1. AULA 1

Convergência de Sequências de Eventos Aleatórios.

1.1. AULA 1 - Convergência de Sequências de Eventos.

Definição 1.1. Em relação a uma sequência de números reais, $(a_n)_{n\geq 1}$, definimos o limite superior de $(a_n)_{n\geq 1}$ ao número real $\overline{a} = \limsup a_n$, com

$$\overline{a} = \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} a_k$$

e definimos o limite inferior de $(a_n)_{n\geq 1}$ ao número real $\underline{a} = \liminf a_n$, com

$$\underline{a} = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} a_k.$$

Se $\overline{a} = \underline{a} = a$ definimos o valor comum, a, como sendo o limite da sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ e denotamos $a = \lim a_n = \lim_{n\uparrow\infty} a_n$.

Exemplo 1.2. Assim, se consideramos $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$, temos

$$\overline{a} = \inf_{n\geq 1} \sup\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, ...\} = \inf\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\} = 0$$

e

$$\underline{a} = \sup_{n\geq 1} \inf\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, ...\} = \sup\{0\} = 0.$$

Portanto $\lim_{n\uparrow\infty} \frac{1}{n} = 0$

Exemplo 1.3. Se consideramos a sequência $a_n = (-1)^n(\frac{n+1}{n})$ temos

$$\overline{a} = \inf_{n\geq 1} \sup\{(-1)^n(1+\frac{1}{n}), (-1)^{n+1}(1+\frac{1}{n+1}), (-1)^{n+2}(1+\frac{1}{n+2}), ...\} =$$

$$\inf_{n\geq 1} \sup\{(1+\frac{1}{2n}), (1+\frac{1}{2n+2}), ...\} = \inf\{(1+\frac{1}{2}), (1+\frac{1}{4}), ..., (1+\frac{1}{2n}), ...\} = 1$$

e

$$\underline{a} = \sup_{n\geq 1} \inf\{(-1)^n(1+\frac{1}{n}), (-1)^{n+1}(1+\frac{1}{n+1}), (-1)^{n+2}(1+\frac{1}{n+2}), ...\} =$$

$$\sup_{n\geq 1} \inf\{-(1+\frac{1}{2n+1}), -(1+\frac{1}{2n+3}), ...\} =$$

$$\sup\{-(1+\frac{1}{3}), -(1+\frac{1}{5}), ..., -(1+\frac{1}{2n+1}), ...\} = -1.$$

Portanto $\overline{a} = 1 \neq -1 = \underline{a}$ e dizemos que o limite não existe.

Observação 1.4. Analiticamente, podemos colocar uma condição necessária e suficiente para que $a = \lim a_n = \lim_{n\uparrow\infty} a_n$ exista:

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \quad | \quad se \quad n \geq n_0 \to |a_n - a| < \varepsilon.$$

Estamos interessados em estudar o limite de sequências de conjuntos aleatórios (variáveis aleatórias) e devemos fixar um espaço de probabilidade, $(\Omega, \Im, P)$, onde serão definidas as operações de interesse. Resumindo, a probabilidade é uma função de conjuntos e para defini-la em um espaço amostral, Ω, consideramos $\Im$, a classe de todos os eventos de Ω fechada pelas operações de reunião, intersecção, complementar, em um número infinito de eventos. Definimos P em $\Im$ satisfazendo os Axiomas de Kolmogorov:

Definição 1.5.

$$P : \Im \to [0,1]$$
$$A \mapsto P(A)$$

satisfazendo
a) $P(\Omega) = 1$
b) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ quando os A_i são disjuntos dois a dois, isto é, $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$.

Definição 1.6. Em relação a uma sequência de conjuntos $(A_n)_{n\geq 1}$, definimos o limite superior de $(A_n)_{n\geq 1}$ ao conjunto $\overline{A} = \limsup A_n$ com

$$\overline{A} = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$$

e definimos o limite inferior de $(A_n)_{n\geq 1}$ o conjunto $\underline{A} = \liminf A_n$, com

$$\underline{A} = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k.$$

Se $\overline{A} = \underline{A} = A$ definimos o conjunto A como sendo o limite da sequência $(A_n)_{n\geq 1}$ e denotamos $A = \lim A_n = \lim_{n\uparrow\infty} A_n$.

Se consideramos a sequência de conjuntos $A_n = (\frac{-1}{n}, \frac{n}{n+1}]$ temos

$$\underline{A} = \cup_{n\geq 1}\{(\frac{-1}{n}, \frac{n}{n+1}] \cap (\frac{-1}{n+1}, \frac{n+1}{n+2}] \bigcap ....\} = \bigcup_{n\geq 1}[0, \frac{n}{n+1}] = [0,1).$$

e

$$\overline{A} = \bigcap_{n\geq 1}\{(\frac{-1}{n}, \frac{n}{n+1}] \bigcup (\frac{-1}{n+1}, \frac{n+1}{n+2}] \bigcup ....\} = \bigcap_{n\geq 1}(\frac{-1}{n}, 1) = [0,1).$$

Portanto $\underline{A} = \overline{A} = \lim A_n = [0,1)$.

Observação 1.7. Podemos interpretar o limite inferior de uma sequência de conjuntos $(A_n)_{n\geq 1}$, como sendo o conjunto dos elementos que pertencem a todos os A_n, a menos de um numero finito de índices. O limite superior é o conjunto de elementos que pertencem a um número infinito dos A_n.

Obviamente temos

$$\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$$

de forma que

$$P(\liminf A_n) \leq P(\limsup A_n).$$

É conveniente observar as Leis de Morgan:

$$(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k)^c = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k^c,$$

$$(\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k)^c = \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k^c$$

e portanto, se o limite existe, $(\lim A_n)^c = \lim A_n^c$.

Definição 1.8. Uma sequência de conjuntos $(A_n)_{n\geq 1}$ é crescente (decrescente) se, e somente se, $A_n \subseteq A_{n+1}, \forall n \geq 1$ $(A_n \supseteq A_{n+1}, \forall n \geq 1)$.

Lema 1.9. *Se a sequência de conjuntos* $(A_n)_{n\geq 1}$ *é crescente (decrescente), então* $\lim A_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n$ $(\lim A_n = \bigcap_{n\geq 1} A_n)$.
Prova

Se $(A_n)_{n\geq 1}$ *é crescente,* $A_n \subseteq A_{n+1}, \forall n \geq 1$ *temos*

$$\liminf A_n = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k = \bigcup_{n\geq 1} A_n$$

e

$$\limsup A_n = \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k = \bigcup_{n\geq 1} A_n$$

Consequentemente $\lim_{n\uparrow\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n$

Se $(A_n)_{n\geq 1}$ *é decrescente, então* $(A_n^c)_{n\geq 1}$ *é crescente, e*

$$(\lim A_n)^c = \lim A_n^c = \bigcup_{n\geq 1} A_n^c = (\bigcap_{n\geq 1} A_n)^c$$

e portanto $\lim_{n\uparrow\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1} A_n$.

Email address: `bueno@ime.usp.br`

Departamento de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66281, CEP 05311-970, São Paulo, Brazil