

SEM 536 - Sistemas de Controle I

Aula 7 - Lugar das Raízes - Compensadores em Avanço e Atraso

Adriano A. G. Siqueira

Universidade de São Paulo

- Exemplo

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+4)}$$

- Passo 1: Plotar no plano complexo os pólos (\times) e zeros (\circ) de $G(s)$
- Passo 2: Determinar o LR sobre o eixo real: Se o número de pólos e zeros à direita de s_0 é ímpar, então s_0 pertence ao LR

- Passo 3: Desenhar as assíntotas do LR para $K \rightarrow \infty$
 - Ângulo das assíntotas

$$\phi_l = \frac{180^\circ + 360^\circ(l-1)}{n-m}, \quad l = 1, 2, \dots, n-m$$

- Ponto de cruzamento das assíntotas, α

$$\alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m}$$

- Passo 4: Determinar ângulo de partida do pólo k

$$\phi_k = \sum_{j=1}^m \psi_j - \sum_{i=1, i \neq k}^n \phi_i - 180^\circ$$

ψ_j = ângulo entre o zero j e o pólo k

ϕ_i = ângulo entre o pólo i e o pólo k

- Passo 4: Determinar ângulo de chegada do zero k

$$\psi_k = \sum_{i=1}^n \phi_i - \sum_{j=1, j \neq k}^n \psi_j + 180^\circ$$

ψ_j = ângulo entre o zero j e o pólo k

ϕ_i = ângulo entre o pólo i e o pólo k

- Passo 5: Determinar os pontos de cruzamento com o eixo imaginário

1) Critério de Routh

2) Substitui $s_0 = \omega_0 j$ na eq. característica e determina-se K e ω_0

- Passo 6: Determinar os pontos de separação de partida e de chegada

$$a(s)b'(s) - a'(s)b(s) = 0$$

- Dois segmentos se separam em $\pm 90^\circ$
- Três segmentos se aproximam com ângulo relativo de 120° e se separam com rotação de 60° .

Lugar das Raízes

- LR com relação a um parâmetro do sistema
- Exemplo

$$G(s) = \frac{1}{s(s+c)}$$

- Equação característica, $K = 1$

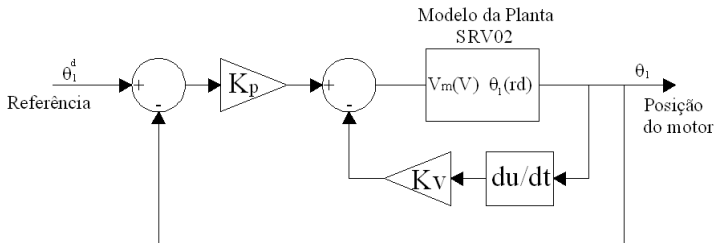
$$1 + G(s) = 0$$

$$s^2 + cs + 1 = 0$$

$$1 + c \frac{s}{s^2 + 1} = 0$$

Lugar das Raízes

- LR com dois parâmetros
- Motor DC + controlador PV (Proporcional-Velocidade)



$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$T(s) = \frac{K_P}{s^2 + (1 + K_V)s + K_P}$$

- Equação característica

$$s^2 + (1 + K_V)s + K_P = 0$$

- Reescrevendo para $K_P = 4$

$$1 + K_V \frac{s}{s^2 + s + 4} = 1 + K_V G_V(s) = 0$$

- Variação de K_P

$$s^2 + (1 + K_V)s + K_P = 0$$

- Reescrevendo para $K_V = 1$

$$1 + K_P \frac{1}{s(s+2)} = 1 + K_P G_P(s) = 0$$

Compensação em Avanço e Atraso

- Compensador da forma

$$C(s) = \frac{s + z}{s + p}$$

- Avanço: $z < p$
- Atraso: $z > p$
- Equação característica

$$1 + KC(s)G(s) = 0$$

- Considere

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

- Especificações

$$\zeta > 0,5$$

$$\omega_n > 7 \text{ rad/s}$$

- Matlab: sisotool

- Para pertencer ao Lugar das Raízes: $\angle C(s_0)G(s_0) = 180^\circ$

$$\angle C(s_0)G(s_0) = \angle \frac{s_0 + z}{(s_0 + p)s_0(s_0 + 1)}$$

$$\angle C(s_0)G(s_0) = \angle s_0 + z - \angle s_0 + p - \angle s_0 - \angle s_0 + 1$$

- Considere $s_0 = -6 + 6j$ e $z = 4$

$$\angle C(s_0)G(s_0) = \angle -6 + 6j + 4 - \angle -6 + 6j + p - \angle -6 + 6j - \angle -6 + 6j + 1$$

Compensação em Avanço e Atraso

- Considere $s_0 = -6 + 6j$ e $z = 4$

$$\angle C(s_0)G(s_0) = \angle -2 + 6j - \angle -6 + 6j + p - \angle -6 + 6j - \angle -5 + 6j$$

$$\angle C(s_0)G(s_0) = 108,4 - \angle -6 + 6j + p - 135 - 129,8 = 180$$

$$\angle -6 + 6j + p = 108,4 - 135 - 129,8 - 180 = 23,6$$

- Cálculo de p :

$$\tan(23,6) = \frac{6}{-6 + p} = 0.437$$

$$p = \frac{6}{0.437} + 6 = 19,73$$

- Exemplo: Compensador em Avanço

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 51s + 550)}$$

- Especificações:
 - Parte real: $-\sigma < -7$ (tempo de acomodação $t_s < 0,56s$)
 - Amortecimento: $\zeta > 0.6$
 - Erro de regime, entrada rampa: $e_{rampa} < 0,1$

- $\text{numG} = 1$
- $\text{denG} = [1 \ 51 \ 550 \ 0]$
- $G = \text{tf}(\text{numG}, \text{denG})$
- $\text{sisotool}(G)$

- Erro de regime:

$$e_{rampa} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sKC(s)G(s)} = \frac{p * 550}{K * z} < 0,1$$

- Sugestão: $p = 6 * z$

$$K > 33000$$

Lugar das Raízes - Atraso no Tempo

- Considere o sistema sem atraso

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

- E o sistema com atraso no tempo de λ segundos

$$G'(s) = \frac{e^{-\lambda s}}{s(s+1)}$$

- Aproximação do atraso no tempo

$$e^{-\lambda s} \approx \frac{1}{s + \frac{1}{\lambda}}$$

- Matlab: sisotool

- Exemplo: Auto-piloto

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{160(s + 2,5)(s + 0,7)}{(s^2 + 5s + 40)(s^2 + 0,03s + 0,06)}$$

- Especificações

- Tempo de subida: $t_r < 1$ s ($\omega_n > 1.8$ rad/s)
- Sobresinal menor que 10% ($\zeta > 0.6$)

- `numG = 160*conv([1 2.5],[1 0.7])`
- `denG = conv([1 5 40],[1 0.03 0.06])`
- `G =tf(numG,denG)`
- `sisotool(G)`
-

$$C(s) = \frac{s + 3}{s + 30}$$