MAP2110 - Notas de aula e exercícios

Cônicas

Saulo R. M. Barros

Departamento de Matemática Aplicada - IME-USP

Quádricas ~~e~~ cônicas e formas quadráticas em $\mathbb{R}^2$.

Definição: Uma equação quadrática nas variáveis $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ é da forma $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, onde a, b, c, d, e, f são constantes. A esta equação está associada uma forma quadrática que consiste em $ax^2 + 2bxy + cy^2$.

A equação quadrática pode ser escrita matricialmente como:

$$[x \ \ y]\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [d \ \ e]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

correspondendo a: $X^t A X + KX + f = 0$ com $X = \binom{x}{y}$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, $K = [d \ e]$

A forma quadrática é dada por $X^t A X$, onde a matriz A é simétrica.

A cada equação quadrática, corresponde uma cônica (eventualmente degenerada). Veremos aqui como identificá-las.

Vamos inicialmente supor que o coeficiente b seja igual a 0, caso em que a matriz A é diagonal.

Neste caso a equação quadrática é:

$$ax^2 + dx + cy^2 + ey + f = 0$$

O que vamos fazer agora é "completar quadrados".

Veja que $ax^2 + dx = a(x^2 + \frac{d}{a}x) = a\left(x^2 + \frac{d}{a}x + \left(\frac{d}{2a}\right)^2 - \left(\frac{d}{2a}\right)^2\right)$

$$= a\left(\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2\right) - a\left(\frac{d}{2a}\right)^2$$

Vejamos como usar o completamento de quadrados na identificação de cônicas.

Considere a equação $2x^2 + y^2 - 12x - 4y + 18 = 0$

Escrevendo: $2x^2 - 12x + y^2 - 4y + 18 = 0$

$$2(x^2 - 6x) + (y^2 - 4y) = -18$$

$$2(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = -18 + 18 + 4$$

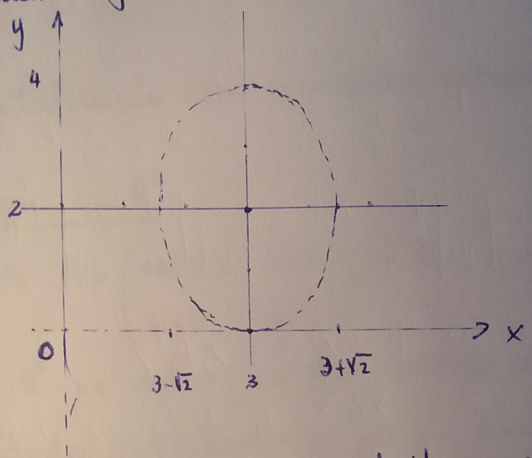
obtemos:

$$2(x-3)^2+(y-2)^2=4$$

e

$$\frac{(x-3)^2}{2}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$$

que podemos identificar como sendo uma elipse com semi-eixo maior igual a 2 e menor $\sqrt{2}$ centrada em $(3,2)$.



Veja que reduzimos a equação quadrática a uma forma padrão da elipse, o que nos permitiu sua identificação.

Formas padrão: elipse: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ hipérbole: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm 1$

parábola: $(y-y_0)^2=c(x-x_0)$, $(x-x_0)^2=c(y-y_0)$

Observação: Nem sempre as equações quadráticas admitem solução (Por exemplo, $x^2+y^2+3=0$) em $\mathbb{R}^2$. No exemplo, só obteríamos solução caso admitíssemos valores complexos p/ x e y. Afora isso, algumas soluções irão corresponder a cônicas degeneradas (por exemplo, um ponto, uma reta, duas retas que se cruzam).

Vejamos outro exemplo:

$$x^2-16y^2+8x+128y=256$$

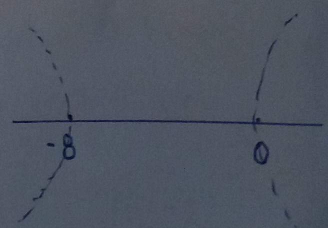
Manipulando:

$$(x^2+8x)-(16y^2-128y)=256$$

$$(x^2+8x+16)-16(y^2-8y+16)=256-16.16+16$$

$$(x+4)^2-16(y-4)^2=16$$

$$\frac{(x+4)^2}{16}-(y-4)^2=1 \quad \text{(hipérbole)}.$$



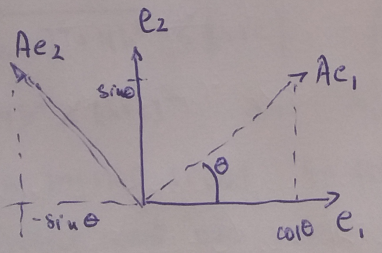
O caso $b \neq 0$

Neste caso, as cônicas não estarão alinhadas com os eixos x e y, mas sim com eixos x', y' obtidos através de uma rotação dos eixos originais.

Para sua identificação será necessário introduzirmos alguns conceitos.

Matriz de Rotação em $\mathbb{R}^2$:

Uma matriz $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ é tal que Av transforma um vetor $v \in \mathbb{R}^2$ no vetor $u = Av$ obtido através da rotação de u no sentido anti-horário por um ângulo θ. Veja que o vetor $e_1 = (1\ 0)$ é tal que $Ae_1 = (\cos\theta, \sin\theta)$ e para $e_2 = (0\ 1)$, $Ae_2 = (-\sin\theta, \cos\theta)$.



Obs: Note que

$$A^t A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = I,$$

ou seja $\underline{\underline{A^{-1} = A^t}}$!

Auto-vetores da matriz A:

Dizemos que um vetor $v \neq 0$ é um auto-vetor de A caso exista λ (queremos $\lambda \in \mathbb{R}$ aqui) tal que $Av = \lambda v$, ou seja, a multiplicação de v por A produz um múltiplo de v. (λ é chamado auto-valor!)

Vocês viram um exemplo particular no projeto, onde buscamos um vetor x tal que $Mx = x$ e a condição para termos um tal vetor era que $(M - I)$ fosse singular, ou seja, que $\det(M - I) = 0$. Neste caso, tínhamos $\lambda = 1$.

Para que exista um tal λ e $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda v$, precisamos ter $\det(A - \lambda I) = 0$.

Vamos considerar a matriz A da forma quadrática $X^t A X$ e calcular $\det(A - \lambda I)$, onde $A - \lambda I = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix}$

e $\det(A - \lambda I) = (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a+c)\lambda - (b^2 - ac) = p(\lambda)$

Note que $\det(A - \lambda I)$ é um polinômio em λ, que será nulo quando λ for raiz. As raízes deste polinômio são:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+c) \pm \sqrt{a^2 + 2ac + c^2 + 4b^2 - 4ac}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$$

Podemos observar que as raízes sempre são reais. Além disso, se $a = c$ e $b = 0$, teremos raiz dupla $\lambda = a$. Além disso, quando $\sqrt{(a-c)^2 + 4b^2} < |a+c|$ (ou seja, quando

$$(a-c)^2 + 4b^2 < (a+c)^2 \iff 4(b^2 - ac) < 0 \iff \det A > 0)$$

as raízes têm mesmo sinal. Se $\det A = 0$ teremos uma raiz nula e a outra não nula. Caso $\det A < 0$, as raízes têm sinais opostos.

Vamos considerar o caso em que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Existem então $v_1, v_2 \neq 0$ tal que $Av_1 = \lambda_1 v_1$ e $Av_2 = \lambda_2 v_2$. Note que qualquer múltiplo destes vetores será também um auto-vetor. Podemos portanto normalizar v_1 e v_2 de maneira que $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$.

Vamos agora, usando o exercício 2 f) da lista 11 (que estabelece que $Ax \cdot y = x \cdot A^t y$, $\forall A_{n \times n}, x, y \in \mathbb{R}^n$), mostrar que v_1 e v_2 são ortogonais. Temos que $\lambda_1(v_1 \cdot v_2) = \lambda_1 v_1 \cdot v_2 = Av_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot A^t v_2 =$
$= v_1 \cdot Av_2$ (A é simétrica!) $= v_1 \cdot \lambda_2 v_2 = \lambda_2(v_1 \cdot v_2)$.

Assim, $(\lambda_1 - \lambda_2)(v_1 \cdot v_2) = 0$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ temos $v_1 \cdot v_2 = 0$.

Ou seja, v_1 e v_2 são dois vetores ortogonais em $\mathbb{R}^2$, ambos escolhidos com norma 1. São portanto uma rotação da base canônica do $\mathbb{R}^2$.

Vamos agora utilizar estes fatos sobre os auto-vetores de A na identificação das cônicas.

Considere a equação quadrática $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$

A forma quadrática associada tem a matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

e $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 13\lambda + 36$

com raízes $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 9$ (note que $\det A = 36 > 0$)

Calculemos os auto-vetores:

$A - 4I = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ Resolvendo $(A - 4I)v_1 = 0$ temos $v_1 = (2\alpha, \alpha)$

$A - 9I = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = (\beta, -2\beta)$

Como queremos $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ queremos que $4\alpha^2 + \alpha^2 = 5\alpha^2 = 1$ e $\beta^2 + 4\beta^2 = 5\beta^2 = 1$

Assim, $v_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $v_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{+2}{\sqrt{5}}\right)$ é nossa escolha.

Seja P a matriz com colunas v_1 e v_2:

$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ (Observe que P é uma matriz de Rotação, com $\cos\theta = 2/\sqrt{5}$ e $\sin\theta = 1/\sqrt{5}$)

Desta forma: $AP = P\Lambda$, onde $\Lambda = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Lembre que $P^{-1} = P^t$

Tínhamos a equação original dada por:

$$(x \ \ y)^t A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 36$$

Vamos considerar $P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$. Assim $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$

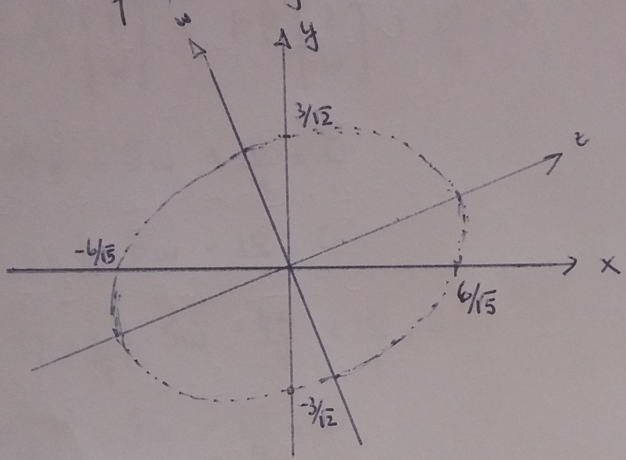
Logo $\quad (x\ y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t = \left(P \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \right)^t = (z\ w)\, P^t$

Substituindo na equação, obtemos:

$(z\ w)\, P^t A P \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = 36 \quad$, onde $P^t A P = \Lambda = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

Logo, $\quad (z\ w)\, \Lambda \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = 36 \quad$ e $\quad \dfrac{z^2}{9} + \dfrac{w^2}{4} = 1 \quad \left(4z^2 + 9w^2 = 36 \right)$

Portanto a equação original era uma elipse rotacionada.



Combinando rotação e translação:

Considere a equação $\quad 4x^2 + 4xy + y^2 + 7\sqrt{5}\,x + \sqrt{5}\,y + 10/4 = 0$

com a forma quadrática $X^t A X$ com $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

A equação é $X^t A X + KX + 10/4 = 0$, onde $K = [7\sqrt{5}\ \ \sqrt{5}]$.

Vamos determinar os auto-valores de A. Calculamos

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 - 4 = \lambda^2 - 5\lambda$, cujas

raízes são 5 e 0. Procuremos os auto-vetores:

$(A - 5I) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{v}_1 = (2\alpha\ \alpha) \quad$ Normalizando: $\vec{v}_1 = (2/\sqrt{5}\ ,\ 1/\sqrt{5})$

$\vec{v}_2 = (-1/\sqrt{5}\ ,\ 2/\sqrt{5})$

$(A - 0I) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{v}_2 = (-\alpha\ 2\alpha)$

Escrevendo $P = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ temos $AP = P\Lambda$ com $\Lambda = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Definindo $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}$ e substituindo na equação, temos:

$$[z \ w] P^t A P \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} + KP \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} + \frac{10}{4} = 0 \quad , \ KP = [15 \ -5]$$

$$[z \ w] \Lambda \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} + KP \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} + \frac{10}{4} = 0$$

$$5z^2 + 15z - 5w + \frac{10}{4} = 0$$

$$5(z^2 + 3z) - 5w + \frac{10}{4} = 0$$

$$5\left(z^2 + 3z + \frac{9}{4}\right) - 5w - \frac{45}{4} + \frac{10}{4} = 0$$

$$5\left(z + \frac{3}{2}\right)^2 - 5w - \frac{35}{4} = 0$$

$$\left(z + \frac{3}{2}\right)^2 - w - \frac{7}{4} = 0 \quad \text{e} \ \therefore \ w = \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{4} \quad \text{que}$$

é uma equação de uma parábola!