



PSI 3214 - LABORATÓRIO DE INSTRUMENTAÇÃO ELÉTRICA (2018)
EXPERIÊNCIA 1 - PONTE DE WHEATSTONE

Denise Consonni, Vitor Nascimento,
Leopoldo Yoshioka e Elisabete Galeazzo

Atualização 14.08.2020

1. Objetivos

Desenvolver a capacidade de compreensão, análise e implementação de medições elétricas baseadas em Pontes de Wheatstone.

Através das atividades deste experimento, os alunos devem obter os seguintes conhecimentos e práticas:

- Obter equilíbrio de pontes,
- Sensibilidade de medição,
- Medição utilizando extensômetro.

2. Conceitos de medidas

Primeiramente vamos rever alguns conceitos essenciais relacionados medições de grandezas físicas.

As grandezas físicas obtidas por meio de cálculos teóricos não possuem erros ou variações, a menos daquelas previstas no modelo ou devido a truncamentos ou arredondamentos de valores durante o processo de cálculo.

Entretanto, as grandezas físicas obtidas por meio de medições, ou por meio de cálculos envolvendo valores medidos, estão sujeitos às variações decorrentes devido a fatores, tais como flutuações das condições ambientais (temperatura, umidade, pressão e vibrações), interferências eletromagnéticas, métodos de medidas, qualidade dos terminais de contato, qualidade e calibração dos instrumentos, montagem experimental entre outros.

Vamos ver a seguir os significados de alguns termos relacionados com medições.

Valor real: É o valor exato de uma determinada grandeza. Na prática, utiliza-se como valor real o valor obtido por meio de um instrumento de precisão de referência. Esses instrumentos são encontrados em laboratórios de metrologia que possuem uma infraestrutura com ambiente controlado e proteções que minimizam as interferências eletromagnéticas.

Valor medido: É o valor da leitura da informação indicada pelo instrumento de medida. Embora ainda existam instrumentos com mostradores analógicos, a grande maioria dos instrumentos de medidas apresentam os resultados no formato digital. O ponto

importante aqui, é que o valor medido não é algo absoluto, ou seja, requer uma interpretação. Pois, como mencionado anteriormente, o valor medido está sujeito às variações que acarretam erros e incertezas como veremos adiante.

Resolução: É a menor indicação ou escala de um instrumento de medida. Por exemplo, numa régua com escala de milímetros, a resolução é de 1mm. No caso de um voltímetro digital a resolução será dada pelo dígito menos significativo. Por exemplo, vamos considerar um voltímetro digital com escalas de 5V e 50V. Se na escala de **5V**, a leitura de tensão for **1,000V**, significando que a resolução deste voltímetro, na escala de **5V**, é **0,001V ou 1mV**. Se mudarmos para a escala de **50V**, o valor da leitura passará a ser **1,00V**, significando que na escala de **50V** a resolução é de **0,01V**. Observe, portanto, que é necessário escolher uma escala adequada para se fazer uma medição com a melhor resolução.

Erro: É a diferença entre um determinado valor medido e um valor real ou de referência. Normalmente, utiliza-se o módulo da diferença e expresso em porcentagem. Por exemplo, se o valor medido for de 1,95V e o valor real for de 2,00V. O valor do erro será $\Delta V = |2,00 - 1,95| = 0,05V$ ou **2,5%**.

Erro sistemático: São erros que resultam de problemas de calibração do instrumento, método de medição, interpretação entre outros, que afetam todos os dados da mesma maneira. O erro sistemático está associado, principalmente, à exatidão de uma medida. Por exemplo, um erro no ajuste do “fator de atenuação” da ponta de prova pode resultar em uma leitura **dez vezes maior**. Outro exemplo seria queda de tensão devido à resistência dos cabos numa medição envolvendo correntes elevadas (acima de 1,0A).

Erro aleatório: São erros que resultam de **flutuações dos valores medidos** devido a condições ambientais e interferências eletromagnéticas (ruídos). As causas do erro aleatório podem ser internas (do próprio instrumento), externas (do ambiente) ou dos equipamentos que estão conectados à montagem experimental. Problemas de aterramentos, mal contato dos terminais, falta de blindagens (dos cabos e da montagem) podem contribuir para o erro aleatório. O erro aleatório está associado à precisão de uma medida. Para estimar a magnitude do erro aleatório é necessário recorrer às técnicas estatísticas. O osciloscópio digital do laboratório didático possui a função “média” que pode ser utilizada para filtrar os efeitos das flutuações do sinal devido à presença de ruídos. Entretanto, deve-se tomar o cuidado de não utilizar médias muito elevadas, pois poderá afetar o próprio sinal.

Exatidão: Indicação da proximidade entre o valor da medição e o valor verdadeiro. Trata-se de um conceito qualitativo. Uma medida será dita **mais exata** quanto **menor o erro de medição**. Não se atribui um valor numérico para a exatidão. Utiliza-se a exatidão para expressar a qualidade da medição em termos comparativos. Diz-se que uma medida é mais exata, ou menos exata, com relação ao tamanho do erro entre o valor medido e o valor real. É muito comum a confusão entre a exatidão e a precisão. A exatidão indica quão próximo o valor de uma medida está do “valor real”, enquanto que a

precisão está relacionado com a variação dos valores medidos quando se realiza medições repetitivas.

Incerteza:

Representa a flutuação ou a variação que deve ser considerada no valor de uma medida. O valor de uma medida deve ser representado pelo **valor da leitura** e pelo **valor da incerteza** associado à medição. No caso de instrumento como o multímetro digital, que utilizamos no laboratório didático, o fabricante especifica como a incerteza deve ser calculada. Por exemplo uma medida de tensão representado por $V1 = (1,00 \pm 0,05)V$, indica que o valor de leitura da medição é de **1,00V**, com uma incerteza $\pm 0,05V$, o que significa que o valor real encontra-se dentro de numa faixa de **0,95V ~ 1,05V**. No caso de um valor medido ser representado somente pelo valor de leitura, sem a indicação da incerteza, assume-se uma variação de um dígito menos significativo. Por exemplo, se um valor medido for representado como sendo $V2 = 3,0V$, assume-se uma incerteza de $\pm 0,1V$, ou seja que $V2 = (3,0 \pm 0,1)V$, ou seja o valor real de $V2$ encontra-se na faixa de **2,9V a 3,1V**. Vale ressaltar que o conceito de incerteza que estamos tratando trata-se de questão probabilística. Veja mais no seguinte link:

https://pt.wikipedia.org/wiki/Incerteza_de_medi%C3%A7%C3%A3o



Precisão:

Refere-se ao grau de concordância ou de dispersão das medidas. Diz-se que uma medida é **precisa** se os valores medidos, repetitivamente, de uma mesma medição, resulta numa **pequena dispersão**. A precisão de uma medição é representada de uma forma quantitativa, ou seja, atribuímos um valor numérico. Em geral, utiliza-se conceitos estatísticos como desvio-padrão, variância ou coeficiente de variação para expressar a precisão. Veja mais no link a seguir

<https://pt.wikipedia.org/wiki/Precis%C3%A3o#:~:text=Em%20engenharia%2C%20ci%C3%AAncia%2C%20ind%C3%BAstria%20e%20repeti%C3%A7%C3%B5es%20da%20mesma%20an%C3%A1lise.>



Sensibilidade:

Relação entre a resposta do medidor e a variação da grandeza que está sendo medida. Por exemplo, numa medição de resistência, a sensibilidade da medição está relacionada com a capacidade do instrumento (incluindo a montagem) detectar pequenas variação da resistência devido aos efeitos ambientais ou influências mecânicas (como por exemplo deformação da estrutura). Em geral a sensibilidade é

representada por um valor numérico em ppm (parte por milhão). Por exemplo, uma variação de **100ppm** na resistência de um elemento com valor nominal de **1000Ω** corresponde à uma variação de **0,1Ω**.

No diagrama de mapa conceitual a seguir estão representados os conceitos de medição mencionados anteriormente, bem como a relação que existem entre esses conceitos.

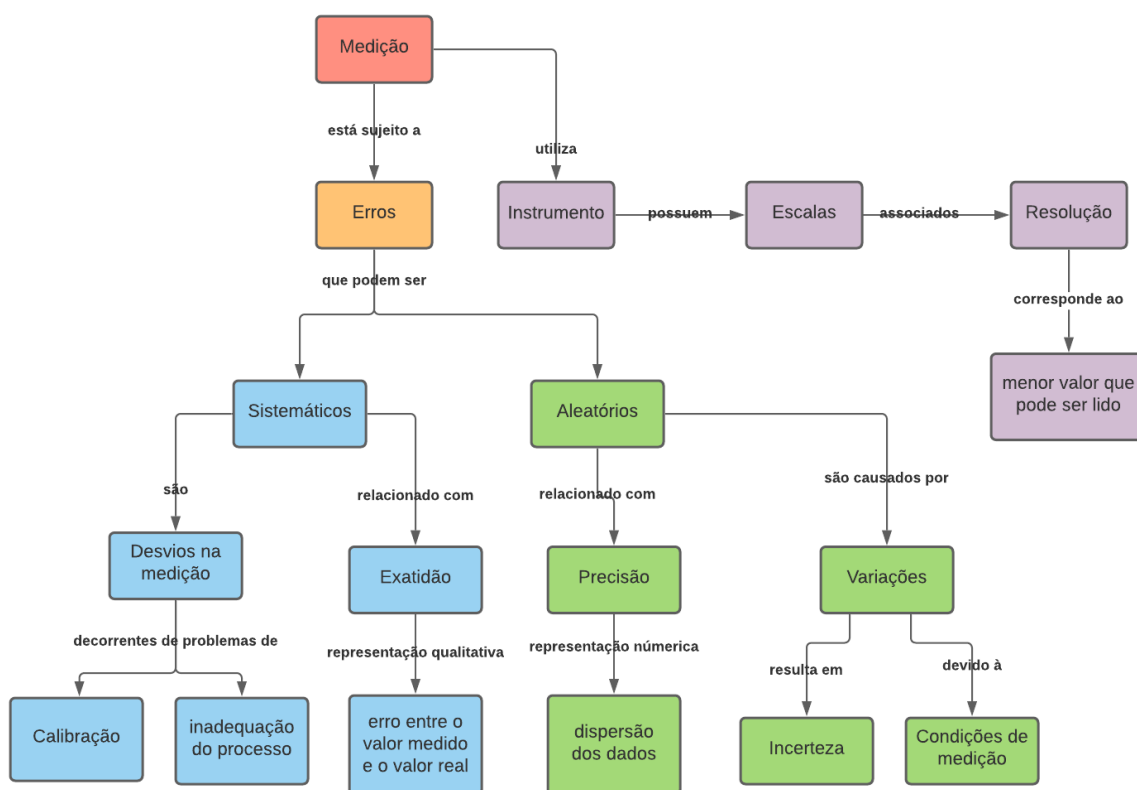


Figura 1 – Diagrama de mapa conceitual mostrando a relação entre os conceitos de medição.

3. Ponte de Wheatstone

A ponte de Wheatstone é um esquema de montagem elétrica caracterizado por um circuito em forma de ponte como mostrado na Figura 1. É utilizado para medição de uma resistência de valor desconhecida. Foi desenvolvida por Samuel Christie em 1833, mas foi popularizado pelo Charlie Wheatstone que acabou ficando famoso com o esquema de montagem. A ponte proporciona elevada sensibilidade nas medições, sendo muito utilizada em medições com sensores¹.

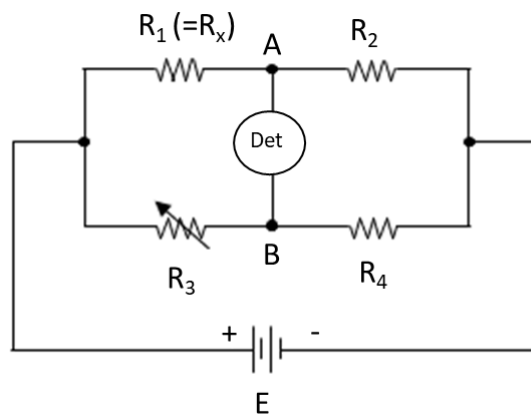


Figura 1 – Esquema elétrica da Ponte de Wheatstone.

Descrição da ponte

Observe que o circuito da Fig. 1 é constituído por quatro resistências (R_1 , R_2 , R_3 e R_4). Em geral, uma delas é desconhecida. Vamos supor que seja R_1 (por conveniência podemos utilizar $R_1 = R_x$). A resistência R_3 é um resistor variável que permite ajustar a tensão do nó **B**. As outras duas resistências, R_2 e R_4 , são resistores de valores conhecidos. O detetor deve ser um medidor capaz de detectar um fluxo de corrente de baixa intensidade (da ordem de micro amperes) ou uma diferença de potencial baixíssimo (da ordem de dezenas de microvolts).

Condição de equilíbrio

Para a utilização da ponte, é interessante analisarmos o comportamento do circuito na condição de equilíbrio. O equilíbrio da ponte se dará quando a corrente que passa pelo detetor for nula, ou seja quando a tensão dos nós A e B forem iguais (Eq. 1).

$$V_A = V_B \quad (1)$$

Nesta condição, demonstra-se facilmente que vale a relação (2).

¹ Aceleração, pressão, tensão mecânica, posição, potência eletromagnética, etc. Veja as aplicações da ponte fazendo uma busca para “wheatstone and bridges”.

$$R_1 R_4 = R_3 R_2 \quad (2)$$

Para colocar a ponte em equilíbrio, nós variaremos a resistência R_3 , sendo que as demais permanecerão fixas. Com a ponte em equilíbrio, podemos determinar o valor da resistência desconhecida R_1 utilizando a relação (3).

$$R_1 = \frac{R_2}{R_4} R_3 \quad (3)$$

Medidas com elevada exatidão

A ponte de Wheatstone permite medidas de elevada exatidão, desde que seja bem projetada e construída cuidadosamente. Para isso, as resistências conhecidas devem ter valores bastante estáveis, variando muito pouco em função da temperatura, pressão, deformação, aceleração, etc.

Evidentemente, a precisão e a exatidão da ponte dependem da precisão e da exatidão das resistências que a compõem. Além disso, a fonte de alimentação deve ser bastante estável também, podendo ser empregadas baterias ou fontes de tensão reguladas de alta qualidade. O detector deve ter sensibilidade elevada e pode ser implementada por meio de um galvanômetro ou multímetro digital. Nesta experiência utilizaremos um multímetro digital de bancada com 6 ½ dígitos (resolução de 1 microvolt).

4 Análise de sensibilidade

Para efeito de análise, o detector (Det) mostrado na Fig. 1 pode ser de dois tipos: resistência finita ou resistência infinita. Por exemplo, um micro-amperímetro ($R_{in} \approx 2 \text{ k}\Omega$) como detector pode ser considerado como sendo de **resistência finita**. Enquanto que, se utilizarmos um multímetro de bancada ($R_{in} \approx 10 \text{ M}\Omega$), podemos considerá-lo como sendo de **resistência infinita** (trata-se de uma aproximação válida dentro de determinadas condições).

Uma ponte é denominada **sensível** quando o seu detector de zero (valor mínimo) é capaz de “perceber” uma pequena **variação relativa** das resistências de seus braços (ou seja, ao sair do equilíbrio, o detector mede algum valor diferente de zero). Evidentemente, uma medida com alta exatidão implica alta sensibilidade da ponte. No nosso experimento, um bom projeto precisa levar em conta a possibilidade de equilibrar a ponte ajustando-se R_3 , ou seja, deve ser possível variar R_3 em **passos pequenos** o suficiente para que se consiga **equilibrar a ponte** e efetuar a medida.

Análise do circuito com Detector de Resistência Infinita

Vamos considerar que o detector escolhido seja de resistência infinita² e deseja-se medir com exatidão a resistência R_1 . O circuito equivalente é mostrado na Fig. 2.

² A resistência interna do detector deve ser no mínimo 100 vezes (preferencialmente 1000 vezes) maior que as resistências R_3 e R_4 .

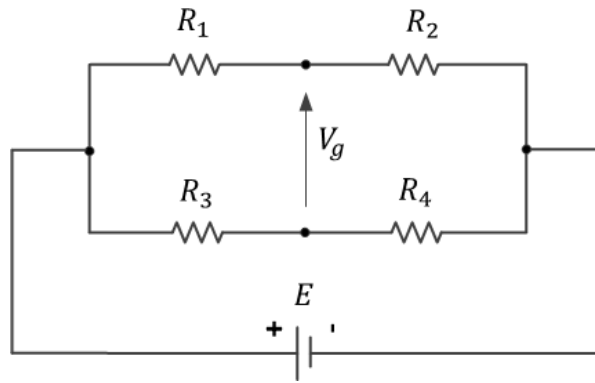


Figura 2 - Circuito equivalente da ponte com o detector de resistência infinita.

O detector mede a tensão V_g na saída do circuito como indicado na Figura 2. A tensão V_g é obtida pela expressão a seguir:

$$V_g = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) E \quad (4)$$

Vamos definir o ganho de tensão da ponte por

$$G_v \triangleq \frac{V_g}{E} \quad (5)$$

À vista da relação (4), o ganho de tensão fica:

$$G_v = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \quad (6)$$

No equilíbrio, o ganho de tensão é, portanto $(G_v)_{\text{equil.}} = 0$. O objetivo agora é escolher R_2 , R_3 , e R_4 de forma que o ganho de tensão seja o maior possível para um pequeno desvio do equilíbrio. Para isto, é necessário determinar quão rapidamente a função $G_v = G_v(R_1, R_2, R_3, R_4)$ varia com R_1 .

Define-se, portanto, a sensibilidade do ganho em relação a R_1 pela derivada parcial:

$$S_{R_1} \triangleq \frac{\partial G_v}{\partial R_1} \quad (7)$$

Efetuada a derivação indicada resulta:

$$S_{R_1} = -\frac{R_2}{(R_1 + R_2)^2} \quad (8)$$

Pergunta-se: que valor fixo de R_2 deve ser escolhido para que a derivada acima (8) seja máxima?

Para responder esta pergunta, considere agora que R_1 é fixo. Neste caso, o valor de R_2 que maximiza o módulo de S_{R_1} maximizará então a sensibilidade da ponte. Para encontrar o valor ótimo para R_2 , basta fazer:

$$\frac{\partial}{\partial R_2} |S_{R_1}| = \frac{R_1 - R_2}{(R_1 + R_2)^3} = 0 \quad (9)$$

Segue-se, portanto, a condição:

$$R_2 = R_1 \quad (10)$$

Para verificar que a condição acima realmente se refere a um máximo, é necessário conferir se a derivada segunda de (9) é negativa quando (10) é satisfeita. De fato,

$$\frac{\partial^2}{\partial R_2^2} |S_{R_1}| = - \frac{4R_1 - 2R_2}{(R_1 + R_2)^4} < 0 \quad (11)$$

quando $R_2 = R_1$.

Usando a condição de equilíbrio da ponte (2), tem-se que:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3} = 1 \quad (12)$$

Logo, a condição para máxima sensibilidade no equilíbrio é:

$$R_1 = R_2 \text{ e } R_3 = R_4 \quad (13)$$

Portanto, para condição de **máxima sensibilidade**, devem ser iguais as resistências dos braços em cada lado do detector. Note que a condição (13) pressupõe que se conheça R_1 , a resistência que se deseja medir! Na prática, para se usar uma ponte de Wheatstone é necessário que seja disponível um valor aproximado para a resistência desconhecida (utiliza-se o valor nominal). A escolha de R_2 é feita com base nesse valor aproximado.

O próximo passo é calcular qual é a menor variação de R_1 que pode ser determinada com a ponte na condição de máxima sensibilidade, ou seja, o próximo passo é determinar a resolução da ponte!

A partir de (7), e passando a acréscimos finitos, é possível calcular a variação de R_1 correspondente a $\Delta v_{g \min}$, que vem a ser a menor variação mensurável de v_g . De (7),

$$\frac{\Delta v_g}{E \cdot \Delta R_1} \cong S_{R_1} \text{ para } \Delta R_1 \text{ pequeno} \quad (14)$$

Logo,

$$\Delta R_{1 \min} \cong \frac{1}{S_{R_1}} \frac{\Delta v_{g \min}}{E} \quad (15)$$

Satisfeita a condição (13), a sensibilidade (máxima) resulta:

$$S_{R_1 \max} = - \frac{1}{4 R_1} \quad (16)$$

Substituindo esta expressão em (15), obtém-se a mínima variação relativa de R_1 que pode ser detectada na ponte:

$$p_m = \left| \frac{\Delta R_{1\min}}{R_1} \right| = 4 \left| \frac{\Delta V_{g\min}}{E} \right| \quad (17)$$

O valor de p_m é a medida da menor variação relativa de R_1 , e conclui-se que este valor está diretamente associado com a resolução do instrumento de medida (V_g) e com a sensibilidade máxima de transdução $\left(\frac{\partial G_v}{\partial R_1}\right)$.

O valor p_m permite avaliar (e por que não dizer quantificar) a resolução da ponte, isto é, uma variação relativa de R_1 menor que p_m não pode ser observada com tal circuito.

Portanto, quanto **menor** p_m , **melhor** será a sua sensibilidade. Na prática o valor de p_m é expresso em **ppm** (partes por milhão).

O equilíbrio da ponte é obtido variando-se R_3 , como foi dito anteriormente. Portanto, para realmente ser possível usar toda a sensibilidade da ponte, é necessário poder variar R_3 em passos suficientemente pequenos para atingir o equilíbrio. Para verificar se isto é possível, deve-se calcular a qual variação de R_3 corresponde uma variação de $\Delta V_{g\min}$ no detector. Isto é feito da mesma forma com que foi determinada (11):

$$S_{R_3} \triangleq \frac{\partial G_v}{\partial R_3} = \frac{R_4}{(R_3 + R_4)^2} = \frac{1}{4R_3} \quad (18)$$

onde foi usada a condição (13). Portanto, para ser possível equilibrar a ponte é necessário ter:

$$\left| \Delta R_{3\min} \right| \leq \frac{1}{S_{R_3}} \left| \frac{\Delta V_{g\min}}{E} \right| \Rightarrow \left| \frac{\Delta R_{3\min}}{R_3} \right| \leq p_m. \quad (19)$$

Este resultado implica que, para ser possível equilibrar a ponte, é necessário que a mínima variação *relativa* de R_3 deve ser, *no máximo*, da mesma ordem de grandeza que p_m . Esta conclusão fornece parâmetros para a escolha de R_3 : a caixa de resistências³ e o valor de R_3 devem ser tais que a mínima variação da caixa, dividido pelo valor de R_3 , seja menor que a resolução da ponte, p_m , obtida de (17). Note que R_3 será o único grau de liberdade que teremos no circuito no experimento.

Note também que o valor de p_m (17) diminui se for aumentado o valor de E . No entanto, o valor da tensão que alimenta o circuito será limitado pela corrente de operação das caixas de resistências!

5 - Projeto de uma ponte de Wheatstone

O projeto de uma ponte pode variar de acordo com o valor da resistência desconhecida a medir, aplicação e os equipamento disponíveis. As pontes podem servir para medir (ou comparar) resistências com alta exatidão. Em instrumentação, as pontes são empregadas para medir

³ Caixa de Resistências, também chamado resistência de décadas, é um dispositivo que permite variar o valor da resistência por meio de botões. <http://newtonbraga.com.br/index.php/instrumentacao/108-artigos-diversos/11805-caixa-de-resistencias-ins349>

resistências de transdutores que convertem uma **grandeza não elétrica em resistência elétrica**. Um exemplo de transdutor é o extensômetro⁴ (*strain-gauges*) que será utilizado nesta experiência. Vamos ver os passos para projetar a ponte (Fig. 2) considerando que o resistor R_1 é um extensômetro (transdutor de deformação).

- Da condição de equilíbrio e de máxima sensibilidade (expressão 13) tem-se que $R_1 = R_2$ e $R_3 = R_4$.
- O R_1 é a resistência do transdutor (o fabricante especifica a resistência nominal, assim partimos para o projeto com um valor conhecido). Logo, o valor de R_2 está determinado.
- Os valores de R_3 e de R_4 devem ser iguais. A escolha deve levar em conta a disponibilidade da caixa de resistências e dos valores de R_4 , lembrando que $\Delta R_{3\min}/R_3$ tem que ser menor que $\Delta R_1/R_1$.
- O valor da tensão de alimentação deve levar em conta que:
 - Quanto maior o seu valor melhor será a sensibilidade;
 - As correntes não devem ultrapassar os limites da caixa de resistores, das resistências fixas, nem do transdutor (R_1).
 - O efeito de variação dos resistores por aquecimento Joule deve ser minimizado ao máximo.

⁴ Elementos que convertem grandezas mecânicas em elétricas.
PSI3214 LABORATÓRIO DE INSTRUMENTAÇÃO ELÉTRICA – Experiência 01
Material didático produzido pelos professores do PSI/POLI/USP