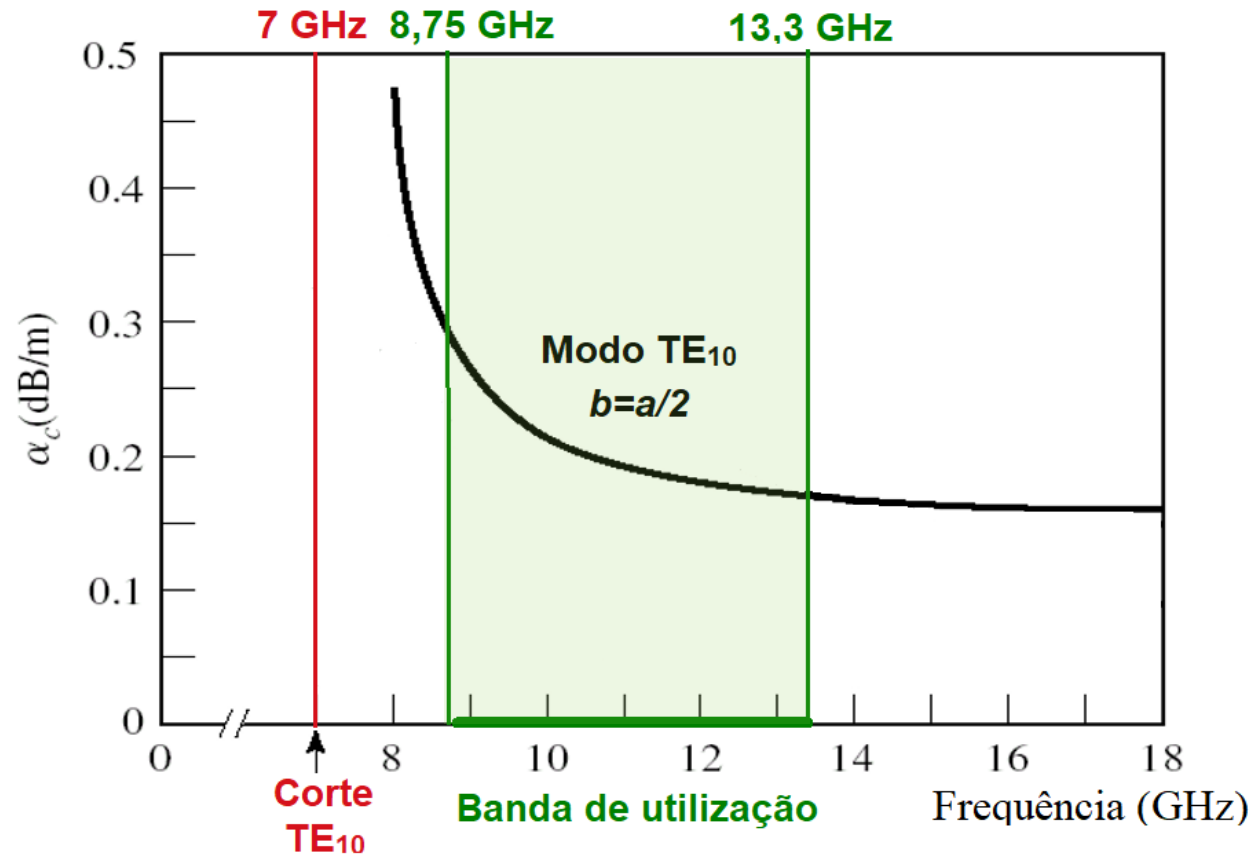
Para $f_c(TE_{10}) = 7 \text{ GHz}$

Limite inferior

$$1,25.f_c(TE_{10}) = 8,75 \text{ GHz}$$

Limite superior

$$1,9.f_c(TE_{10}) = 13,3 \text{ GHz}$$



Guia de Ondas Retangular

■ Guias de ondas retangular padrão (preenchidos com ar)

Guia de ondas designação	a x b (polegada x polegada)	a x b (cm x cm)	Frequência de corte (GHz)	Faixas de operação recomendadas (GHz)
WR-430	4,30 x 2,15	10,92 x 5,46	1,372	1,70 – 2,60
WR-340	3,40 x 1,70	8,636 x 4,31	1,726	2,20 – 3,30
WR-284	2,84 x 1,34	7,21 x 3,40	2,078	2,60 – 3,95
WR-229	2,29 x 1,145	5,81 x 2,90	2,577	3,30 – 4,90
WR-187	1,872 x 0,872	4,79 x 2,21	3,129	3,95 – 5,85
WR-159	1,59 x 0,795	4,038 x 2,019	3,711	4,90 – 7,05
WR-137	1,372 x 0,622	3,84 x 1,579	4,304	5,85 – 8,20

Guia de Ondas Retangular

■ Guias de ondas retangular padrão (preenchidos com ar)

Guia de ondas designação	a x b (polegada x polegada)	a x b (cm x cm)	Frequência de corte (GHz)	Faixas de operação recomendadas (GHz)
WR-112	1,122 x 0,497	2,84 x 1,26	5,26	7,05 – 10,0
WR-102	1,020 x 0,510	2,59 x 1,29	5,785	7,3 – 11,0
WR-90	0,90 x 0,40	2,286 x 1,016	6,56	8,20 – 12,4
WR-75	0,75 x 0,375	1,905 x 0,95	7,87	10,0 – 15,0
WR-62	0,622 x 0,311	1,579 x 0,789	9,49	12,4 – 18,0
WR-51	0,51 x 0,255	1,295 x 0,65	11,57	15,0 – 22,0
WR-42	0,42 x 0,17	1,067 x 0,43	14,06	18,0 – 26,5

Guia de Ondas Retangular

■ Guias de ondas retangular padrão (preenchidos com ar)

Guia de ondas designação	a x b (polegada x polegada)	a x b (mm x mm)	Frequência de corte (GHz)	Faixas de operação recomendadas (GHz)
WR-34	0,340 x 0,700	8,636 x 17,780	17,33	22,0 – 33,0
WR-28	0,280 x 0,140	7,112 x 3,556	21,08	27,0 – 40,0
WR-22	0,224 x 0,112	5,690 x 2,854	26,34	33,0 – 50,0
WR-15	0,148 x 0,074	3,759 x 1,880	39,86	50,0 – 75,0
WR-12	0,122 x 0,061	3,099 x 1,549	48,35	60,0 – 90,0
WR-10	0,100 x 0,050	2,540 x 1,270	59,01	75,0 – 110,0
WR-6	0,065 x 0,0325	1,651 x 0,826	90,84	110,0 – 170,0

Guia de Ondas Retangular

- **Guias de ondas retangular preenchidos**
- Interior do guia preenchido com material dielétrico

$$\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$$

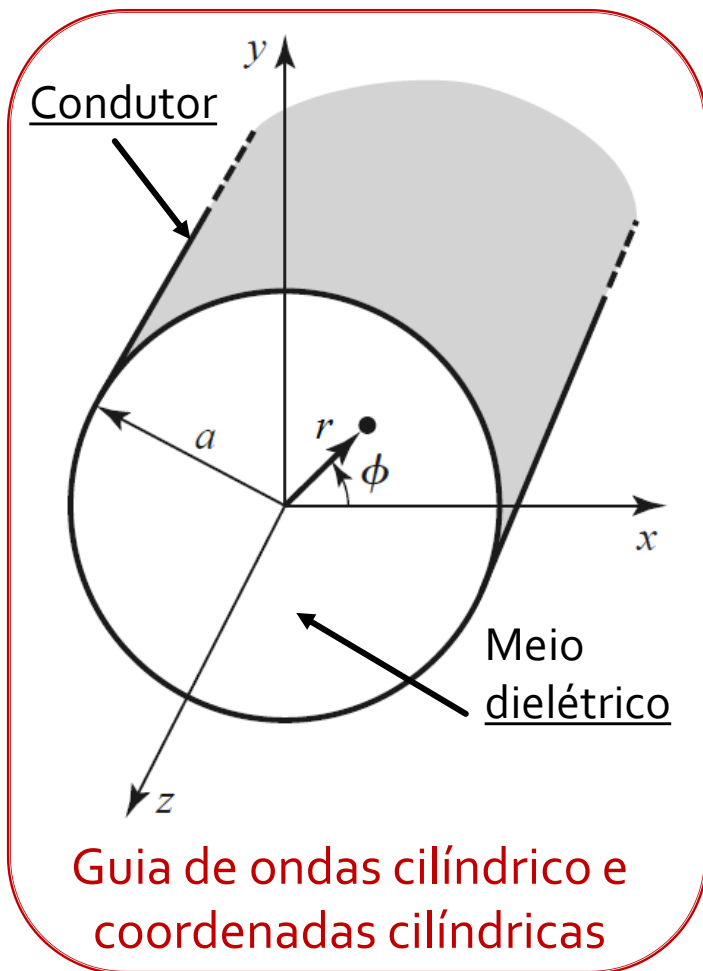
$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \Rightarrow f_c = \frac{c}{2 \cdot \sqrt{\varepsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

- Permite reduzir as dimensões do guia de ondas, para uma dada faixa de frequência de operação

Guias de Ondas

Guia de Ondas Cilíndrico

Guia de Ondas Cilíndrico



Guia de Ondas Cilíndrico ou Circular

- Tubo cilíndrico, metálico, oco
- Preenchido por dielétrico, geralmente ar
- Direção de propagação: z
- a : raio interno do tubo metálico

Coordenadas Cilíndricas

- r – distância do centro do sistema de coordenadas até o ponto
- ϕ – ângulo da projeção no plano x-y, medido a partir do eixo x
- z – posição ao longo do comprimento do guia

Guia de Ondas Cilíndrico

- Fasores dos campos E e H em coordenadas retangulares

$$\bar{E} = E_x \cdot \hat{a}_x + E_y \cdot \hat{a}_y + E_z \cdot \hat{a}_z$$

$$\bar{H} = H_x \cdot \hat{a}_x + H_y \cdot \hat{a}_y + H_z \cdot \hat{a}_z$$

\hat{a}_x
 \hat{a}_y
 \hat{a}_z

Vetores unitários nas direções x , y e z , respectivamente

- Fasores dos campos E e H em coordenadas cilíndricas

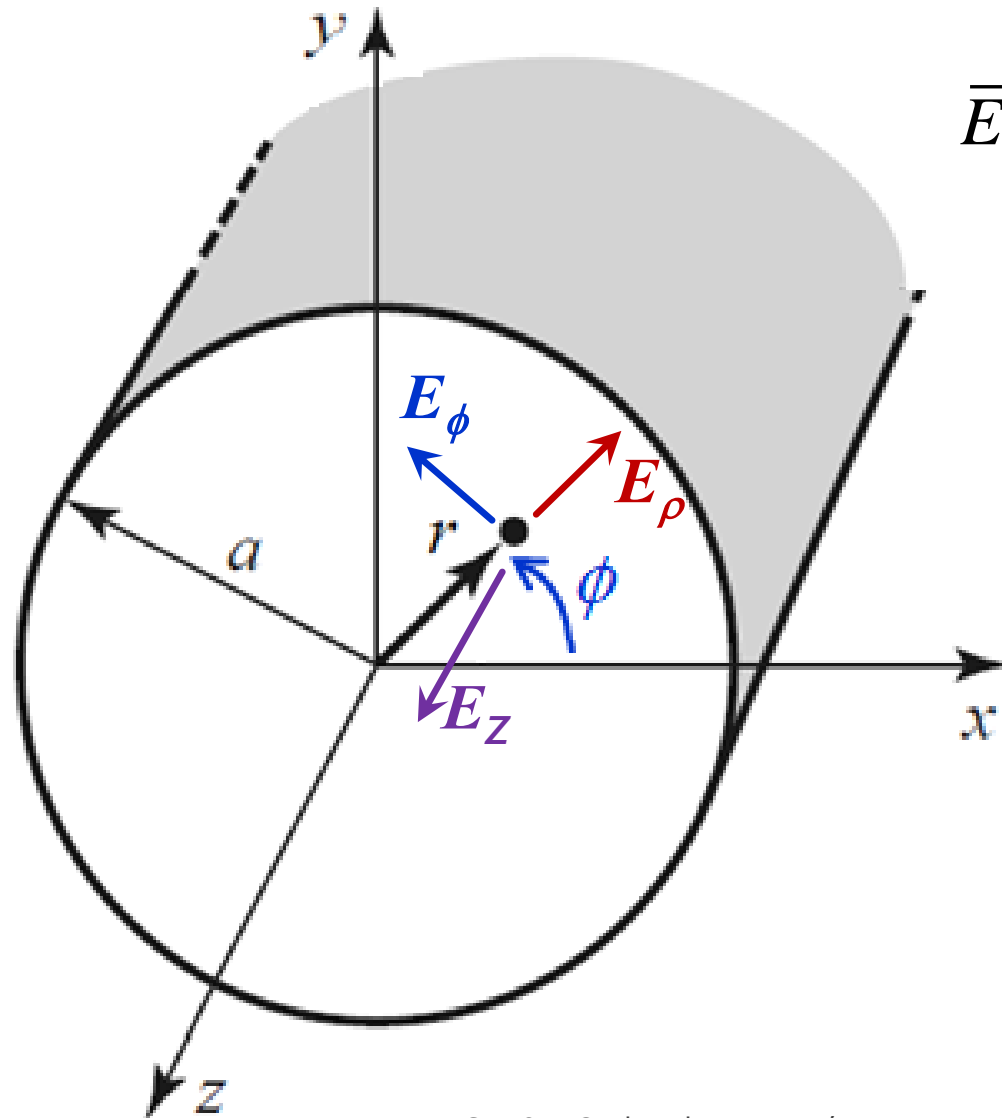
$$\bar{E} = E_\rho \cdot \hat{a}_r + E_\phi \cdot \hat{a}_\phi + E_z \cdot \hat{a}_z$$

$$\bar{H} = H_\rho \cdot \hat{a}_r + H_\phi \cdot \hat{a}_\phi + H_z \cdot \hat{a}_z$$

\hat{a}_r
 \hat{a}_ϕ
 \hat{a}_z

Vetores unitários nas direções r , ϕ e z , respectivamente

Componentes do fasor do campo elétrico em coordenadas cilíndricas



$$\vec{E} = E_{\rho} \cdot \hat{a}_r + E_{\phi} \cdot \hat{a}_{\phi} + E_z \cdot \hat{a}_z$$

Componente radial

E_{ρ} na direção \hat{a}_r

Componente em função de ϕ

E_{ϕ} na direção \hat{a}_{ϕ}

Componente na direção z

E_z na direção \hat{a}_z

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos de propagação

- Modo TE – $E_z = 0$ e $H_z \neq 0$
 - Modo TM – $H_z = 0$ e $E_z \neq 0$
- Conhecidos E_z e H_z obtém-se
- E_ρ e H_ρ
 - E_ϕ e H_ϕ
 - Funções de $\frac{\partial E_z}{\partial r}$, $\frac{\partial E_z}{\partial \phi}$ e $\frac{\partial H_z}{\partial r}$, $\frac{\partial H_z}{\partial \phi}$

Componentes de E e H nas direções ϕ e em r

$$E_\rho = \frac{-j}{k_c^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\omega \mu}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right) \quad H_\rho = \frac{j}{k_c^2} \left(\frac{\omega \epsilon}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial r} \right)$$

$$E_\phi = \frac{-j}{k_c^2} \left(\frac{\beta}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \quad H_\phi = \frac{-j}{k_c^2} \left(\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\beta}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right)$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Determinação dos campos E e H

- Resolução das equações de onda na forma fasorial
 - Em meio dielétrico sem perdas, linear, homogêneo e isotrópico, sem fontes de campo ($\rho = 0$ e $J = 0$), aplicam-se as equações de onda

$$\nabla^2 \bar{E} + k^2 \bar{E} = \vec{0}$$

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

$$\nabla^2 \bar{H} + k^2 \bar{H} = \vec{0}$$

ω frequência angular

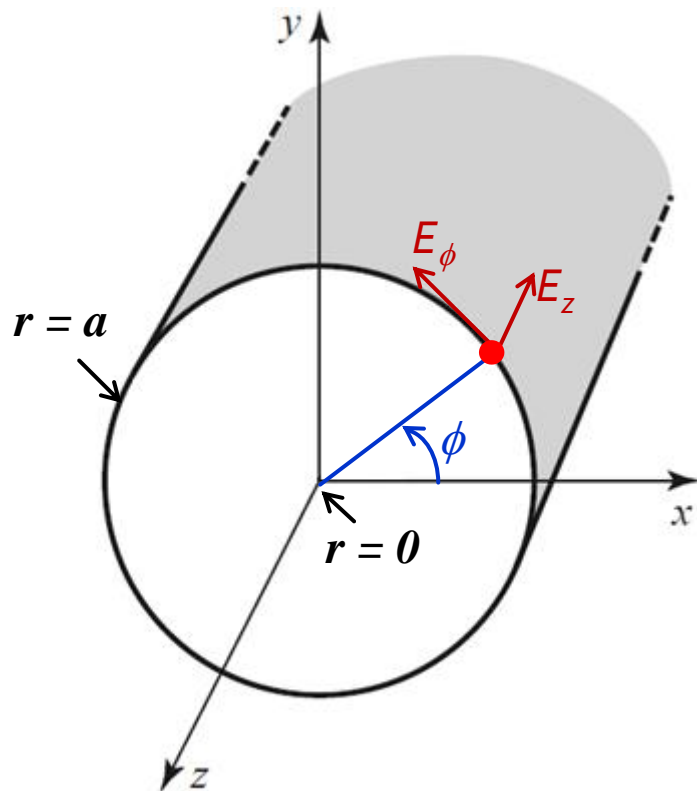
μ permeabilidade magnética

ϵ permissividade elétrica

- Aplicação das condições de contorno
 - Campo elétrico tangencial à parede metálica do guia de ondas é nulo

Guia de Ondas Cilíndrico

■ Condições de contorno



- Componentes de Campo elétrico tangenciais às paredes do guia de ondas circular

$$E_z \text{ e } E_\phi \text{ em } r = a$$

- Campo elétrico tangencial à parede metálica do guia de ondas é nulo
- Logo

$$\text{Em } r = a \rightarrow \begin{matrix} E_z = 0 \\ e \\ E_\phi = 0 \end{matrix}$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TM

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TM – propagação na direção $z \rightarrow E_z \neq 0$ e $H_z = 0$

- Equação de onda

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = \vec{0} \quad \text{sendo } k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

- Componente do Laplaciano na direção z , em coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 E(r, \phi, z) \text{ em } \hat{a}_z \rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}$$

- Equação de onda na direção z

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 \cdot E_z = 0$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TM – propagação na direção z

- Considerando campo é harmônico

$$E_z(r, \phi, z) = R(r) \cdot F(\phi) \cdot Z(z), \text{ sendo } Z(z) = e^{-j \cdot \beta \cdot z}$$

- Equação de onda na direção z resulta

$$R'' \cdot F \cdot Z + \frac{1}{r} R' \cdot F \cdot Z + \frac{1}{r^2} R \cdot F'' \cdot Z + R \cdot F \cdot Z'' + k^2 \cdot R \cdot F \cdot Z = 0$$

- Considerando $\rightarrow Z(z) = e^{-j \cdot \beta \cdot z} \rightarrow Z'' = -\beta^2 \cdot Z$

$$R'' \cdot F \cdot Z + \frac{1}{r} R' \cdot F \cdot Z + \frac{1}{r^2} R \cdot F'' \cdot Z + \underbrace{(k^2 - \beta^2)}_{k_c^2} \cdot R \cdot F \cdot Z = 0$$

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TM

- Dividindo-se a equação anterior por $E_z \neq 0$, obtém-se:

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{F''}{F} + k_c^2 = 0$$

- Multiplicando se os termos da equação por r^2 e rearranjando, tem-se:

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + r^2 k_c^2 = -\frac{F''}{F}$$

- Como o primeiro termo é função de r e o segundo termo é função de ϕ , a equação anterior só é válida se ambos os termos forem constantes gerando duas equações:

$$-\frac{F''}{F} = n^2$$

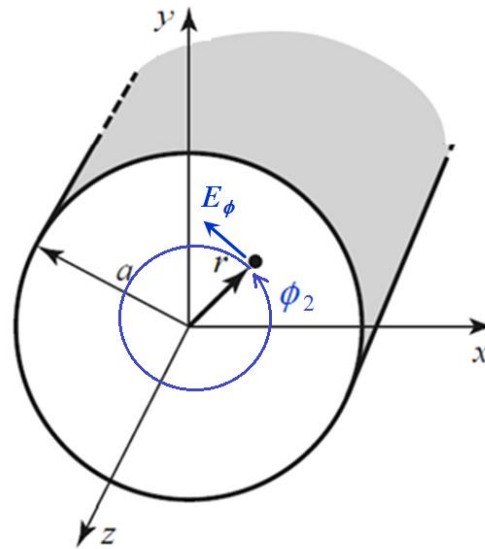
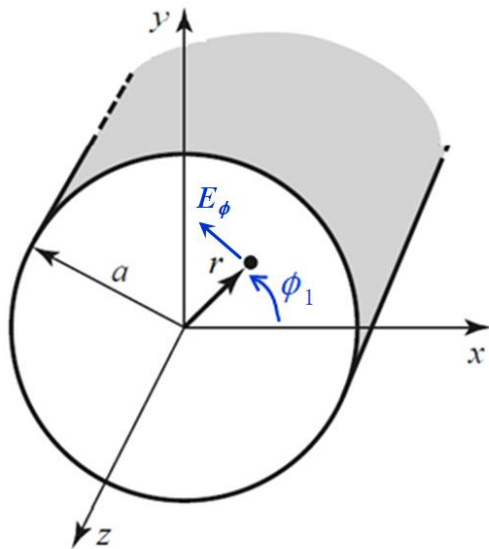
$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + r^2 k_c^2 = n^2$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TM

- Solução de $-\frac{F''}{F} = n^2$
- Similar à vista para guias retangulares $\rightarrow F(\phi) = A \cdot \text{sen}(n \cdot \phi) + B \cdot \text{cos}(n \cdot \phi)$
- E_z é função periódica e contínua em $\phi \rightarrow F(\phi) = F(\phi \pm 2 \cdot \pi \cdot p)$, $p = 1, 2, 3, 4, \dots$

$$n = ?$$



$$\phi_2 = \phi_1 \pm 2 \cdot \pi \cdot p$$

$$p = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TM

- E_z tem que ser uma função periódica e contínua em ϕ , logo

$$F(\phi) = F(\phi \pm 2 \cdot \pi \cdot p) \rightarrow \text{sendo } p \text{ um número inteiro: } p = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- Como $F(\phi) = A \cdot \text{sen}(n \cdot \phi) + B \cdot \text{cos}(n \cdot \phi)$

$$F(\phi + 2\pi \cdot p) = A \cdot \text{sen}(n \cdot \phi + 2\pi \cdot n \cdot p) + B \cdot \text{cos}(n \cdot \phi + 2\pi \cdot n \cdot p)$$

- Então, para que

$$F(\phi) = F(\phi \pm 2 \cdot \pi \cdot p) \rightarrow n \text{ tem que ser número inteiro}$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TM

- Temos $F(\phi) = A \cdot \text{sen}(n \cdot \phi) + B \cdot \cos(n \cdot \phi)$
- Sendo n um número inteiro: $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
- Inúmeras soluções são possíveis para as constantes A e B
- Exemplo: $A=0$ e $B \neq 0$ ou $A \neq 0$ e $B=0$

→ modos ortogonais entre si

Modos TM₁₁
ortogonais entre si




Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TM

- Solução da equação $r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + r^2 k_c^2 = n^2$
 - Função bem conhecida

$$k_c = ?$$


$$R(r) = J_n(k_c \cdot r)$$

Sendo,

J_n – Função de Bessel de primeira espécie e ordem n

$$k_c = \omega_c \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} = 2\pi \cdot f_c \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}$$

f_c - Frequência de corte do modo de propagação

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TM

- Fasor do Campo Elétrico na direção

$$E_z(r, \phi, z) = [A \cdot \text{sen}(n \cdot \phi) + B \cos((n \cdot \phi))] \cdot J_n(k_c \cdot r) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z}$$

- Cálculo da frequência de corte f_c do modo TM

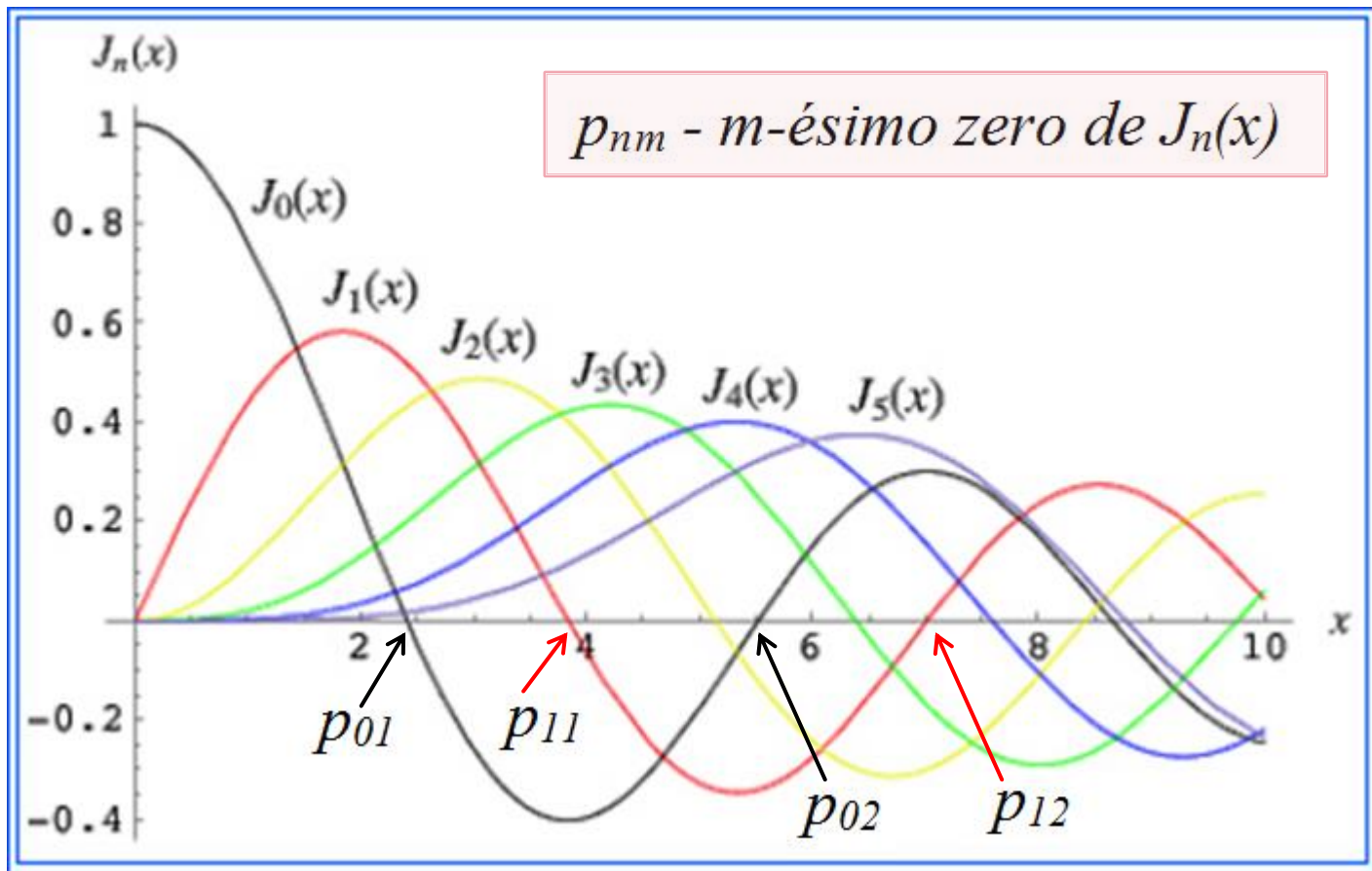
$$k_c = \omega_c \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} = 2\pi \cdot f_c \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} \rightarrow f_c = \frac{k_c}{2\pi \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}}$$

- Condição de contorno

- Na parede metálica ($r = a$) tem-se $E_z = 0$
- Logo $J_n(k_c \cdot a) = 0 \rightarrow k_c \cdot a$ é “zero da função J_n ”

Guia de Ondas Cilíndrico

Funções de Bessel de primeira espécie $J_n(x)$



Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TM_{nm}

- Aplicando-se a **condição de contorno** em $r = a$, tem-se

$$E_z(r, \phi, z)|_{r=a} = [A \cdot \text{sen}(n \cdot \phi) + B \cdot \text{cos}(n \cdot \phi)] \cdot J_n(k_c \cdot a) e^{-j \cdot \beta \cdot z} = 0$$

- Logo $J_n(k_c \cdot a) = 0 \rightarrow k_c \cdot a = p_{nm} \rightarrow k_c = \frac{p_{nm}}{a}$

sendo,

p_{nm} — **m-ésimo zero** da função de Bessel de ordem **n**

- Frequência de corte do modo TM_{nm}

$$f_c = \frac{k_c}{2\pi \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} \rightarrow f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p_{nm}$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TM

- Zeros das funções de Bessel de primeira espécie

n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.135	8.417	11.620

- Qual o modo TM com menor frequência de corte?

$$f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p_{nm}$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TM

- Zeros das funções de Bessel de primeira espécie

n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.135	8.417	11.620

- Qual o modo TM com menor frequência de corte?

$$f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p_{nm}$$

→ Modo TM_{01}

→ Pois $p_{01}=2,405$ é o menor zero de $J_n(x)$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TM

- Zeros das funções de Bessel de primeira espécie

n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.135	8.417	11.620

- Exemplo – guia circular, preenchido com ar e raio $a = 50 \text{ mm}$

$$f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p_{nm}$$

→ $f_c(\text{TM}_{01}) = ?$

→ $f_c(\text{TM}_{11}) = ?$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TM

- Zeros das funções de Bessel de primeira espécie

n	P_{n1}	P_{n2}	P_{n3}
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.135	8.417	11.620

- Exemplo – guia circular, preenchido com ar e raio $a = 50$ mm

$$f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot P_{nm}$$
$$f_c(TM_{01}) = \frac{3 \cdot 10^{11}}{2\pi \cdot 50} \cdot 2,405 = 2,3 \text{ GHz}$$
$$f_c(TM_{11}) = \frac{3 \cdot 10^{11}}{2\pi \cdot 50} \cdot 3,832 = 3,66 \text{ GHz}$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TM_{nm}

- Constante de propagação β_{nm}

$$\beta_{nm} = \sqrt{k^2 - k_c^2}$$

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon \quad \text{e} \quad k_c = \frac{p_{nm}}{a}$$

$$\beta_{nm} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{p_{nm}}{a}\right)^2}$$

$$\beta_{nm} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{p_{nm}}{a}\right)^2}$$

- Comprimento de onda guiado do modo TM_{mn}

$$\beta_{nm} = \frac{2\pi}{\lambda_g}$$

→

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta_{nm}}$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TM

As demais componentes dos fasores de E e H são obtidas de:

$$E_r = \frac{-j}{k_c^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\omega \mu}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right)$$

$$E_\phi = \frac{-j}{k_c^2} \left(\frac{\beta}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \right)$$

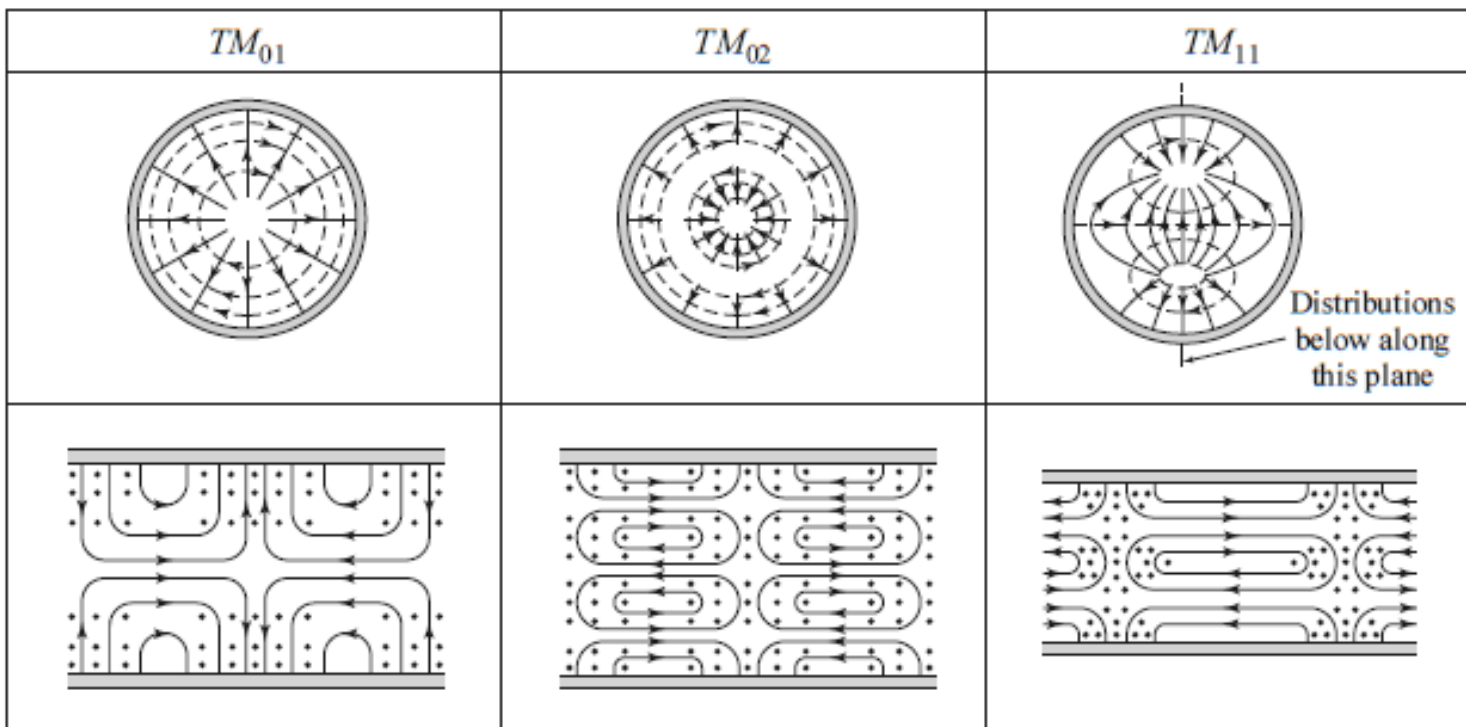
$$H_r = \frac{j}{k_c^2} \left(\frac{\omega \epsilon}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial r} \right)$$

$$H_\phi = \frac{-j}{k_c^2} \left(\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\beta}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right)$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TM

Distribuição de campo dos modos TM_{01} , TM_{02} e TM_{11} E (—) e H (- - -)



Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TE

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TE

■ Tem-se

$$H_z \neq 0 \quad e \quad E_z = 0$$

■ Sendo

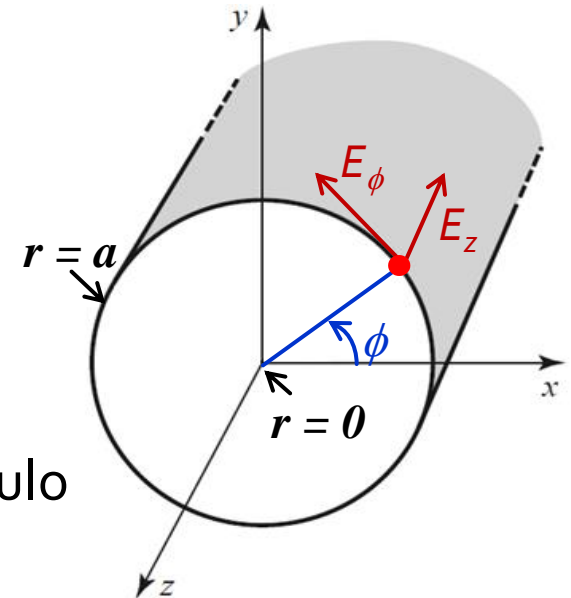
$$H_z(r, \phi, z) = R(r) \cdot F(\phi) \cdot e^{-j\beta \cdot z}$$

■ Resolve-se a equação de onda

■ Aplica-se as condições de contorno

■ Campo elétrico tangencial ao condutor é nulo

Em $r = a \rightarrow E_\phi = 0$



Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TE

- Da equação de onda obtém-se a expressão de H_z

$$H_z(r, \phi, z) = [A \cdot \text{sen}(n \cdot \phi) + B \cdot \text{cos}(n \cdot \phi)] \cdot J_n(k_c \cdot r) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z}$$

Sendo,

J_n – Função de Bessel de primeira espécie e ordem n

$$k_c = \omega_c \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} = 2\pi \cdot f_c \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}$$

f_c – Frequência de corte do modo de propagação

- Para determinar $k_c \rightarrow$ condição de contorno
 - Na parede metálica $r = a \rightarrow E_\phi = 0$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TE

- Cálculo de E_ϕ $\rightarrow E_\phi = \frac{-j}{k_c^2} \left(\frac{\beta}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \right)$

- Em modos TE tem-se $E_z = 0$, logo $\rightarrow E_\phi = j \frac{\omega\mu}{k_c^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial r}$

- Sendo

$$H_z(r, \phi, z) = [A \cdot \text{sen}(n \cdot \phi) + B \cdot \text{cos}(n \cdot \phi)] \cdot J_n(k_c \cdot r) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z}$$

- Obtém-se

$$E_\phi(r, \phi, z) = j \frac{\omega\mu}{k_c^2} [A \cdot \text{sen}(n \cdot \phi) + B \cdot \text{cos}(n \cdot \phi)] \cdot \underbrace{J'_n(k_c \cdot r)}_{\text{Derivada da função de Bessel de primeira espécie}} \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z}$$

Derivada da função de
Bessel de primeira espécie

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TE_{nm}

- Condição de contorno $E_\phi = 0$ em $r = a$ (parede do guia de ondas)

$$E_\phi(r, \phi, z) \Big|_{r=a} = j \frac{\omega\mu}{k_c^2} [A \cdot \text{sen}(n \cdot \phi) + B \cdot \text{cos}(n \cdot \phi)] \cdot J'_n(k_c \cdot a) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z} = 0$$

- Então, em $r = a$

$$E_\phi(a, \phi, z) = 0 \quad \rightarrow \quad J'_n(k_c \cdot a) = 0 \quad \rightarrow \quad k_c = \frac{p'_{nm}}{a}$$

- Frequência de corte dos modos TE

$$f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p'_{nm}$$

p'_{nm} - m-ésimo zero de $J'_n(x)$
primeira derivada
da função de Bessel

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TE_{nm}

- Zeros da primeira derivada da função de Bessel de primeira espécie – J'_n

n	p'_{n1}	p'_{n2}	p'_{n3}
0	3.832	7.016	10.174
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970

- Qual o modo TE com menor frequência de corte?

$$f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p'_{nm} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{Modo } TE_{11} \\ \rightarrow \text{Pois } p'_{11} = 1,841 \text{ é o menor zero de } J'_n(x) \end{array}$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TE

- Zeros da primeira derivada das funções de Bessel de primeira espécie

n	p'_{n1}	p'_{n2}	p'_{n3}
0	3.832	7.016	10.174
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970

- Exemplo – guia circular, preenchido com ar e raio $a = 50 \text{ mm}$

$$f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p'_{mn}$$

$$f_c(\text{TE}_{11}) = ?$$

$$f_c(\text{TE}_{21}) = ?$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TE

- Zeros da primeira derivada das funções de Bessel de primeira espécie

n	p'_{n1}	p'_{n2}	p'_{n3}
0	3.832	7.016	10.174
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970

- Exemplo – guia circular, preenchido com ar e raio $a = 50 \text{ mm}$

$$f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p'_{mn}$$
$$f_c(TE_{11}) = \frac{3 \cdot 10^{11}}{2\pi \cdot 50} \cdot 1.841 = 1,76 \text{ GHz}$$
$$f_c(TE_{21}) = \frac{3 \cdot 10^{11}}{2\pi \cdot 50} \cdot 3,054 = 2,92 \text{ GHz}$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Frequências de corte dos modos TE e TM

Modo TM $f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p_{nm}$

n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.135	8.417	11.620

TE₁₁ - $f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot 1,841 \rightarrow$ modo fundamental

TM₀₁ - $f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot 2,405 \rightarrow$ segundo modo

- Relação entre frequências de corte do segundo modo e do modo fundamental

$$\frac{f_c(\text{TM}_{01})}{f_c(\text{TE}_{11})} = \frac{2,405}{1,841} = 1,31$$

- Banda em que se propaga apenas o modo fundamental no guia cilíndrico
 - em torno de 30%
 - menor que a do guia de ondas retangular que é da ordem de 52% para $b=a/2$

Modo TE $f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p'_{nm}$

n	p'_{n1}	p'_{n2}	p'_{n3}
0	3.832	7.016	10.174
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970

Guia de Ondas Cilíndrico

Frequências de corte dos modos TE e TM

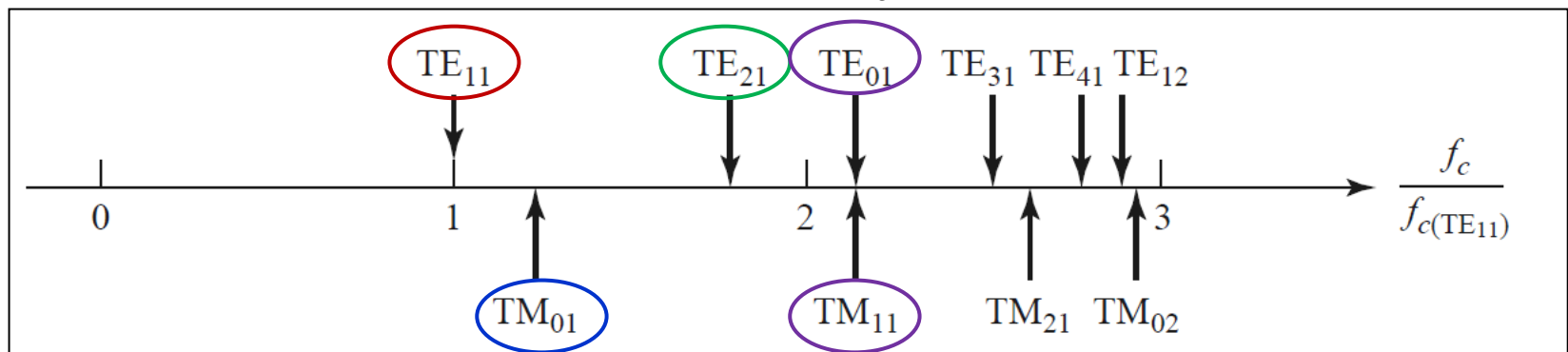
Modo TM $f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p_{nm}$

n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.135	8.417	11.620

Modo TE $f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p'_{nm}$

n	p'_{n1}	p'_{n2}	p'_{n3}
0	3.832	7.016	10.174
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970

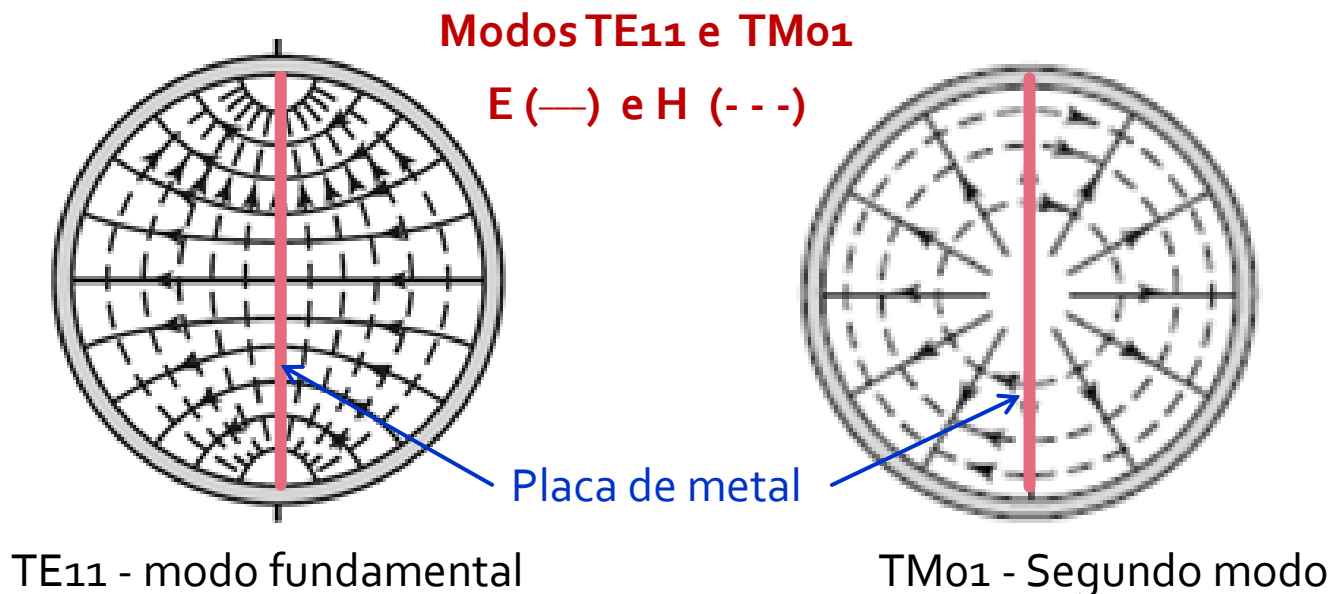
- Frequência de corte dos primeiros modos TE e TM, normalizadas em relação à frequência de corte do modo fundamental, $f_c(TE_{11})$



Guia de Ondas Cilíndrico

Frequências de corte dos modos TE e TM

- Técnica para alargar a banda de operação do guia de ondas circular
 - Suprimir o segundo modo de propagação TM_{01} sem afetar o modo fundamental TE_{11}
 - Placa metálica perpendicular ao campo elétrico do modo TE_{11} (esse modo não é prejudicado) e tangencial ao campo elétrico do modo TM_{01} (esse modo é suprimido)



Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TE

- Componentes de campo do modo TE₁₁ – modo fundamental (com $B=0$)

$$H_z = A \sin \phi J_1(k_c \rho) e^{-j\beta z}$$

$$E_\rho = \frac{-j\omega\mu}{k_c^2 \rho} A \cos \phi J_1(k_c \rho) e^{-j\beta z}$$

$$E_\phi = \frac{j\omega\mu}{k_c} A \sin \phi J_1'(k_c \rho) e^{-j\beta z}$$

$$H_\rho = \frac{-j\beta}{k_c} A \sin \phi J_1'(k_c \rho) e^{-j\beta z}$$

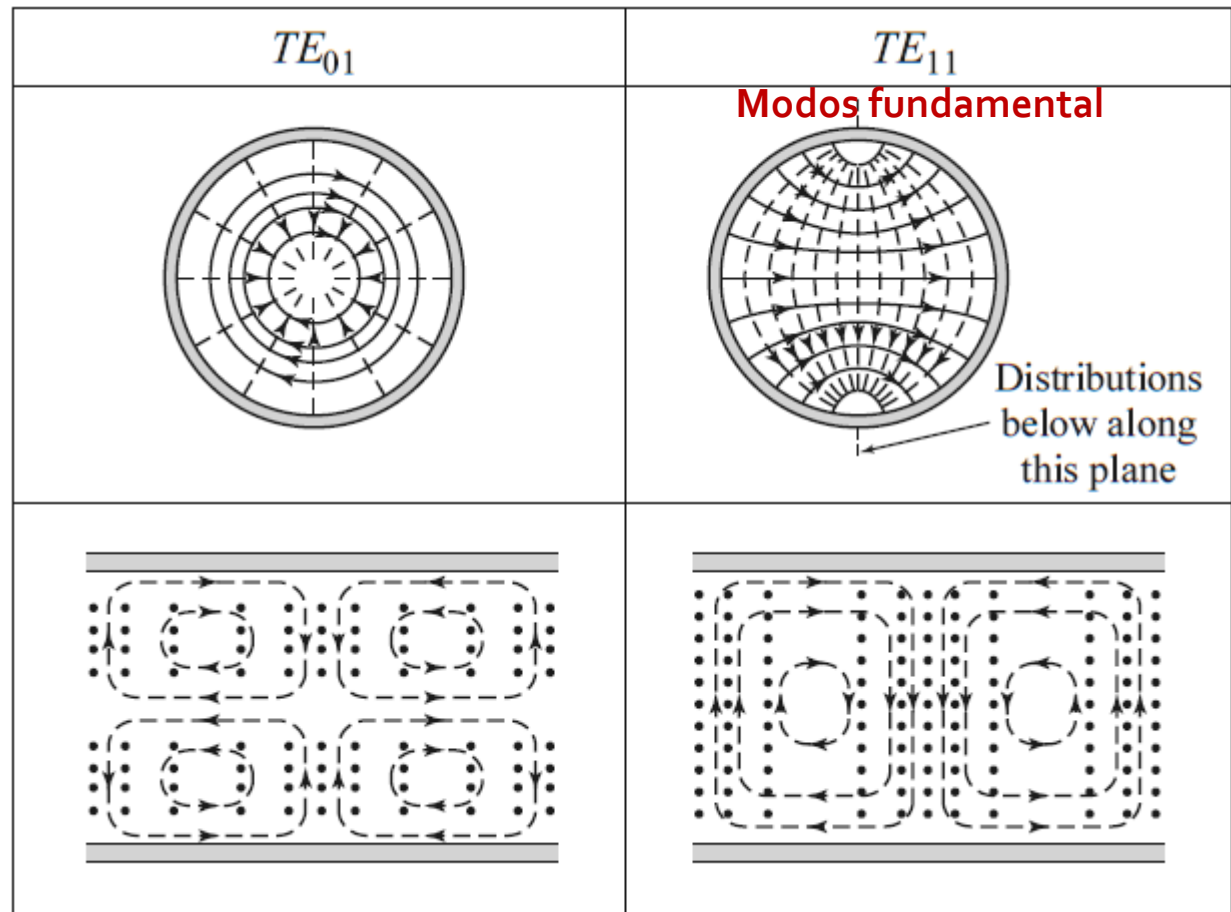
$$H_\phi = \frac{-j\beta}{k_c^2 \rho} A \cos \phi J_1(k_c \rho) e^{-j\beta z}$$

$$E_z = 0$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TE

Modos TE_{01} e TE_{11}
 E (—) e H (- - -)



Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TE

- Fator de propagação

$$\beta_{nm} = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{p'_{nm}}{a}\right)^2}$$

- Frequência de corte

$$f_{c_{nm}} = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{p'_{nm}}{2\pi a\sqrt{\mu\epsilon}}$$

- Impedância de onda

$$Z_{\text{TE}} = \frac{E_\rho}{H_\phi} = \frac{-E_\phi}{H_\rho} = \frac{\eta k}{\beta}$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TE - atenuação

- Atenuação do modo $TE_{n,m}$ devido a perdas condutivas

$$\alpha_c = \frac{R_s}{a \eta \left[1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2 \right]^{1/2}} \cdot \left[\left(\frac{f_c}{f} \right)^2 + \frac{n^2}{p'_{nm}{}^2 - n^2} \right]$$

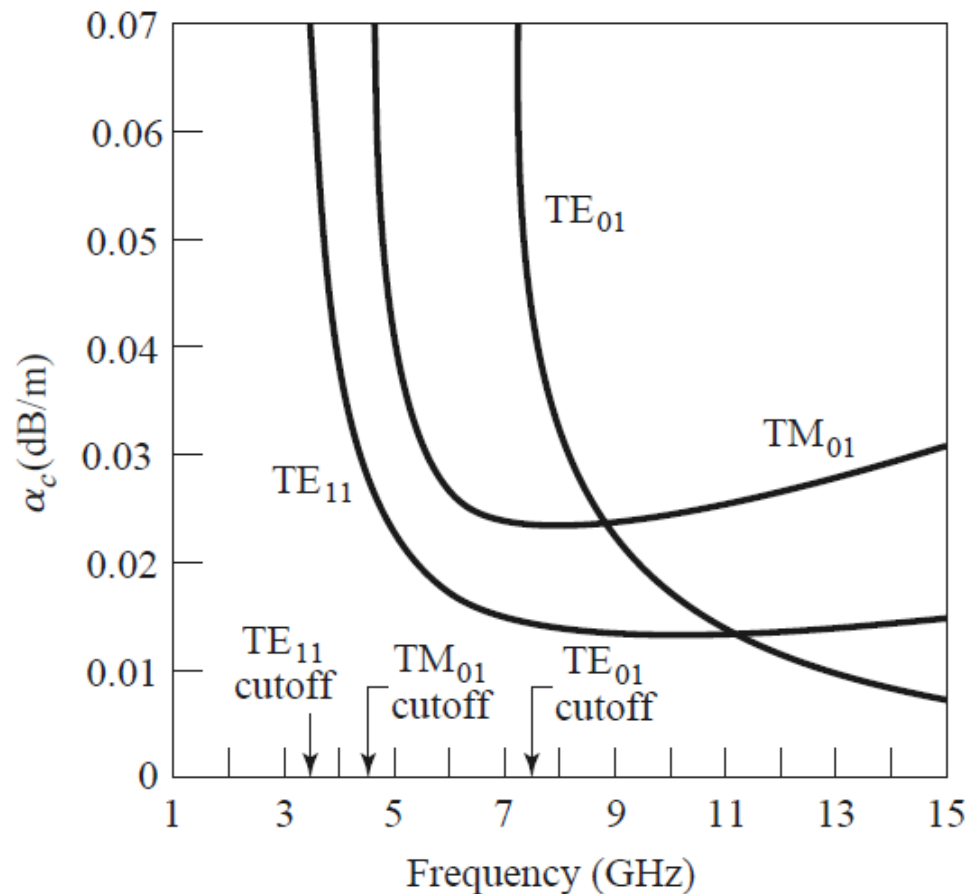
sendo $R_s = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}}$

- Atenuação devido a perdas dielétricas

$$\alpha_d = \frac{k^2 \tan \delta}{2\beta} \quad \text{sendo:} \quad \beta = \sqrt{k^2 - k_c^2}, \quad k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad \text{e} \quad k_c = \frac{p'_{nm}}{a}$$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TE e TM – atenuação versus frequência



Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TE e TM – Sumário

Quantity	TE _{nm} Mode	TM _{nm} Mode
k	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$
k_c	$\frac{p'_{nm}}{a}$	$\frac{p_{nm}}{a}$
β	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$
λ_c	$\frac{2\pi}{k_c}$	$\frac{2\pi}{k_c}$
λ_g	$\frac{2\pi}{\beta}$	$\frac{2\pi}{\beta}$
v_p	$\frac{\omega}{\beta}$	$\frac{\omega}{\beta}$
α_d	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$

Guia de Ondas Cilíndrico

Modos TE e TM – Sumário

Quantity	TE _{nm} Mode	TM _{nm} Mode
E_z	0	$(A \sin n\phi + B \cos n\phi) J_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$
H_z	$(A \sin n\phi + B \cos n\phi) J_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$	0
E_ρ	$\frac{-j\omega\mu n}{k_c^2 \rho} (A \cos n\phi - B \sin n\phi) J_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta}{k_c} (A \sin n\phi + B \cos n\phi) J'_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$
E_ϕ	$\frac{j\omega\mu}{k_c} (A \sin n\phi + B \cos n\phi) J'_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta n}{k_c^2 \rho} (A \cos n\phi - B \sin n\phi) J_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$
H_ρ	$\frac{-j\beta}{k_c} (A \sin n\phi + B \cos n\phi) J'_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$	$\frac{j\omega\epsilon n}{k_c^2 \rho} (A \cos n\phi - B \sin n\phi) J_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$
H_ϕ	$\frac{-j\beta n}{k_c^2 \rho} (A \cos n\phi - B \sin n\phi) J_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\omega\epsilon}{k_c} (A \sin n\phi + B \cos n\phi) J'_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$
Z	$Z_{TE} = \frac{k\eta}{\beta}$	$Z_{TM} = \frac{\beta\eta}{k}$

Guia de Ondas

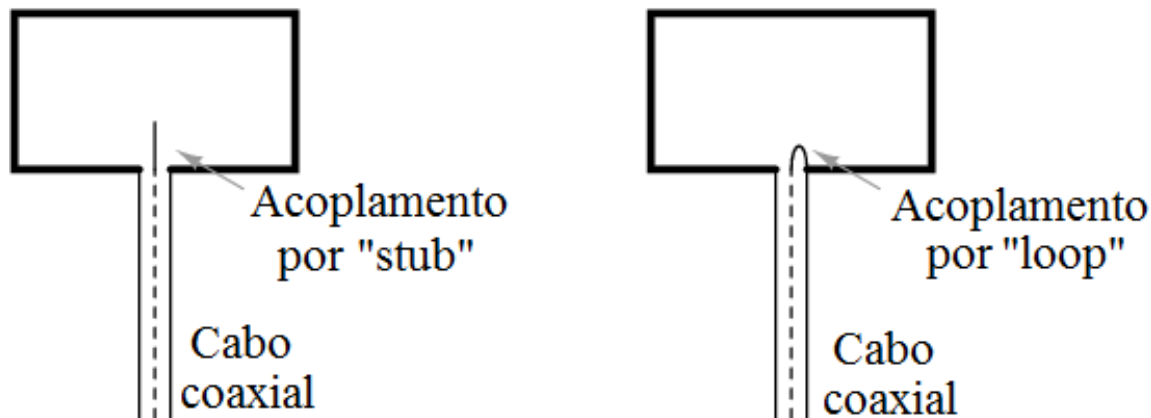
Excitação de guias de ondas

- Processo de inserir ou retirar sinais EM de guias de ondas
- Alguns métodos usais de excitar guias de ondas
 - Alimentação por cabo coaxial
 - Acoplamento elétrico
 - Acoplamento magnético
 - Alimentação por meio de outro guia de ondas
 - Acoplamento por meio de fendas

Guia de Ondas

Excitação de guias de ondas

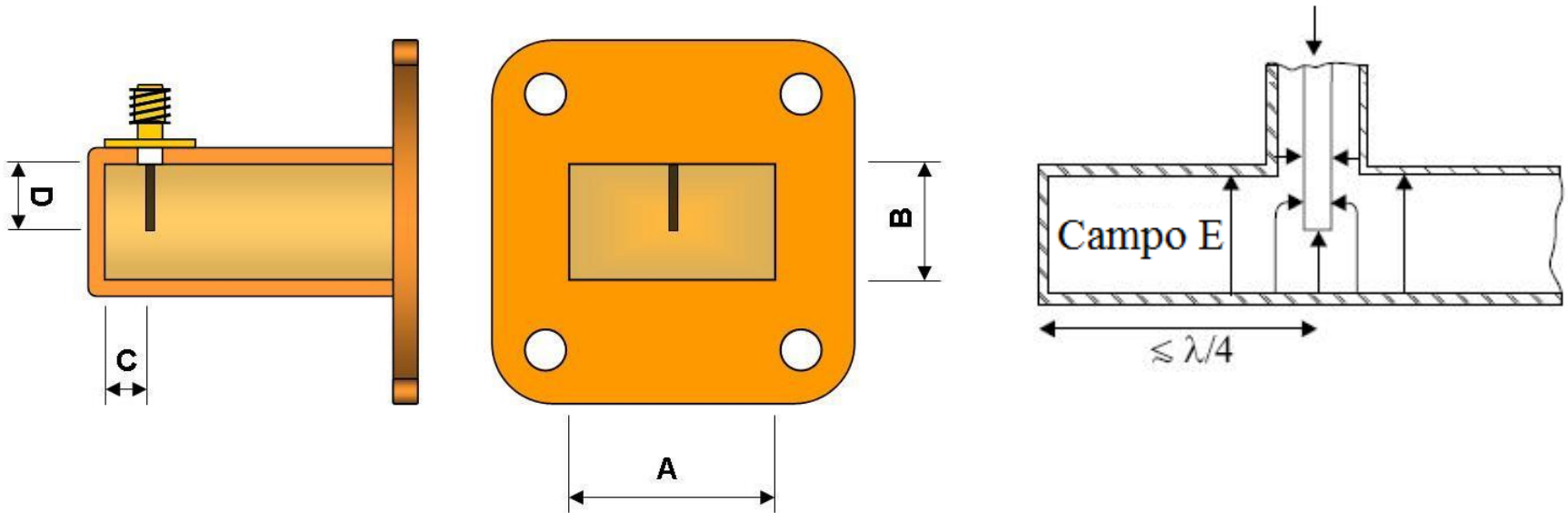
- Guia de ondas alimentado por meio de cabo coaxial
 - Acoplamento por campo elétrico – usando sonda em aberto
 - Acoplamento por campo magnético – usando espira aterrada



Guia de Ondas

Excitação de guias de ondas

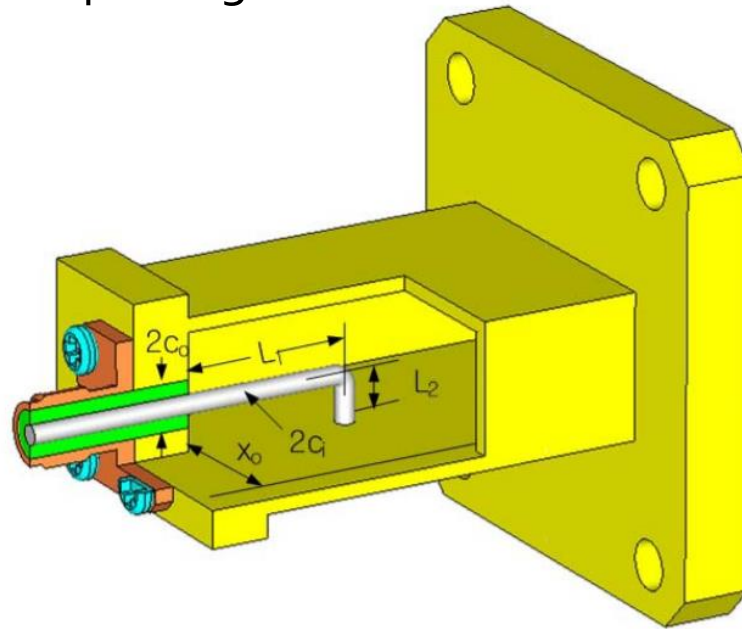
- Guia de ondas alimentado por meio de cabo coaxial
 - Acoplamento por campo elétrico



Guia de Ondas

Excitação de guias de ondas

- Guia de ondas alimentado por meio de cabo coaxial
 - Acoplamento por campo magnético



Design and Fabrication of an End-Launched Rectangular Waveguide Adapter Fed by a Coaxial Loop

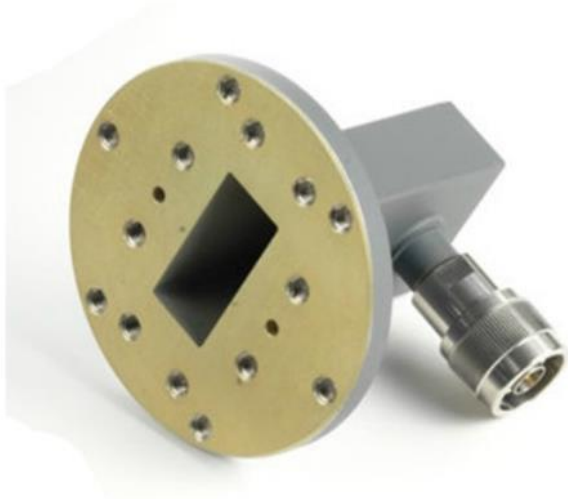
Doo-Yeong Yang, Member, KIICE

Department of Telecommunication Engineering, Jeju National University, Jeju 690-756, Korea

Guia de Ondas

Excitação de guias de ondas

Exemplos de adaptadores guia de ondas- coaxial (Keysight)



Adaptador guia de ondas WR137/coaxial
5,85 – 8,20 GHz



Adaptador guia de ondas WR42/coaxial
18,0 – 26,5 GHz

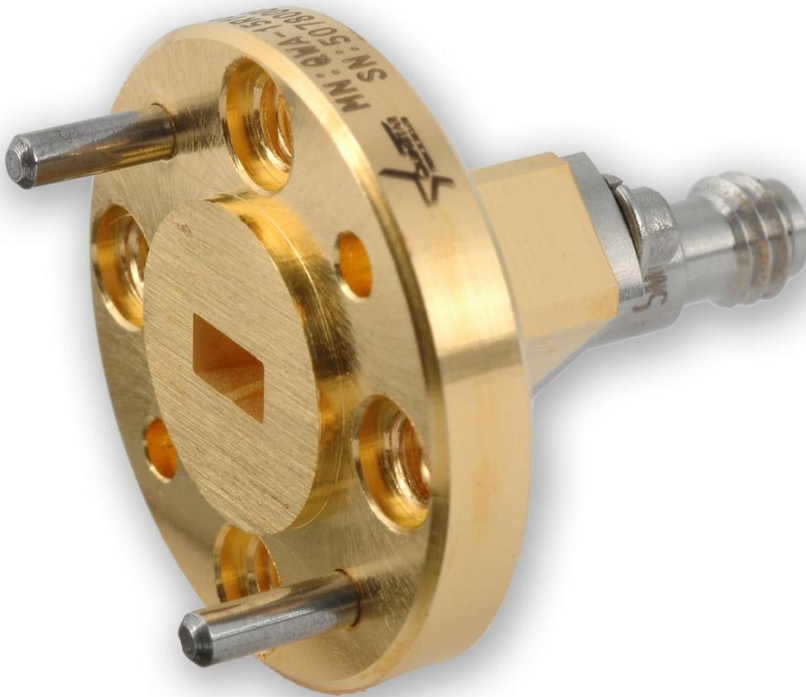


Adaptador guia de ondas WR12/coaxial
60 – 90 GHz

Guia de Ondas

Excitação de guias de ondas

Exemplo de adaptador guia de ondas- coaxial
(QuinStar Technology Inc.)



Adaptador guia de ondas
WR15/coaxial
50 – 75 GHz
($a=3,76$ mm, $b=1,88$ mm)

Guia de Ondas

Excitação de guias de ondas

- Guia de ondas alimentado por outro guia de ondas
 - Acoplamento por fendas
 - Guia de ondas cilíndrico excitado por meio de guia de ondas retangular – acoplamento de campo magnético

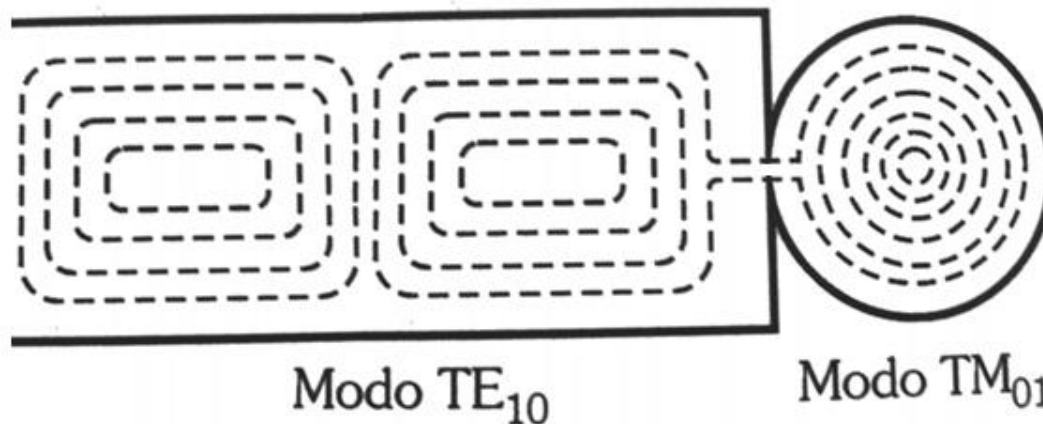


Figura do livro: Engenharia de Microondas – Fundamentos e aplicações, de José Antonio Justino Ribeiro, Editora Érica

Guia de Ondas

Excitação de guias de ondas

- Guia de ondas alimentado por outro guia de ondas
 - Guia de ondas cilíndrico excitado por meio de guia de ondas retangular

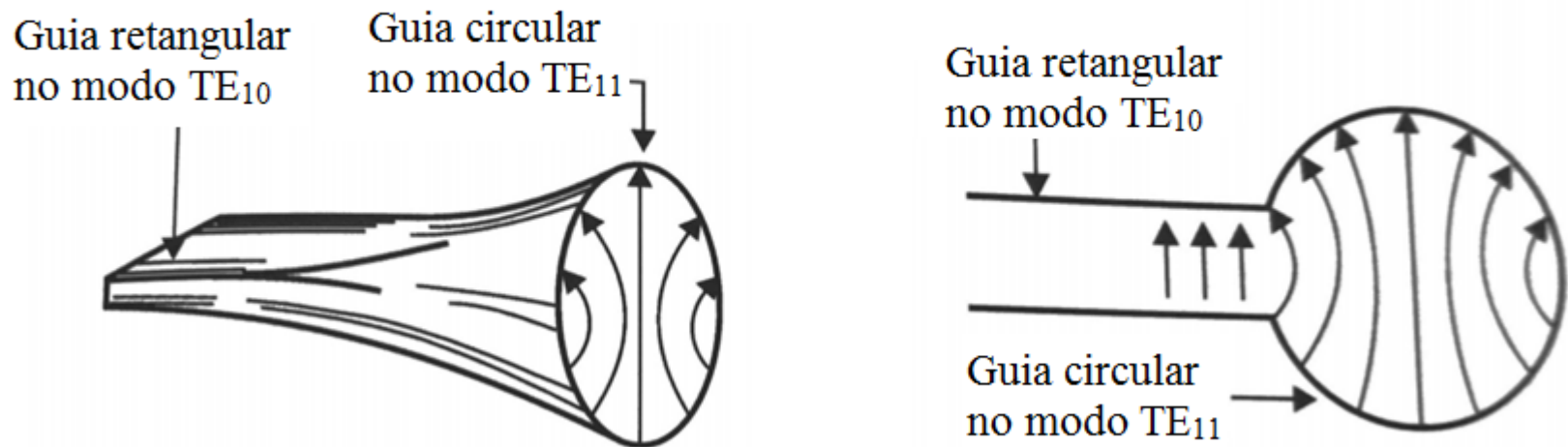


Figura do livro: Engenharia de Microondas – Fundamentos e aplicações, de José Antonio Justino Ribeiro, Editora Érica