MAT0105 – Geometria Analítica

Equações de Retas no Espaço

Profa. Ana Paula Jahn

anajahn@ime.usp.br

Determinação de uma reta

Uma reta pode ser determinada por:

1) **Dois pontos** distintos

   (Axioma da Geometria Euclidiana)

Obs. Para uma revisão de equação de reta no plano, ver vídeo-aula:

https://www.youtube.com/watch?v=bD-RMSP1db4

Determinação de uma reta

Uma reta pode ser determinada por:

1) **Dois pontos** distintos

(Axioma da Geometria Euclidiana)

2) **Um ponto** e sua **inclinação**

3) Intersecção de **dois planos secantes**

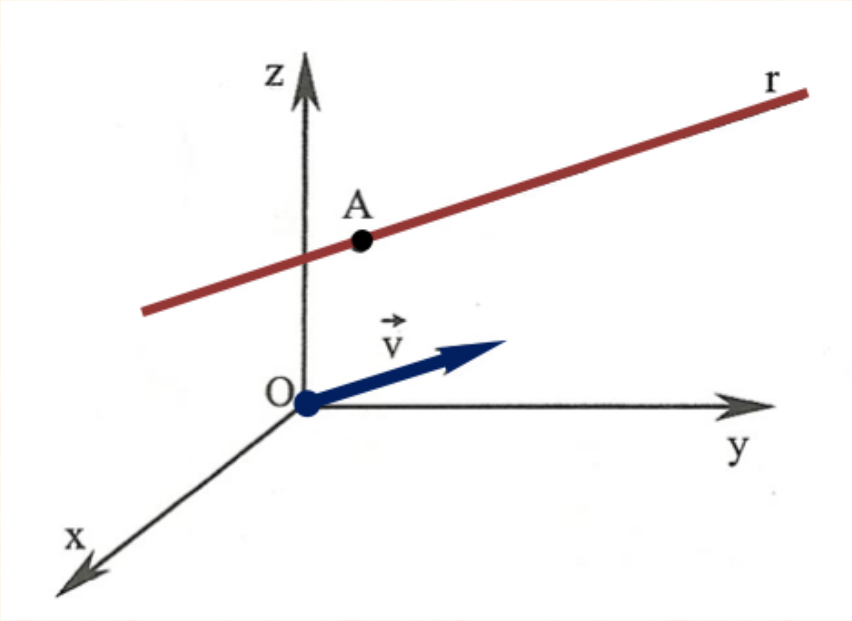
No caso 2), **<u>um vetor</u>** pode determinar

a **direção** da reta.

Determinação de uma reta

Dado um **ponto *A*** e um **vetor $\vec{v}$**

Existe **uma única reta *r*** que **passa por *A*** e tem direção do **vetor $\vec{v}$**



Determinação de uma reta

Dado um **ponto *A*** e um **vetor** $\vec{v}$

Existe **uma única reta *r*** que **passa por *A*** e tem direção do **vetor** $\vec{v}$

Um **ponto *P*** qualquer pertence à reta ***r*** se, e somente se:

(Vetorialmente falando...
qual a relação entre ***A***, ***P*** e $\vec{v}$?)

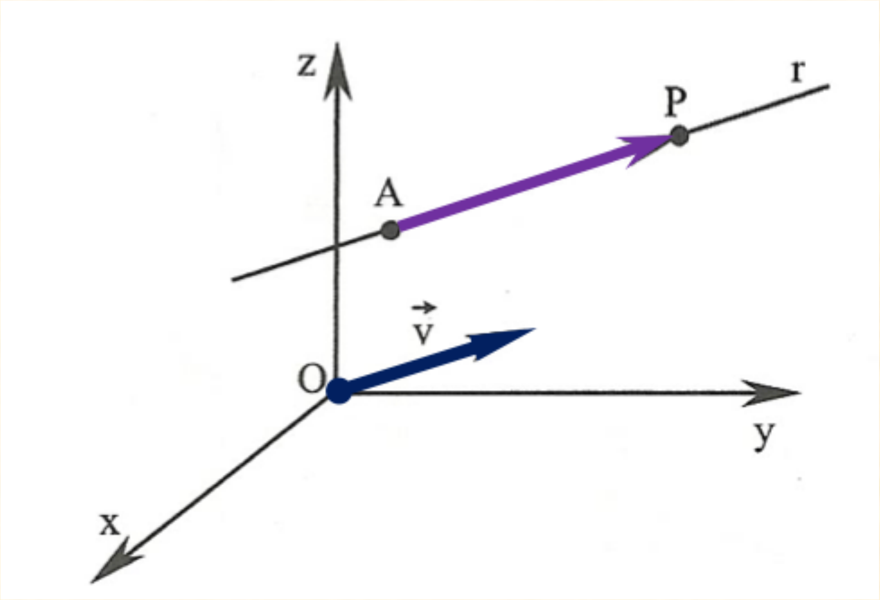
Determinação de uma reta

Dado um **ponto *A*** e um **vetor** $\vec{v}$

Existe **uma única reta *r*** que **passa por *A*** e tem direção do **vetor** $\vec{v}$

Um **ponto *P*** qualquer pertence à reta ***r*** se, e somente se:

$$\overrightarrow{AP} \parallel \vec{v}$$



Equação Vetorial da Reta

Dado um **ponto *A*** e um **vetor** $\vec{v}$

Existe **uma única reta *r*** que **passa por *A*** e tem direção do **vetor** $\vec{v}$

Um **ponto *P*** qualquer pertence à reta ***r*** se, e somente se:

$$\overrightarrow{AP} \parallel \vec{v}$$

Ou seja: $\overrightarrow{AP} = \lambda\,\vec{v},\ \lambda \in \mathbb{R}$

Equação VETORIAL da reta

Equações Vetorial da Reta

Dado um ponto $A = (x_0, y_0, z_0)$ e um vetor $\vec{v} = (a, b, c)$.
Um ponto $P = (x, y, z)$ qualquer pertence à reta *r* que passa por *A* e tem direção de $\vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \parallel \vec{v}$

$\overrightarrow{AP} = \lambda\,\vec{v},\ \lambda \in \mathbb{R}$

$P - A = \lambda\,\vec{v}$

$P = A + \lambda\,\vec{v}$

$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

Equação VETORIAL da reta

Exemplo: Equação Vetorial da Reta

A reta r que passa por A(1, -1, 4) e tem a direção de $\vec{v} = (2, 3, 2)$, tem equação vetorial.

$$r: (x, y, z) = (1, -1, 4) + t(2, 3, 2)$$

onde (x, y, z) representa um ponto qualquer de r.

Se quisermos obter as coordenadas de diversos pontos da reta r, basta atribuir números reais para o parâmetro t:

para $t = 2$, obtém-se $(x, y, z) = (1, -1, 4) + 2(2, 3, 2) = (5, 5, 8)$

e, portanto, $P_2(5, 5, 8) \in r$;

para $t = 3$, obtém-se o ponto $P_3(7, 8, 10)$;

para $t = 0$, obtém-se o próprio ponto A(1, -1, 4);

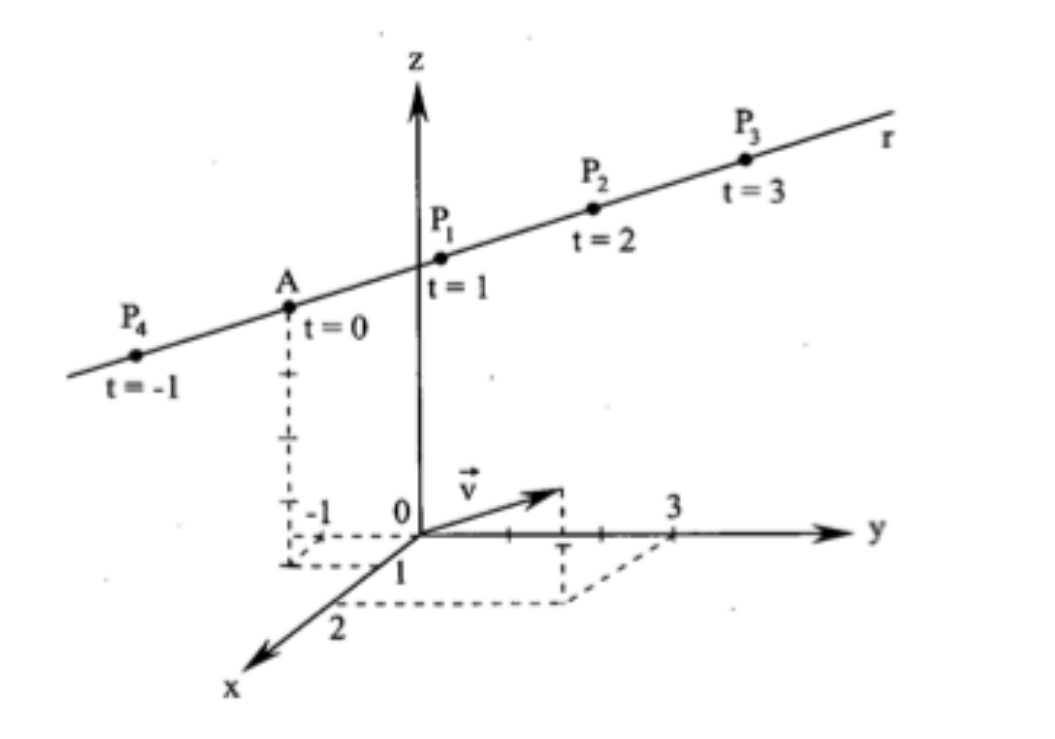
para $t = -1$, obtém-se o ponto $P_4(-1, -4, 2)$;

Exemplo: Equação Vetorial da Reta

A reta r que passa por A(1, -1, 4) e tem a direção de $\vec{v} = (2, 3, 2)$, tem equação vetorial.

$$r: (x, y, z) = (1, -1, 4) + t(2, 3, 2)$$

onde (x, y, z) representa um ponto qualquer de r.



Equações Paramétricas da Reta

Dado um ponto $A = (x_0, y_0, z_0)$ e um vetor $\vec{v} = (a, b, c)$.

A reta *r* que passa por *A* e tem direção de $\vec{v}$:

$\overrightarrow{AP} = \lambda\, \vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$P - A = \lambda\, \vec{v}$

$P = A + \lambda\, \vec{v}$

$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

$$r: \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Equações PARAMÉTRICAS da reta

Equações Simétricas da Reta

Dado um ponto $A = (x_0, y_0, z_0)$ e um vetor $\vec{v} = (a, b, c)$.

A reta *r* que passa por *A* e tem direção de $\vec{v}$:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Se $a, b, c \neq 0$, isolando λ:

$$\lambda = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Equações Simétricas da reta

Equações Reduzidas da Reta

Dado um ponto $A = (x_0, y_0, z_0)$ e um vetor $\vec{v} = (a, b, c)$.

A reta *r* passa por *A* e tem direção de $\vec{v}$:

Se $a, b, c \neq 0$:

$$\lambda = \frac{x - x_0}{a} \overset{\textbf{(I)}}{=} \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

(II)

Equações Reduzidas da Reta

Dado um ponto $A = (x_0, y_0, z_0)$ e um vetor $\vec{v} = (a, b, c)$.

A reta *r* passa por *A* e tem direção de $\vec{v}$:

Se $a, b, c \neq 0$, isolando λ:

$$\lambda = \frac{x - x_0}{a} \overset{\text{(I)}}{=} \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

(II)

(I) $b(x - x_0) = a(y - y_0)$

(II) $c(x - x_0) = a(z - z_0)$

$$r: \begin{cases} y = mx + p \\ z = m'x + p' \end{cases}$$

Equações Reduzidas da reta

Equações Reduzidas da Reta

Dado um ponto $A = (x_0, y_0, z_0)$ e um vetor $\vec{v} = (a, b, c)$.

A reta *r* passa por *A* e tem direção de $\vec{v}$:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Isola-se o parâmetro λ em uma delas, e substitui na outra:

$$r: \begin{cases} y = mx + p \\ z = m'x + p' \end{cases}$$

Equações Reduzidas da reta

Exemplo

Dado o ponto A(2, 3, -4) e o vetor $\vec{v} = (1, -2, 3)$, pede-se:

a) Escrever equações paramétricas da reta r que passa por A e tem a direção de $\vec{v}$.
b) Encontrar os dois pontos B e C de r de parâmetros t = 1 e t = 4, respectivamente.
c) Determinar o ponto de r cuja abscissa é 4.
d) Verificar se os pontos D(4, -1, 2) e E(5, -4, 3) pertencem a r.
e) Determinar para que valores de m e n o ponto F(m, 5, n) pertence a r.

a) De acordo com (5) temos imediatamente:

$$r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$$

b) Das equações acima tem-se:

$$\text{para } t = 1 \text{ vem } \begin{cases} x = 2 + (1) = 3 \\ y = 3 - 2(1) = 1 \\ z = -4 + 3(1) = -1 \end{cases} \qquad \therefore \quad B(3, 1, -1) \in r$$

$$\text{para } t = 4 \text{ vem } \begin{cases} x = 2 + (4) = 6 \\ y = 3 - 2(4) = -5 \\ z = -4 + 3(4) = 8 \end{cases} \qquad \therefore \quad C(6, -5, 8) \in r$$

Exemplo

Dado o ponto A(2, 3, -4) e o vetor $\vec{v} = (1, -2, 3)$, pede-se:

a) Escrever equações paramétricas da reta r que passa por A e tem a direção de $\vec{v}$.
b) Encontrar os dois pontos B e C de r de parâmetros t = 1 e t = 4, respectivamente.
c) Determinar o ponto de r cuja abscissa é 4.
d) Verificar se os pontos D(4, -1, 2) e E(5, -4, 3) pertencem a r.
e) Determinar para que valores de m e n o ponto F(m, 5, n) pertence a r.

c) Como o ponto tem abscissa 4 (x = 4), temos

$4 = 2 + t$ (1° equação de r) e, portanto, $t = 2$.

Como

$$t = 2 \Rightarrow \begin{cases} y = 3 - 2(2) = -1 \\ z = -4 + 3(2) = 2, \end{cases}$$

o ponto procurado é (4, -1, 2).

d) Um ponto pertence à reta r se existe um real t que satisfaz as equações de r.

Para D(4, -1, 2) as equações

$$\begin{cases} 4 = 2 + t \\ -1 = 3 - 2t \\ 2 = -4 + 3t \end{cases}$$

se verificam para t = 2 e, portanto, $D \in r$.

Exemplo

Dado o ponto A(2, 3, -4) e o vetor $\vec{v} = (1, -2, 3)$, pede-se:

a) Escrever equações paramétricas da reta r que passa por A e tem a direção de $\vec{v}$.
b) Encontrar os dois pontos B e C de r de parâmetros t = 1 e t = 4, respectivamente.
c) Determinar o ponto de r cuja abscissa é 4.
d) Verificar se os pontos D(4, -1, 2) e E(5, -4, 3) pertencem a r.
e) Determinar para que valores de m e n o ponto F(m, 5, n) pertence a r.

Para E(5, -4, -3) as equações

$$\begin{cases} 5 = 2 + t \\ -4 = 3 - 2t \\ -3 = -4 + 3t \end{cases}$$

não são satisfeitas para o mesmo valor de t (t = 3 satisfaz a primeira equação mas não as duas outras). Logo, $E \notin r$.

e) Como $F \in r$, as equações

$$\begin{cases} m = 2 + t \\ 5 = 3 - 2t \\ n = -4 + 3t \end{cases}$$ se verificam para algum real t.

Da equação 5 = 3 - 2t, vem t = -1 e, portanto,

$m = 2 + (-1) = 1$

$n = -4 + 3(-1) = -7$

Posições relativas de duas retas

Retas Paralelas $\begin{cases} \text{Coincidentes} \\ \text{Distintas} \end{cases}$

Concorrentes { Perpendiculares

Reversas { Ortogonais

Tarefa: 1) identificar as condições para cada posição acima
2) Fazer o exercícios da Lista 3.