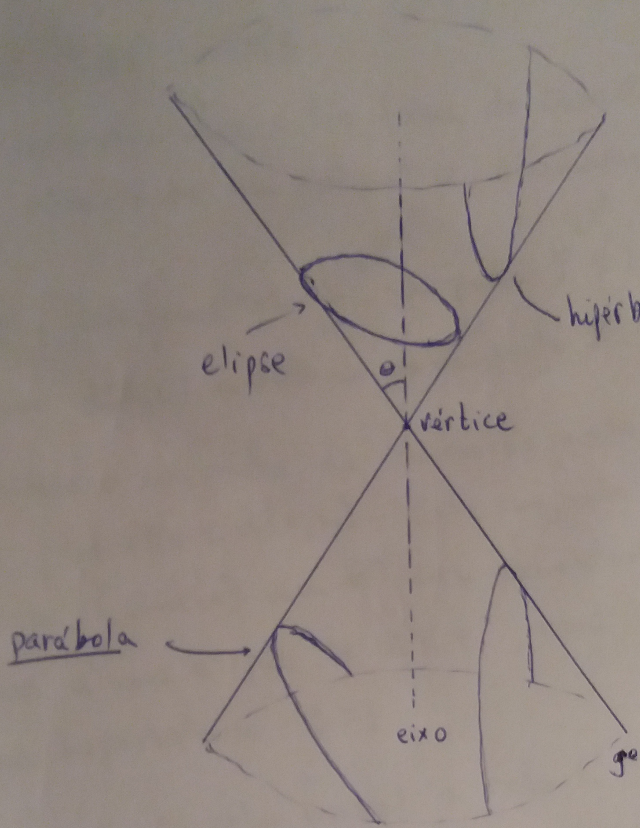
MAP2110 - Notas de aula e exercícios

Cônicas

Saulo R. M. Barros

Departamento de Matemática Aplicada - IME-USP

Cônicas



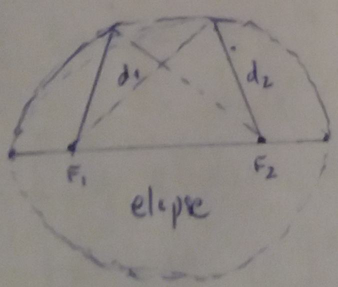
The Ice-cream cone proof.

(Esferas de Dandelin - 1822)

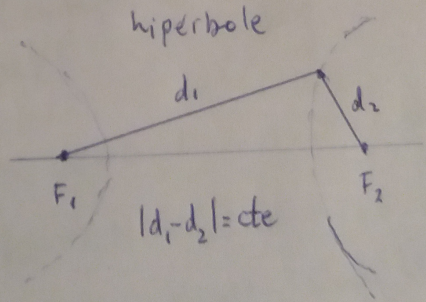
nonagon.org/ExLibris/dandelin-spheres-conic-sections

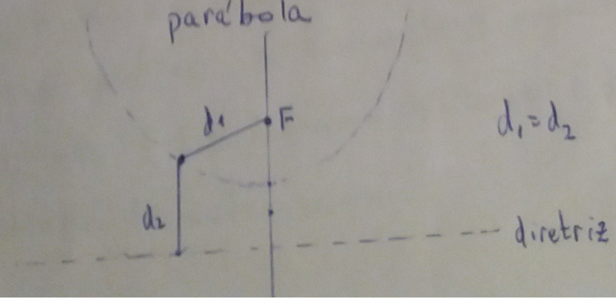
Seções Cônicas

Caracterizações das Cônicas e pontos focais



$d_1 + d_2 = cte$





$d_1 = d_2$

Cônicas e Excentricidade

Vamos apresentar uma outra forma de caracterizar as curvas cônicas, através de um parâmetro, chamado excentricidade.

Definição: Dada uma reta $L \in \mathbb{R}^2$, um ponto $F \overset{\in \mathbb{R}^2}{\notin} L$ e $e>0$.

Definimos $d(X,L)$ a distância de um ponto X à reta L.

Considere o conjunto de todos os pontos $X \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|X-F\| = e\, d(X,L)$. Este conjunto define uma curva (cônica) em $\mathbb{R}^2$ com excentricidade e.

A curva é uma elipse se $e<1$, uma parábola se $e=1$ e uma hipérbole se $e>1$.

Consideremos N vetor normal à reta L e P um ponto em L.

A distância de um ponto X à reta L é dada por:

$$d(X,L) = \frac{|(X-P).N|}{\|N\|}$$

Se tomarmos N unitário (ou seja, $\|N\|=1$) então

$$d(X,L) = |(X-P).N|$$

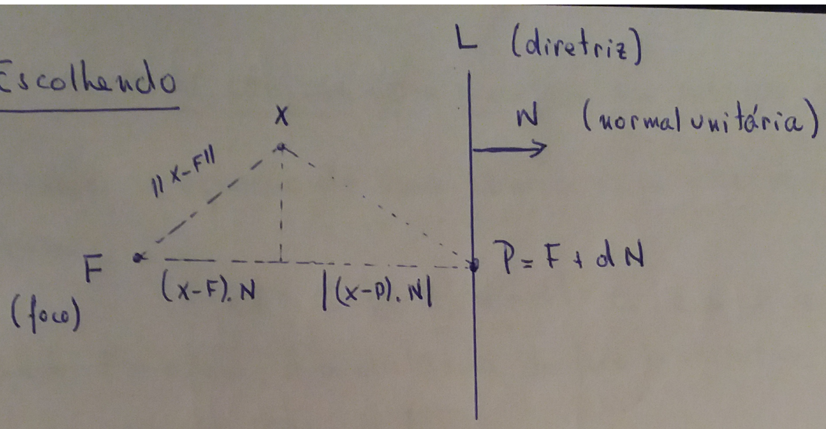
e a cônica é descrita como o conjunto dos $X \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\|X-F\| = e\,|(X-P).N|$$

A reta L divide o $\mathbb{R}^2$ em dois semi-planos. Onde $(X-P).N>0$ temos o semiplano positivo, e o semi-plano negativo onde $(X-P).N<$

Em L, $(X-P).N=0$ (Esta definição dos nomes é arbitrária e depende da escolha do vetor normal).

Escolhendo



Se definirmos $d = \|F-P\|$ então $(F-P).N = -d$

e $|(X-P).N| = |(X-F).N - d|$

Neste caso a cônica C é constituída de todo X tq.

$$\|X-F\| = e\,|(X-F).N - d|$$

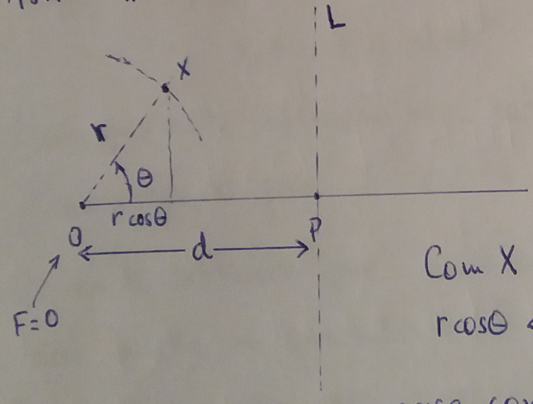
(Note que quando $e=1$ esta é exatamente a propriedade foc[o] da Parábola)

Se escolhermos o foco F na origem, a equação acima se torna:

$$\|X\| = e\,|X.N - d|$$

e posicionando os eixos de forma que $L = \{P + \lambda(0,1)\}$ e $N = (1,0)$, podemos adotar coordenadas polares r, θ ($(x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)$), $X = (r\cos\theta, r\sin$

Assim $\|X\| = r$ e $X.N = r\cos\theta$



A equação da cônica em coordenadas polares se escreve como:

$$r = e\,|r\cos\theta - d|$$

Com X à esquerda da diretriz (como na figura), $r\cos\theta < d$ e $|r\cos\theta - d| = d - r\cos\theta$

e a equação se escreve como $r = \dfrac{ed}{1 + e\cos\theta}$

Se X estiver à direita da reta diretriz, $r\cos\theta > d$ e a equação é $r = \dfrac{ed}{e\cos\theta - 1}$

(Note que como $r>0$, $e>0$ e $d>0$, este último caso só ocorre se $e>1$). Ou seja, só há pontos dos dois lados da diretriz no caso da hipérbole.

Equacionando as cônicas com simetria em relação à origem.

Escrevemos a equação de uma cônica com excentricidade e na forma:

$$\|X-F\| = e\,|(X-F).N - d| = e\,|X.N - F.N - d| = |eX.N - a|$$

onde F é o foco, d a distância do foco à diretriz L e definimos

$$a = e F.N + ed$$

Elevando ao quadrado a equação da cônica, obtemos:

$$\|X\|^2 - 2X.F + \|F\|^2 = e^2(X.N)^2 - 2ea\,X.N + a^2$$

A curva apresenta simetria em relação à origem se X sendo um ponto da curva, $-X$ também for.

Para que tal aconteça, a equação acima deve também ser satisfeita por $-X$. Substituindo:

$$\|X\|^2 + 2X.F + \|F\|^2 = e^2(X.N)^2 + 2ea\,X.N + a^2$$

Subtraindo uma equação da outra obtemos:

$$X.F = ea\,X.N \qquad \text{ou} \qquad (F - eaN).X = 0$$

Para que esta equação seja satisfeita para todo X na curva é necessário que $F = eaN$ e portanto $F.N = ea$ de onde obtemos que $a = e^2a + ed$. Note que se $e=1$, não existe a que satisfaça esta relação, uma vez que $d>0$. Isto mostra que para a parábola, não podemos ter simetria em relação à origem. Além disso, se $e<1 \to a = \frac{ed}{1-e^2} > 0$ e se $e>1$, $a<0$. Tomando $F = eaN$ a cônica é então descrita pela equação

$$\|X\|^2 + e^2a^2 = e^2(X.N)^2 + a^2$$

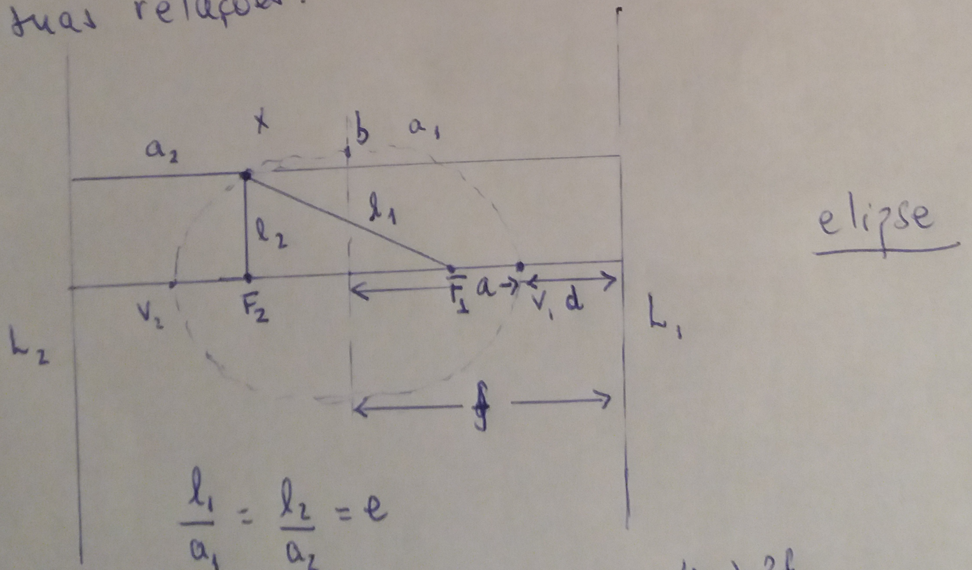
Devido à simetria, tanto a elipse como a hipérbole têm dois focos, simétricos em relação à origem, bem como duas retas diretrizes, também simétricas. Note que os valores

$X = \pm a N$ pertencem às curvas. Estes são os vértices.

O segmento que os une é o eixo maior (ou principal) no caso da elipse e o eixo transversal, no caso da hipérbole.

Se N' for um vetor unitário, ortogonal a N $(N.N'=0)$ e $X = bN'$ pertencer à cônica $(X.N=0)$ então $b^2 + e^2a^2 = a^2$, que só tem solução caso $e<1$, ou seja, para a elipse. O segmento ligando bN' a $-bN'$ é o eixo menor da elipse.

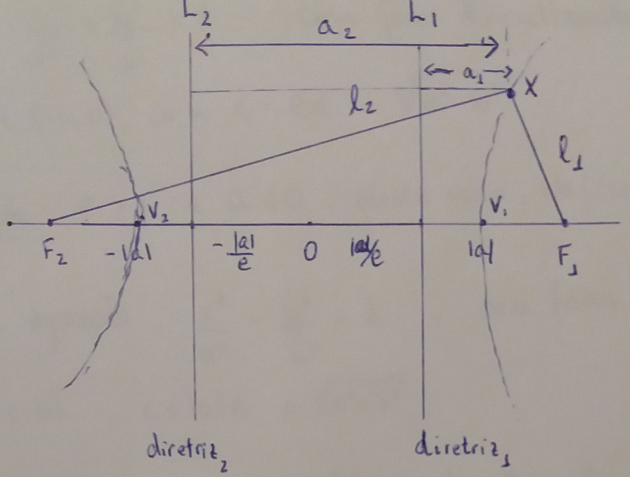
Vamos agora relacionar as definições das cônicas através da excentricidade com as distâncias em relação aos focos e suas relações.



$$\frac{l_1}{a_1} = \frac{l_2}{a_2} = e$$

Portanto, $l_1 + l_2 = (a_1 + a_2)\, e = \overset{2(d+a)=2f}{\cancel{\ldots}} = \text{constante}$

Hipérbole (Simétrica em relação à origem).



$L_1 = \left(\frac{|a|}{e}, y\right)$ $\qquad \frac{\|X-F\|}{d(X,L)} = e$ $\qquad V_1 = (|a|,0) \quad V_2 = (-|a|, 0)$

$L_2 = \left(-\frac{|a|}{e}, y\right)$ $\qquad F_1 = (c,0) = (e|a|, 0) \quad F_2 = (-e|a|, 0)$

$$\frac{\|X-F_1\|}{d(X,L_1)} = e = \frac{l_1}{a_1} = e = \frac{l_2}{a_2} = \frac{\|X-F_2\|}{d(X,L_2)}$$

$$\|X-F_2\| - \|X-F_1\| = l_2 - l_1 = a_2 e - a_1 e = (a_2 - a_1)e = e\, d(L_1, L_2)$$

$e\,d(L_1,L_2)$ é constante, independente de X.

Equações no plano cartesiano (x,y).

A equação das cônicas com simetria em relação à origem:

$$\|X\|^2 + e^2a^2 = e^2(X.N)^2 + a^2 \qquad , \text{com } 0 < e \neq 1$$

quando tomamos $N = (1,0)$, $X = (x,y)$ leva à equação:

$$x^2 + y^2 + e^2a^2 = e^2x^2 + a^2$$

rearranjando, $x^2(1-e^2) + y^2 = a^2(1-e^2)$

e portanto: $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

que é a forma padrão para as equações da elipse e hipérbole.

No caso da elipse, $e<1$ e $a>0$. Definindo $b = a\sqrt{1-e^2}$, temos a equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, com focos localizados nos pontos $(c,0)$ e $(-c,0)$ com $c = ea = \sqrt{a^2-b^2}$

Para a hipérbole, $e>1$ e $a<0$. Neste caso, definimos $b = |a|\sqrt{e^2-1}$

e temos a equação $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, com focos em $(c,0)$ e $(-c,0)$, $c = |a|e = \sqrt{a^2+b^2}$.

A hipérbole, escrita como y em função de x, leva a:

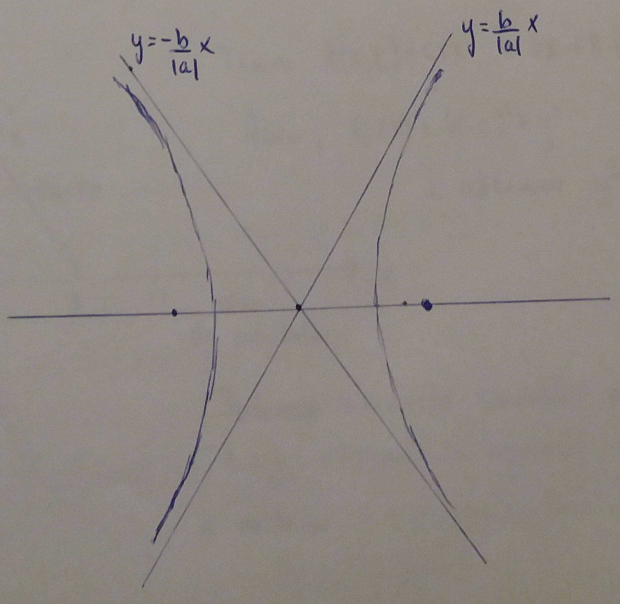
$$y = \pm \frac{b}{|a|}\sqrt{x^2-a^2}$$

Vejamos o comportamento da curva quando $x \to \infty$.

Como então, $x >> a$ $\quad y \to \pm \dfrac{bx}{|a|}$

$$\left(\text{Veja que } \frac{b}{|a|}\left(x - \sqrt{x^2-a^2}\right) = \frac{b}{|a|}\left(\frac{x^2 - x^2 + a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right) = \frac{|a|b}{x+\sqrt{x^2-a^2}} < \frac{|a|b}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0 \right)$$

Isto mostra que as retas $y = \pm \dfrac{b}{|a|}x$ são assíntotas da hipérbole.



Outras formas de escrever as cônicas:

Se na equação com simetria em relação à origem

$$\|X\|^2 + e^2a^2 = e^2(X.N)^2 + a^2$$

escolhermos $N=(0,1)$ então $X.N = y$

e temos a equação $x^2+y^2+e^2a^2 = e^2y^2+a^2$

e rearranjando, $\dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{a^2(1-e^2)} = 1$ (onde basicamente trocamos o papel de x e y)

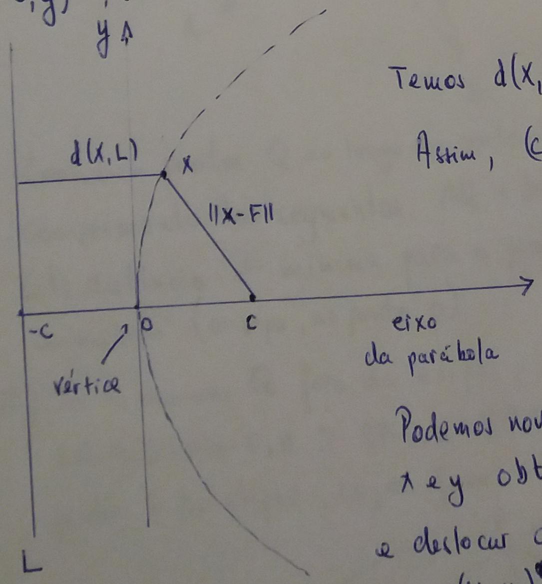
Caso queiramos "centrar" a cônica em um ponto $X_0=(x_0,y_0)$ fora da origem, basta transladar a cônica, que então fica:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} + \frac{(x-x_0)^2}{a^2(1-e^2)} = 1 \quad \left(\text{ou } \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2(1-e^2)} = 1 \right)$$

A parábola:

Vimos que se $e=1$ não há curva cônica com simetria em relação à origem.

Voltemos à definição. Se tomarmos o foco $F=(c,0)$ e a diretriz $L=(-c,y)$, teremos o vértice na origem.



Temos $d(X,L) = c+x$ e $\|X-F\| = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$

Assim, $(c+x)^2 = (x-c)^2+y^2$

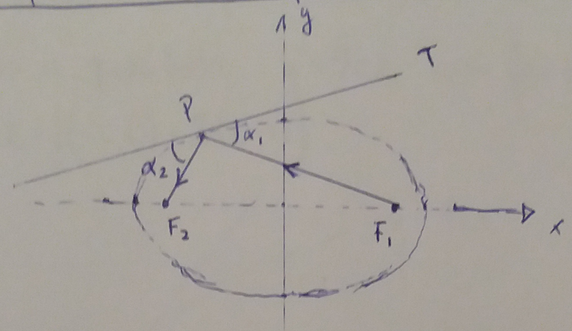
e obtemos $y^2 = 4cx$

Podemos novamente inverter os papéis de x e y obtendo a equação $x^2 = 4cy$ $\left(y = \dfrac{x^2}{4c}\right)$ e deslocar a origem:

$$(y-y_0) = \frac{(x-x_0)^2}{4c}.$$

Focos e propriedades de Reflexão nas cônicas

a) Elipse

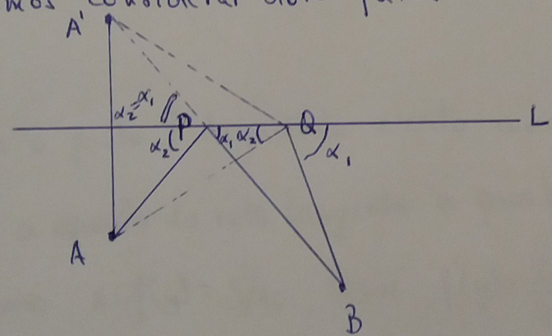


Um raio de luz lançado de um foco da elipse refletido em qquer ponto da elipse retorna ao outro foco.

Dem: temos que mostrar que os ângulos α_1 e α_2 são iguais, coincidindo com os ângulos da luz incidente e refletida na reta tangente ao ponto em que o raio incide.

Para tal vamos considerar dois fatos:

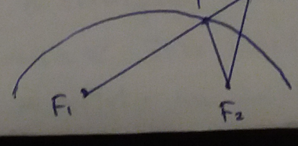
(i)



Considere pontos Q ao longo da reta L e a soma do comprimento dos segmentos AQ e BQ $= \|A-Q\| + \|Q-B\|$

Esta distância é mínima para o ponto onde os ângulos α_1 e α_2 coincidem (ou seja, no ponto p).

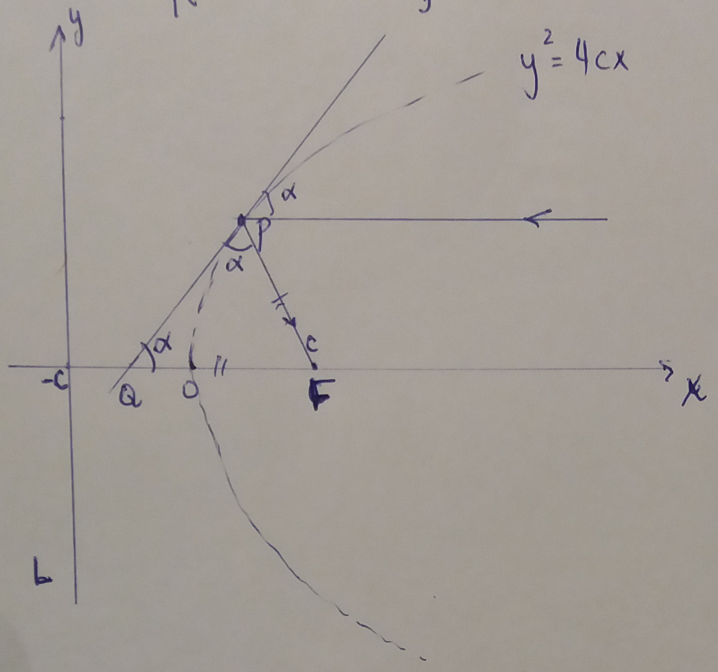
(ii) Se tomarmos Q fora da elipse, a soma das distâncias $\|Q-F_1\| + \|Q-F_2\| > \|P-F_1\| + \|P-F_2\| = cte$, para qualquer ponto P da elipse, cujos focos são F_1 e F_2.



De (ii) temos que dentre todos os pontos da reta tangente T, P é o que minimiza a soma das distâncias aos Focos F_1 e F_2. De (i) obtemos que α_1 e α_2 são iguais!

Ângulo de Reflexão para a Parábola:

Consideremos a parábola $y^2 = 4cx$ com foco $F = (c,0)$ e diretriz $L = \{(-c,0) + s(0,1)\}$



Consideremos o ponto P da parábola escrito como $P = (ct^2, 2ct)$

Vamos escrever a equação da reta tangente à parabola no ponto P.

Se escrevermos $x = f(y) = y^2/4c$ temos $f'(y) = \frac{2y}{4c} = y/2c$.

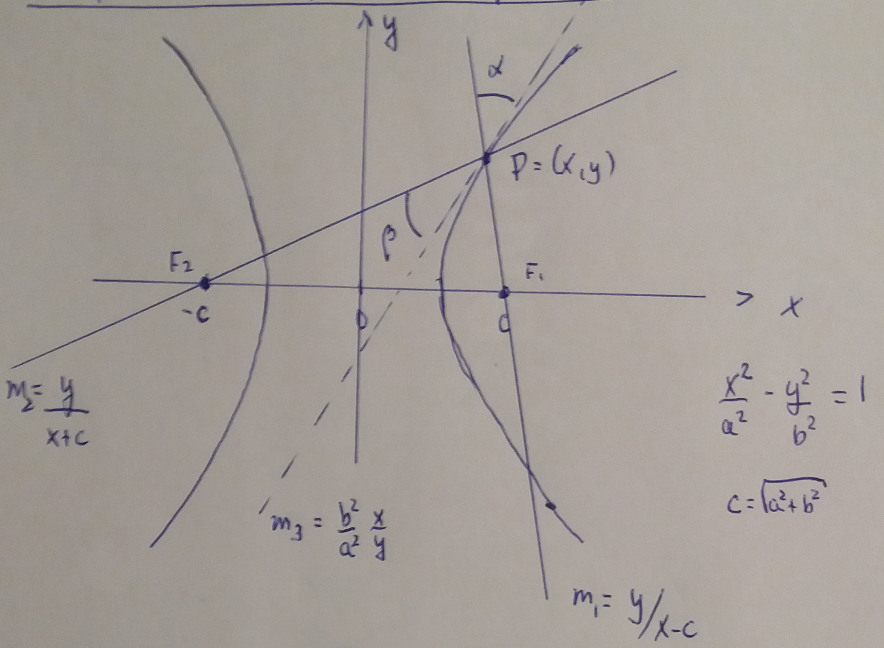
A reta que tangencia a parábola em um ponto x_0, y_0 é dada por $x - x_0 = (y - y_0) f'(y_0)$

Tomando $(x_0, y_0) = P = (ct^2, 2ct)$ obtemos $x - ct^2 = (y - 2ct)\frac{2ct}{2c}$ e portanto $x = ty - ct^2$. Assim, o ponto Q em que a tangente intercepta o eixo é $Q = (-ct^2, 0)$. Mostremos que $\|P-F\| = \|Q-F\|$.

$\|P-F\| = \sqrt{(ct^2-c)^2 + (2ct)^2} = \sqrt{c^2t^4 - 2c^2t^2 + c^2 + 4c^2t^2} = \sqrt{c^2t^4 + 2c^2t^2 + c^2} = \sqrt{(ct^2+c)^2} = ct^2 + c$

$\|Q-F\| = c + ct^2$. Assim o triângulo PQF é isósceles com os ângulos $\hat{QPF}$ e $\hat{FQP}$ iguais a α. Isto mostra que qualquer raio paralelo ao eixo x ao se refletir na parábola passa pelo foco F. !

Propriedade de Reflexão - Hipérbole



Escrevendo $y = y(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \longrightarrow \sqrt{x^2-a^2} = \frac{ay}{b}$

temos $y'(x) = \frac{bx}{a}\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y} = m_3$

Os coeficientes angulares são as tangentes dos angulos formados pelas retas com o eixo x. Para calcular α e β (na verdade queremos mostrar que α = β), vamos usar a seguinte relação trigonométrica: ~~tan(θ)~~

$$\tan(\theta_1-\theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2} \qquad (\text{se } \theta_1 > \theta_2)$$

Assim, $\tan\alpha = \frac{m_1 - m_3}{1+m_1 m_3} = \dfrac{\frac{y}{x-c} - \frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}}{1 + \frac{\cancel{y}}{x-c}\cdot\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{\cancel{y}}}$ $\qquad \tan\beta = \frac{m_3 - m_2}{1+m_2 m_3} = \dfrac{\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y} - \frac{y}{x+c}}{1+\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}\frac{y}{x+c}}$

$$= \frac{a^2 y \cancel{(x-c)}}{\cancel{a^2} y(x-c)}\left(\frac{a^2y^2 - b^2x(x-c)}{a^2y(x-c)+b^2xy}\right) = \qquad = \frac{b^2x(x+c) - y^2a^2}{a^2y(x+c)+b^2xy}$$

Então $\tan\alpha = \tan\beta \longleftrightarrow \left(a^2y^2 - b^2x(x-c)\right)\left(a^2y(x+c)+b^2xy\right) = \left(b^2x(x+c) - y^2a^2\right)\left(a^2y(x-c)+b^2xy\right)$

$\longleftrightarrow a^4y^3x + \cancel{a^4y^3c} + a^2y^3b^2x - b^2a^2x^3y + \cancel{b^2a^2x^2cy} - b^2a^2\cancel{x^2}cy + b^2a^2c^2xy - b^4x^3y + \cancel{b^4x^2cy} =$

$b^2a^2x^3y - b^2a^2xyc^2 + b^4x^3y + \cancel{b^4x^2cy} - b^2a^2xy^3 - a^4y^3x + \cancel{a^4y^3c}$

$\longleftrightarrow xy^3(2a^4 + 2a^2b^2) + x^3y(-2a^2b^2 - 2b^4) + 2a^2b^2c^2xy = 0$

$\longleftrightarrow y^2(a^4+a^2b^2) - x^2(a^2b^2+b^4) + a^2b^2c^2 = 0$

$\longleftrightarrow y^2a^2(a^2+b^2) - x^2b^2(a^2+b^2) + a^2b^2c^2 = 0$

$\longleftrightarrow y^2a^2c^2 - x^2b^2c^2 + a^2b^2c^2 = 0$

$\longleftrightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} + 1 = 0$

$\longleftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$