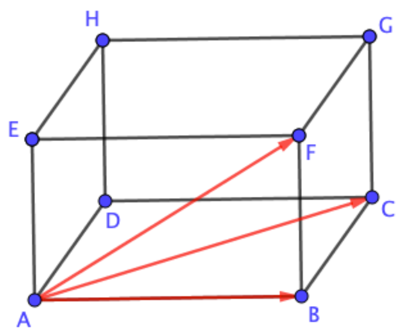
IME-USP
MAT105 – *Geometria Analítica*
1/2020 – T21 (IF) e T42 (IME)
Profa. Ana Paula Jahn

Lista 3 – Gabarito
Exercícios 1, 2, 3, 4, 7, 11 e 13

1) Dados: $\vec{e_1} = \overrightarrow{AB}, \vec{e_2} = \overrightarrow{AC}, \vec{e_3} = \overrightarrow{AF}$
Sistema: $(A, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, isto é, com origem em A e base $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \vec{e_1}, \vec{e_1}\}$
Coordenadas de pontos na base $\mathcal{B}$:

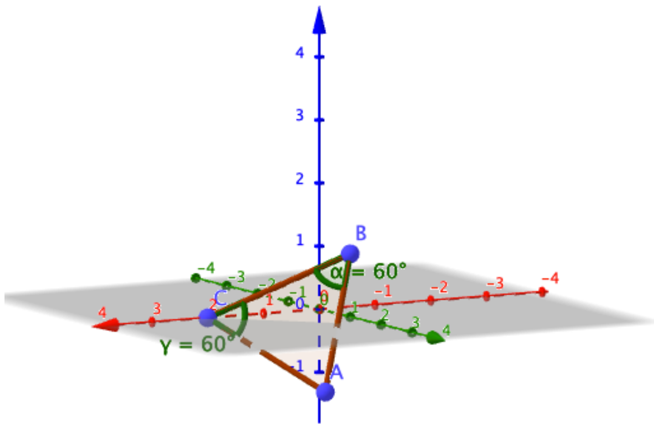
$A = (0,0,0)$
$B = (1,0,0)$, pois $\overrightarrow{AB} = \vec{e_1}$
$C = (0,1,0)$, pois $\overrightarrow{AC} = \vec{e_2}$
$D = (-1,1,0)$, pois $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\vec{e_1} + \vec{e_2}$
$E = (-1,0,1)$, pois $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB} = -\vec{e_1} + \vec{e_3}$
$F = (0,0,1)$, pois $\overrightarrow{AF} = \vec{e_3}$
$G = (-1,1,1)$, pois $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$
$H = (-2,1,1)$, pois $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}\right) = -2\vec{e_1} +$
$+ \vec{e_2} + \vec{e_3}$



2) Dados: $A = (1, 2, -1)$, $B = (0, 1, 1)$ e $C = (2, 0, 0)$.
Mostremos que A, B e C são vértices de um triângulo equilátero.
De fato:
$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, -1, 2)$, logo $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{6}$ u.c.
$\overrightarrow{AC} = C - A = (1, -2, 1)$, logo $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{6}$ u.c.
$\overrightarrow{BC} = C - B = (2, -1, -1)$, logo $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{6}$ u.c.

Com isso, tem-se $AB = AC = BC$ e, portanto, ΔABC é equilátero.

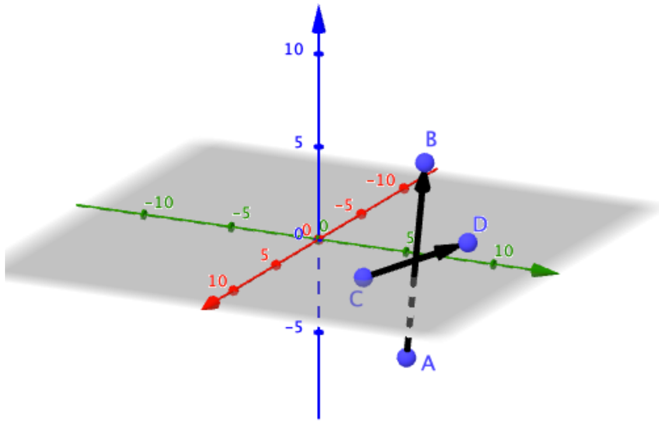
Obs. Poderia também verificar as medidas dos lados com o cálculo de distância entre dois pontos (sem o uso de vetores); ou ainda, verificar as medidas de dois lados e um ângulo, ou de dois ângulos (usando produto escalar).



3) Dados: $A = (2, 6, -5)$, $B = (6, 9, 7)$, $C = (5, 5, 0)$ e $D = (3, 10, 2)$
Verifiquemos se esses pontos são vértices de um paralelogramo usando vetores:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 3, 12)$$
$$\overrightarrow{DC} = D - C = (2, -5, -2)$$

Como $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ são distintos (não colineares e normas diferentes), não podem representar lados do paralelogramo.



Verifiquemos se os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ representam as diagonais, recorrendo à propriedade do ponto médio (em um paralelogramo, as diagonais se cruzam em seus respectivos pontos médios):

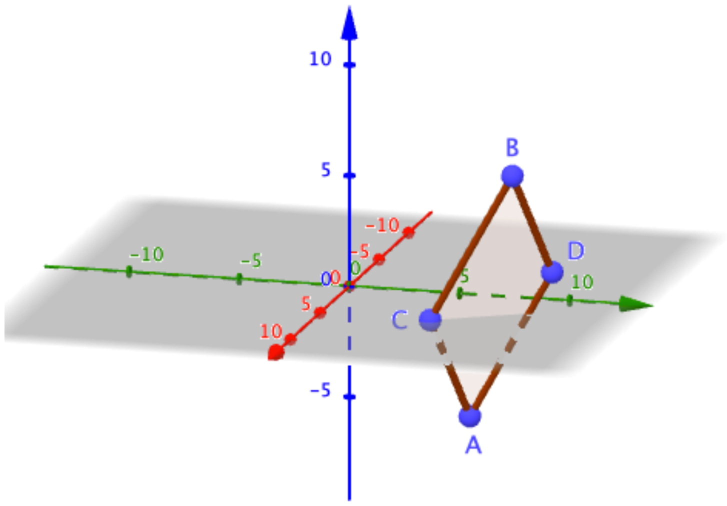
M ponto médio de $\overline{AB}$: $M = \left(4, \frac{15}{2}, 1\right)$
N ponto médio de $\overline{DC}$: $N = \left(4, \frac{15}{2}, 1\right)$

Como, $M = N$, o quadrilátero $ADBC$ (vértices nesta ordem) é paralelogramo.

Ou ainda, pode-se verificar com os vetores:

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (1, 4, 7)$$
$$\overrightarrow{BC} = B - C = (-1, -4, -7)$$

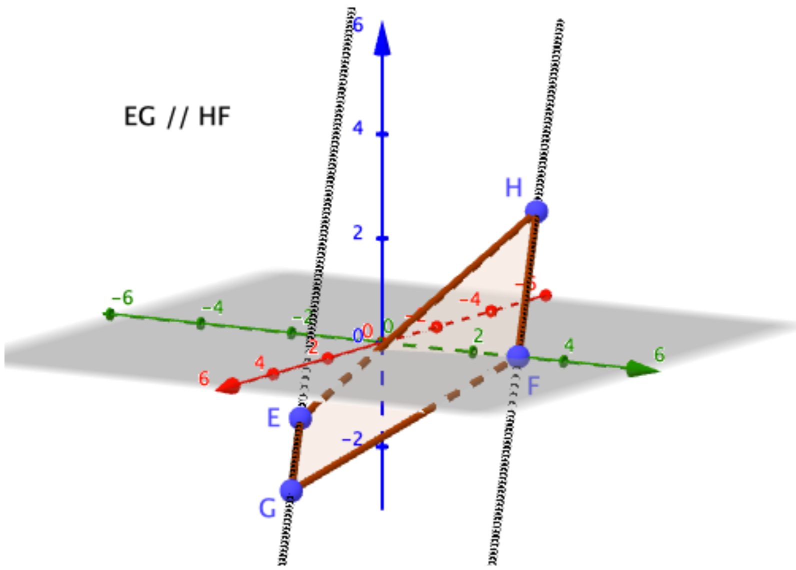
Como $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{BC}$, os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são paralelos e de mesma medida, logo, $ADBC$ (nesta ordem) é paralelogramo.



4) Dados: $E = (3, 0, -1)$, $F = (0, 3, 0)$, $G = (5, 1, -2)$ e $H = (-4, 1, 2)$
Mostremos que esses pontos determinam um trapézio. De fato:

$$\overrightarrow{EG} = G - E = (2, 1, -1)$$
$$\overrightarrow{FH} = H - F = (-4, , -2, 2)$$

Como $\overrightarrow{FH} = -2\overrightarrow{EG}$, os segmentos $\overline{FH}$ e $\overline{EG}$ são paralelos, logo, $EGFH$ (nesta ordem) é trapézio.



7) Dada a reta de equação $r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

Pela equação dada na forma paramétrica, tem-se:

$A = (1, 0, 4) \in r$ e um vetor diretor de r é: $\vec{v}$=(-1, 1, 2)

Mais dois pontos da reta r:
Para $\lambda = 1$, tem-se: $x = 0, y = 1$ e $z = 6$, logo $B = (0, 1, 6) \in r$
Para $\lambda = -1$, tem-se: $x = 2, y = -1$ e $z = 2$, logo $C = (2, -1, 2) \in r$

E r tem por vetor diretor, qualquer múltiplo de $\vec{v}$, isto é, $\vec{v}_r = k\vec{v}$.
Por exemplo: $\vec{v}_1 = -\vec{v} = (1, -1, -2)$ ou $\vec{v}_2 = 3\vec{v} = (-3,3,6)$

Verifiquemos se $P = (0,1,5)$ pertence à reta r:
Substituindo as coordenadas de P na equação de r, temos:

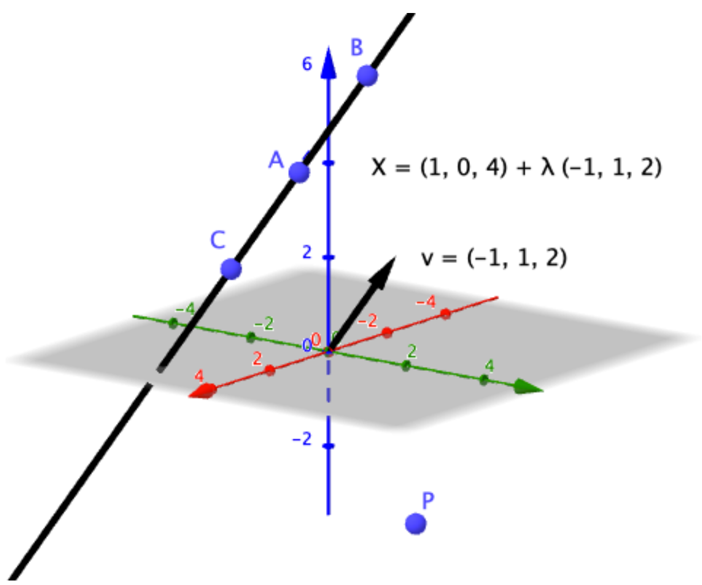
$$\begin{cases} 0 = 1 - \lambda \; (1) \\ 1 = \lambda \quad (2) \\ 5 = 4 + 2\lambda \; (3) \end{cases}$$

De (2): $\lambda = 1$, o que não satisfaz (3). Logo, $P \notin r$.

De forma análoga, vamos verificar se $Q = (-3,4,12)$ pertence à reta r:
Substituindo as coordenadas de Q na equação de r, temos:

$$\begin{cases} -3 = 1 - \lambda \; (1) \\ 4 = \lambda \quad (2) \\ 12 = 4 + 2\lambda \; (3) \end{cases}$$

De (2): $\lambda = 4$, o que satisfaz (1) e (3). Logo, $Q \in r$.



11) Sejam as retas:

a) $r:\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ e $s:\begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2}\mu \\ y = 2 + \mu \\ z = 1 + \frac{1}{2}\mu \end{cases}$ $(\mu \in \mathbb{R})$

Pelas equações dadas na forma paramétrica, tem-se:

$A = (1, 2, -1) \in r$ e um vetor diretor de r é: $\vec{v}$=(-1, 2, 1)
e
$B = (1, 2, 1) \in s$ e um vetor diretor de s é: $\vec{u}=\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$

Como $\vec{u} \parallel \vec{v}$ (note que $\vec{v} = 2\vec{u}$), tem-se $r \parallel s$. E como $A \notin s$, as retas são paralelas distintas: $r \neq s$.

b) Dadas as retas:

$r: X = (1,1,0) + \lambda\left(1,0,-\frac{1}{2}\right)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ e s: $X = \left(0,1,\frac{1}{2}\right) + \mu(-2,0,1)$ (μ ∈ ℝ)

Pelas equações dadas na forma vetorial, tem-se:

$P = (1, 1, 0) \in r$ e um vetor diretor de r é: $\vec{u}=\left(1,0,-\frac{1}{2}\right)$
e
$Q = \left(0,1,\frac{1}{2}\right) \in s$ e um vetor diretor de s é: $\vec{v}=(-2,0,1)$

$r:\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -\frac{1}{2}\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

Verificando se Q pertence a s:

$$r:\begin{cases} 0 = 1 + \lambda & (1) \\ 1 = 1 & (V) \\ \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}\lambda & (2) \end{cases}$$

De (1), $\lambda = -1$, o que satisfaz (2). Logo, $Q \in r$.

Como $\vec{u} \parallel \vec{v}$ (note que $\vec{v} = -2\vec{u}$), tem-se $r \parallel s$. E como $Q \in r$, as retas são paralelas coincidentes: $r = s$.

13) Dada a reta:

$$r: X = (1,0,0) + \lambda(1,1,1) \ (\lambda \in \mathbb{R})$$

Tem-se as equações paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

E das equações simétricas (isolando o parâmetro λ), tem-se: $x - 1 = y = z$

Assim, um P ponto reta r é $P = (x, x-1, x-1)$.

Pede-se $P \in r$ que equidista de $A = (1,1,1)$ e $B = (0,0,1)$. Assim:

$$d(P,A) = d(P,B) \Leftrightarrow \|\overrightarrow{PA}\| = \|\overrightarrow{PB}\|$$

$$\overrightarrow{PA} = (x-1, x-2, x-2) \quad \text{e}$$
$$\|\overrightarrow{PA}\|^2 = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-2)^2 = 3x^2 - 10x + 9$$

$$\overrightarrow{PB} = (x, x-1, x-2) \quad \text{e}$$
$$\|\overrightarrow{PB}\|^2 = x^2 + (x-1)^2 + (x-2)^2 = 3x^2 - 6x + 5$$

$$\|\overrightarrow{PA}\|^2 = \|\overrightarrow{PB}\|^2$$
$$3x^2 - 10x + 9 = 3x^2 - 6x + 5$$
$$-4x = -4$$
$$x = 1$$

Logo, $P = (1,0,0)$.

De fato: $P \in r$ e $d(P,A) = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2} = d(P,B)$