# CAPÍTULO 4
# PRODUTOS

*Nos capítulos anteriores os conceitos foram introduzidos para duas regiões geométricas também chamadas de Espaços Vetorias: o **Plano Geométrico**, representado pelo $\Re^2$ (sistema de coordenadas cartesianas no plano) e o **Espaço Geométrico**, representado pelo $\Re^3$ (sistema de coordenadas cartesianas no espaço). No entanto, os próximos conceitos que serão introduzidos só tem significado geométrico para vetores no Espaço ($\Re^3$). Apesar de alguns serem válidos também para vetores no plano, mas nem todos. Portanto, no que segue estaremos considerando somente vetores no espaço. Oportunamente, quando for o caso, voltaremos a considerar os vetores definidos no plano geométrico.*

## 1 Produto Escalar

**Definição:** Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. O produto escalar entre esses vetores, denotado por $\vec{u}\cdot\vec{v}$, é um número real determinado por $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$, onde $0 \le \theta \le \pi$ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

**Propriedades**

1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ se, e somente se, um deles for o vetor nulo ou se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais, ou seja, $\theta = 90°$.

2) Comutativa: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

3) $\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|^2$

4) $(m\vec{u})\cdot(n\vec{v}) = (m\cdot n)\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v}),\ \forall m,n \in \Re$

5) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$

### 1.1 Expressão Cartesiana do Produto Escalar

Sejam $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, dois vetores do $\Re^3$. Por definição temos: $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$. Pela lei dos cossenos temos:

$\cos\theta = \dfrac{|\vec{u}+\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2}{2|\vec{u}||\vec{v}|}$. Substituindo, temos:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\frac{|\vec{u}+\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2}{2|\vec{u}||\vec{v}|} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{|\vec{u}+\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2}{2} \Rightarrow$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(z_1+z_2)^2-(x_1^2+y_1^2+z_1^2)-(x_2^2+y_2^2+z_2^2)}{2}\Rightarrow$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)+(y_1^2+2y_1y_2+y_2^2)+(z_1^2+2z_1z_2+z_2^2)-(x_1^2+y_1^2+z_1^2)-(x_2^2+y_2^2+z_2^2)}{2}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{(x_1^2+y_1^2+z_1^2)+(x_2^2+y_2^2+z_2^2)+2(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)-(x_1^2+y_1^2+z_1^2)-(x_2^2+y_2^2+z_2^2)}{2}$$

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}$$

**Exemplo (1):** Sejam $\vec{u}=(-2,3,8), \vec{v}=(0,2,-1)$ e $\vec{w}=(1,-2,1)$.

a) Determine $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

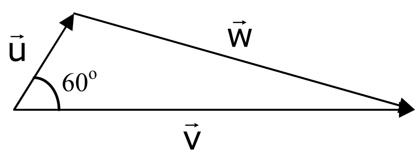
b) Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são ortogonais?

**Solução:**

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2\cdot 0+3\cdot 2+8\cdot(-1)=0+6-8=-2 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=-2$

b) Para que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$ sejam ortogonais é necessário que $\vec{u}\cdot\vec{w}=0$. De fato, $\vec{u}\cdot\vec{w}=-2\cdot 1+3\cdot(-2)+8\cdot 1=-2-6+8=0$.

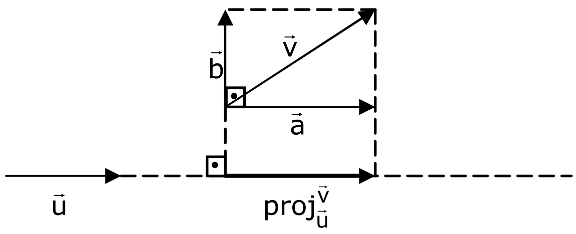
**Exemplo (2):** Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, com $\left|\vec{u}\right|=4$ e $\left|\vec{v}\right|=15$, determinam o triângulo abaixo. Determine o produto escalar entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$.




**Solução:** Pela figura temos que $\vec{u}+\vec{w}=\vec{v}$ e o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\theta=60^o$. Multiplicando escalarmente pelo vetor $\vec{u}$ ambos o lado desta igualdade vem que: $\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}$. Aplicando a definição do produto escalar e suas propriedades temos: $\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{w}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\theta \Rightarrow \left|\vec{u}\right|^2+\vec{u}\cdot\vec{w}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\theta \Rightarrow$ $\vec{u}\cdot\vec{w}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos 60^o-\left|\vec{u}\right|^2 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{w}=4\cdot 15\cdot\frac{1}{2}-4^2 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{w}=14$

## 1.2 Interpretação Geométrica do Módulo do Produto Escalar

Sejam dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sendo $|\vec{u}|=1$, ou seja, $\vec{u}$ é um versor. Sejam ainda, $\vec{a}$ e $\vec{b}$ ortogonais entre si, com $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$. Vamos projetar o vetor $\vec{v}$ na direção do vetor $\vec{u}$.




Na figura acima, temos que a projeção do vetor $\vec{v}$ na direção do vetor $\vec{u}$ é denotada por $proj_{\vec{u}}^{\vec{v}}$, a qual é igual ao vetor $\vec{a} = proj_{\vec{u}}^{\vec{v}}$. Como $\vec{a}$ é paralelo a $\vec{u}$, então $\vec{a} = \alpha\vec{u}$. Sendo $\vec{b}$ é ortogonal a $\vec{u}$, então $\vec{b} \cdot \vec{u} = 0$. Multiplicando escalarmente por $\vec{u}$ a expressão $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ temos: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \alpha \cdot (\vec{u} \cdot \vec{u}) + \vec{b} \cdot \vec{u}$. Então $\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2}$. Logo:

$\vec{a} = proj_{\vec{u}}^{\vec{v}} = \alpha \cdot \vec{u} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{1^2} \cdot \vec{u} \Rightarrow proj_{\vec{u}}^{\vec{v}} = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{u}$. Portanto, $\left|proj_{\vec{u}}^{\vec{v}}\right| = \left|(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{u}\right| = \left|\vec{u} \cdot \vec{v}\right| \cdot \left|\vec{u}\right|$

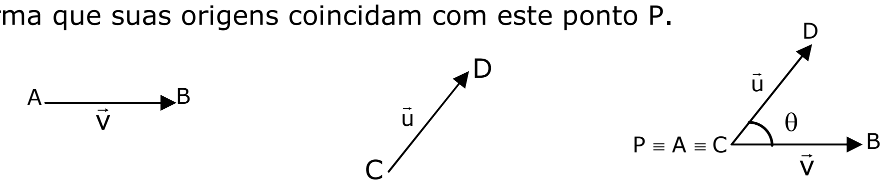
$\Rightarrow \left|proj_{\vec{u}}^{\vec{v}}\right| = \left|\vec{u} \cdot \vec{v}\right|$.

Isso significa que o produto escalar, em módulo, entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, é o tamanho da projeção do vetor $\vec{v}$ na direção do versor $\vec{u}$.

Para dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, quaisquer, podemos definir a expressão da projeção de um vetor na direção do outro como sendo: $proj_{\vec{u}}^{\vec{v}} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2} \cdot \vec{u}$. Note que o resultado desta expressão é um vetor, o qual é a projeção do vetor $\vec{v}$ na direção do vetor $\vec{u}$.

### 1.3 Ângulo entre dois vetores

O ângulo entre dois vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, não nulos, é o ângulo $\theta = ang(\vec{u}, \vec{v}) = B\hat{P}D$ entre os segmentos orientados que representam os vetores, com a restrição $0^o \leq \theta \leq 180^o$, quando os vetores são transportados para um ponto P, de tal forma que suas origens coincidam com este ponto P.



Podemos determinar o ângulo $\theta$ entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ através da expressão do produto escalar. Da expressão $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$ segue que $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$.

Logo, $\theta = \arccos\left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)$.

**Exemplo (3):** Dados os vetores $\vec{u} = (2,-1,3)$ e $\vec{v} = (-2,1,2)$. Determine:

a) O ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

b) A projeção do vetor $\vec{u}$ na direção do vetor $\vec{v}$.

**Solução:**

a) $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{2\cdot(-2)+(-1)\cdot 1+3\cdot 2}{\sqrt{4+1+9}\cdot\sqrt{4+1+4}} = \dfrac{-4-1+6}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3\sqrt{14}} = \dfrac{\sqrt{14}}{42}$.

Como $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{14}}{42}$, o ângulo $\theta$ não é um arco notável. Então, $\theta = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{14}}{42}\right)$.

b) $\text{proj}_{\vec{v}}^{\vec{u}} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\cdot\vec{v} \Rightarrow \text{proj}_{\vec{v}}^{\vec{u}} = \dfrac{-4-1+6}{4+1+4}\cdot(-2,1,2) = \dfrac{1}{9}\cdot(-2,1,2)$.

Portanto: $\text{proj}_{\vec{v}}^{\vec{u}} = \left(-\dfrac{2}{9},\dfrac{1}{9},\dfrac{2}{9}\right)$.

**Exemplo (4):** Determine um vetor unitário e ortogonal aos vetores $\vec{u} = (3,1,-1)$ e $\vec{v} = (-1,1,1)$.

**Solução:** Seja $\vec{w} = (x,y,z)$. Como $\vec{w}$ é unitário, então $|\vec{w}| = 1$. Como $\vec{w}$ é ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, tem-se: $\vec{w}\cdot\vec{u} = 0$ e $\vec{w}\cdot\vec{v} = 0$. De onde vem:

$\vec{w}\cdot\vec{u} = 0 \Rightarrow (x,y,z)\cdot(3,1,-1) = 0 \Rightarrow 3x+y-z = 0$

$\vec{w}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow (x,y,z)\cdot(-1,1,1) = 0 \Rightarrow -x+y+z = 0$

$\begin{cases} 3x+y-z=0 \\ -x+y+z=0 \end{cases}$. Da primeira equação vem que $z = 3x+y$ (*). Substituindo na segunda equação temos que $-x+y+3x+y = 0 \Rightarrow x = -y$. Substituindo $x = -y$ em (*) vem que $z = 3(-y)+y \Rightarrow z = -2y$.

$|\vec{w}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(-y)^2+y^2+(-2y)^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{6y^2} = 1 \Rightarrow y = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. Fazendo:

para $y = +\dfrac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ z=-2y \Rightarrow z = -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases} \Rightarrow \vec{w} = \left(-\dfrac{\sqrt{6}}{6},\dfrac{\sqrt{6}}{6},-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ ou

para $y = -\dfrac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \Rightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{6} \\ z=-2y \Rightarrow z = \frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases} \Rightarrow \vec{w} = \left(\dfrac{\sqrt{6}}{6},-\dfrac{\sqrt{6}}{6},\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$

**Exemplo (5):** Determine um vetor $\vec{u}$ tal que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} = 1$ e $|\vec{u}| = \sqrt{22}$, onde $\vec{v} = (1,1,0)$ e $\vec{w} = (2,1,-1)$.

**Solução:** Seja $\vec{u} = (x, y, z)$. Então: $\vec{u} \cdot \vec{v} = (x, y, z) \cdot (1,1,0) = 1 \Rightarrow x + y = 1$ e $\vec{u} \cdot \vec{w} = (x, y, z) \cdot (2,1,-1) = 1 \Rightarrow 2x + y - z = 1$. Daí vem que: $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$. Da primeira equação vem que $x = 1 - y$ (*). Substituindo na segunda equação temos que $2(1 - y) + y - z = 1 \Rightarrow z = 1 - y$. Como $|\vec{u}| = \sqrt{22} \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{22}$ $\Rightarrow \sqrt{(1 - y)^2 + y^2 + (1 - y)^2} = \sqrt{22} \Rightarrow \sqrt{3y^2 - 4y + 2} = \sqrt{22} \Rightarrow 3y^2 - 4y - 20 = 0$.

Resolvendo a equação do 2º grau determinamos as suas raízes $y = -2$ e $y' = \frac{10}{3}$.

Fazendo:

para $y = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - y \Rightarrow x = 3 \\ z = 1 - y \Rightarrow z = 3 \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = (3,-2,3)$ ou

para $y' = \frac{10}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - y \Rightarrow x = -\frac{7}{3} \\ z = 1 - y \Rightarrow z = -\frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \left(-\frac{7}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{7}{3}\right)$.

**Exercícios Propostos:**

1) Determine a projeção do vetor $\vec{u} = (-2,3,1)$ na direção do vetor $\vec{v} = (1,1,2)$.

Resp: $\text{proj}_{\vec{v}}^{\vec{u}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$

2) Sejam os vetores $\vec{a} = (1,-m,-3)$, $\vec{b} = (m + 3, 4 - m, 1)$ e $\vec{c} = (m,-2,7)$. Determine m para que seja verdadeira a expressão $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Resp: m = 2

3) Dados $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 3$ e $\vec{w}$ um vetor unitário com: $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v}$, o ângulo entre $(\vec{u}, \vec{w})$ é $\frac{\pi}{3}$ e o ângulo entre $(\vec{v}, \vec{w})$ é $\frac{2\pi}{3}$, calcule $|\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}|^2$. Resp: 33

4) Dados $\vec{u} = (-1,2,-3)$ e $\vec{w} = (2,1,-1)$, determine os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tais que: $\vec{a} // \vec{w}$, $\vec{b} \perp \vec{w}$ e $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$. Resp: $\vec{a} = \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e $\vec{b} = \left(-2, \frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

5) Os módulos dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são, respectivamente, 4 e 2. O ângulo entre eles é 60°. Calcule o ângulo entre os vetores $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$. Resp: $\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{21}}{7}\right)$

6) Demonstre, vetorialmente, o Teorema de Pitágoras.

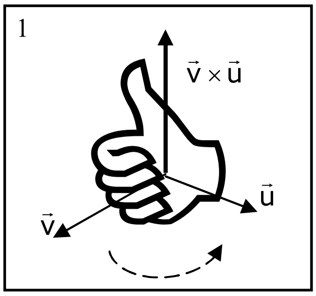
## 2 Produto Vetorial

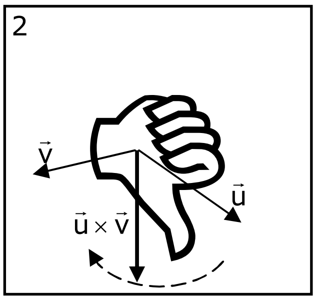
**Definição:** Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. O produto vetorial entre esses vetores, denotado por $\vec{u}\times\vec{v}$, é um vetor com as seguintes características:

i) Módulo: $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot \operatorname{sen}\theta$, onde $\theta$ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

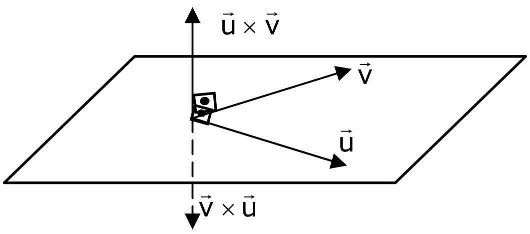
ii) Direção: normal ao plano que contém $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

iii) Sentido: regra da mão direita.




A regra da mão direita diz, no quadro 1, que com a palma da mão estendida na direção e sentido do vetor $\vec{v}$, fechado os dedos na direção do vetor $\vec{u}$ (linha tracejada), o polegar ficará apontado para cima, indicando o sentido de $\vec{v}\times\vec{u}$. No quadro 2, com a palma da mão estendida na direção e sentido do vetor $\vec{u}$, fechando os dedos na direção do vetor $\vec{v}$, o polegar ficará apontado para baixo, indicando o sentido de $\vec{u}\times\vec{v}$. Podemos notar que $\vec{v}\times\vec{u} = -\vec{u}\times\vec{v}$. Portanto:




**Propriedades**

1) $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ se, e somente se, um deles é o vetor nulo ou se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção. Consequentemente $\vec{u}\times\vec{u}=\vec{0}$.

2) Anti-comutativa: $\vec{u}\times v = -\vec{v}\times\vec{u}$ (não vale a comutativa: $\vec{u}\times v \neq \vec{v}\times\vec{u}$)

3) $(m\vec{u})\times(n\vec{v}) = (m\cdot n)\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$

4) Distributiva $\begin{cases} \text{a direita: } & (\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w} = \vec{u}\times\vec{w}+\vec{v}\times\vec{w} \\ \text{a esquerda: } & \vec{w}\times(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{w}\times\vec{u}+\vec{w}\times\vec{v} \end{cases}$

5) Duplo Produto Vetorial: $\begin{cases}(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u}\\ \vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}\end{cases}$

## 2.1 Expressão Cartesiana do Produto Vetorial

Sejam $\vec{u}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ e $\vec{v}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, dois vetores do $\Re^3$. Temos que: (*): $\begin{cases}\vec{i}\times\vec{j}=-\vec{j}\times\vec{i}=\vec{k}\\ \vec{j}\times\vec{k}=-\vec{k}\times\vec{j}=\vec{i}\\ \vec{k}\times\vec{i}=-\vec{i}\times\vec{k}=\vec{j}\end{cases}$. Então: $\vec{u}\times\vec{v}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\times(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})$.

Aplicando a propriedade distributiva, teremos:

$$\vec{u}\times\vec{v}=(x_1x_2)(\vec{i}\times\vec{i})+(x_1y_2)(\vec{i}\times\vec{j})+(x_1z_2)(\vec{i}\times\vec{k})+$$
$$(y_1x_2)(\vec{j}\times\vec{i})+(y_1y_2)(\vec{j}\times\vec{j})+(y_1z_2)(\vec{j}\times\vec{k})+(z_1x_2)(\vec{k}\times\vec{i})+(z_1y_2)(\vec{k}\times\vec{j})+(z_1z_2)(\vec{k}\times\vec{k})$$

Da definição de produto vetorial e de (*), tem-se:

$$\vec{u}\times\vec{v}=(x_1x_2)(\vec{0})+(x_1y_2)(\vec{k})+(x_1z_2)(-\vec{j})+(y_1x_2)(-\vec{k})+(y_1y_2)(\vec{0})+(y_1z_2)(\vec{i})+$$
$$+(z_1x_2)(\vec{j})+(z_1y_2)(-\vec{i})+(z_1z_2)(\vec{0})$$

$\vec{u}\times\vec{v}=(y_1z_2-y_2z_1)\vec{i}+(x_2z_1-x_1z_2)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}$. Note que a expressão anterior é o desenvolvimento do seguinte determinante: $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$

**Exemplo (6):** Sejam $\vec{u}=(2,1,-1)$ e $\vec{v}=(5,-2,1)$. Determine $\vec{u}\times\vec{v}$.

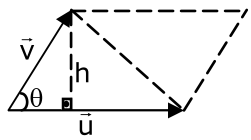
**Solução:** $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}\Rightarrow\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&-1\\5&-2&1\end{vmatrix}=\vec{i}-5\vec{j}-4\vec{k}-5\vec{k}-2\vec{i}-2\vec{j}\Rightarrow$

$\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{i}-7\vec{j}-9\vec{k}$.

## 2.2 Interpretação Geométrica do Módulo do Produto Vetorial

Sejam dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não nulos e não paralelos. Logo eles determinam um paralelogramo. Área do paralelogramo: $A_P=b\times h$, onde:

$b=|\vec{u}|$ e $\operatorname{sen}\theta=\dfrac{h}{|\vec{v}|}\Rightarrow h=|\vec{v}|\cdot\operatorname{sen}\theta$




Logo, $A_P=|\vec{u}|.|\vec{v}|\cdot\operatorname{sen}\theta\Rightarrow A_P=|\vec{u}\times\vec{v}|$

Pela figura podemos ver que, metade do paralelogramo é um triângulo determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, portanto a área do triângulo é dada por: $A_T=\dfrac{|\vec{u}\times\vec{v}|}{2}$

**Exemplo (7):** Determine o vetor $\vec{v}$ do $\Re^3$ que satisfaça as seguintes condições: $\vec{v}\cdot(3\vec{i}+2\vec{j})=6$ e $\vec{v}\times(2\vec{j}+3\vec{k})=2\vec{i}$.

**Solução:** Seja $\vec{v}=(x,y,z)$. Então:

$$\vec{v}\cdot(3\vec{i}+2\vec{j})=6 \quad\Rightarrow\quad (x,y,z)\cdot(3,2,0)=6 \quad\Rightarrow\quad 3x+2y=6 \quad e \quad \vec{v}\times(2\vec{j}+3\vec{k})=2\vec{i} \quad\Rightarrow$$

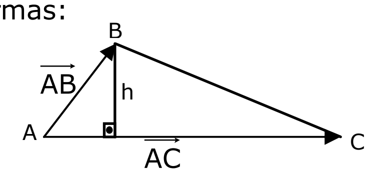
$$(x,y,z)\times(0,2,3)=(2,0,0) \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ 0 & 2 & 3\end{vmatrix}=(2,0,0) \;\Rightarrow\; (3y-2z)\vec{i}-3x\vec{j}+2x\vec{k}=(2,0,0) \;\Rightarrow$$

$$(3y-2z,-3x,2x)=(2,0,0) \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}3y-2z=2\\ -3x=0\Rightarrow x=0\\ 2z=0\Rightarrow x=0\end{cases}.$$ Logo temos o sistema

$$\begin{cases}3y-2z=2\Rightarrow z=\dfrac{7}{2}\\ x=0\\ 3x+2y=6\Rightarrow y=3\end{cases}.$$ Portanto o vetor procurado é $\vec{v}=\left(0,3,\dfrac{7}{2}\right)$.

**Exemplo (8):** Os vértices de um triângulo são os pontos $A(-1,2,4)$, $B(3,-3,4)$ e $C(-1,6,1)$. Determine a altura relativa ao vértice B.

**Solução:** A área $A_T$ do triângulo pode ser escrita de duas formas:




$$A_T=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{2} \;\Rightarrow\; \frac{|\overrightarrow{AC}|\cdot h}{2}=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{2} \;\Rightarrow$$

$$h=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AC}|} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -5 & 0\\ 0 & 4 & -3\end{vmatrix}=15\vec{i}+12\vec{j}+16\vec{k} \;\Rightarrow$$

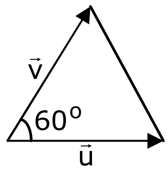
$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{15^2+12^2+16^2}=25$ e $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{0^2+4^2+(-3)^2}=5$. Portanto,

$$h=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AC}|} \;\Rightarrow\; h=\frac{25}{5} \;\Rightarrow\; h=5\,u.c.$$

**Exemplo (9):** Demonstre vetorialmente que a área de um triângulo equilátero de lado m é $A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}m^2$.

**Solução:** Vetorialmente a área de qualquer triângulo é dada por: $A_T=\dfrac{|\vec{u}\times\vec{v}|}{2}$, onde $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são os dois vetores que determinam o triângulo. Como o triângulo é equilátero seus lados são todos iguais e seus ângulos internos todos iguais a $\theta=60^o$. Então: $|\vec{u}|=|\vec{v}|=m$. Por definição temos:

$$A_T = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2} \Rightarrow A_T = \frac{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen}\,60^o}{2}$$




$$A_T = \frac{m \cdot m \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow A_T = \frac{\sqrt{3}}{4} m^2$$

**Exercícios Propostos**

1) Sejam A(1,3,-4), B(5,-3,2) e C(3,1,0) vértices de um triângulo ABC. Sejam P e Q pontos médios dos lados AB e BC, respectivamente. Determine a área do trapézio APQC. Resp: $A = \frac{3\sqrt{11}}{2}$ u.a.

2) Sejam os vetores $\vec{u} = (1,2,0), \vec{v} = (3,1,1)$ e $\vec{w} = (-1,2,-2)$. Os vetores $\{\vec{u}, \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v})\}$ são LI ou LD? Resp: LI

3) Dados os vetores $\vec{u} = (3,-1,2)$ e $\vec{v} = (2,3,0)$, determine um vetor $\vec{w}$ tal que $\vec{w} \cdot \vec{u} = -2$ e $\vec{w} \times \vec{v} = (3,-2,-3)$. Resp: $\vec{w} = (1,3,-1)$

4) Calcular a área do paralelogramo ABCD, sabendo-se que suas diagonais são os vetores $\overrightarrow{AC} = (-1,3,4)$ e $\overrightarrow{BD} = (1,-1,2)$. Resp: $A = \sqrt{35}$ u.a.

5) Determine o valor de z, sabendo-se que A(2,0,0), B(0,2,0) e C(0,0,z) são vértices de um triângulo de área igual a 6. Resp: $z = \pm 4$

6) Demonstre as fórmulas do duplo produto vetorial

$$\begin{cases} \text{a) } (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} \\ \text{b) } \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} \end{cases}.$$

(sugestão: Para demonstrar (b), suponha verdadeira (a) e vice-versa)

7) Mostre que $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

## 3 Produto Misto

**Definição:** O Produto Misto entre os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ é um número real, denotado e definido por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$.

### 3.1 Expressão Cartesiana do Produto Misto

Sejam $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ e $\vec{w} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$. Então:

$\vec{v} \times \vec{w} = (y_2z_3 - y_3z_2)\vec{i} + (x_3z_2 - x_2z_3)\vec{j} + (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{k}$

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (x_1, y_1, z_1) \cdot (y_2z_3 - y_3z_2)\vec{i} + (x_3z_2 - x_2z_3)\vec{j} + (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{k} =$

$= x_1 \cdot (y_2z_3 - y_3z_2) + y_1 \cdot (x_3z_2 - x_2z_3) + z_1 \cdot (x_2y_3 - x_3y_2)$. Esta expressão é igual ao desenvolvimento do determinante: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

**Propriedades**

1) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Leftrightarrow$ um deles é o vetor nulo ou se os vetores são coplanares.

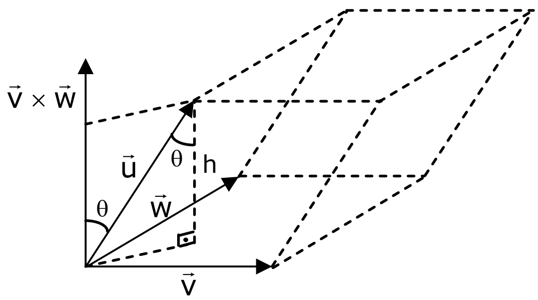
2) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = +[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = ...$

3) $[\vec{u} + \vec{a}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{a}, \vec{v}, \vec{w}]$

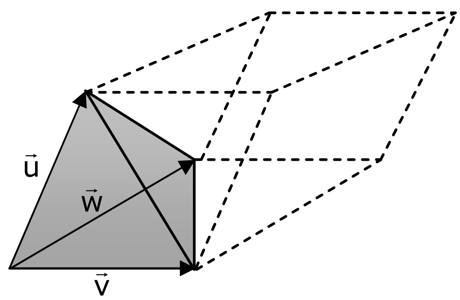
4) $[\alpha\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \alpha \cdot [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

### 3.2 Interpretação Geométrica Módulo do Produto Misto

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$. Então $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = |\vec{u}| \cdot |\vec{v} \times \vec{w}| \cdot \cos\theta$, onde $\theta$ é o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v} \times \vec{w}$. Na figura abaixo temos um paralelepípedo determinado pelos três vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$. Vamos calcular o volume deste paralelepípedo denotado por $V_P$.




O produto misto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ de vetores LI é igual em módulo ao volume do paralelepípedo cujas arestas são os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$. O volume $V_P = Ab \cdot h$, onde área da base Ab é um paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Então: $Ab = |\vec{v} \times \vec{w}|$. No triângulo retângulo da figura temos: $\cos\theta = \dfrac{h}{|\vec{u}|}$. Logo, $h = |\vec{u}| \cdot \cos\theta$. Portanto: $V_P = |\vec{u}| \cdot |\vec{v} \times \vec{w}| \cdot \cos\theta$, ou seja, $V_P = \left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right|$. Note que os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$, determinam também um tetraedro, cujo volume é $V_T = \dfrac{1}{6} V_P$, ou seja, $V_T = \dfrac{\left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right|}{6}$

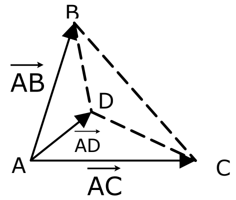


**Exemplo (10):** Determine o volume do tetraedro de vértices A(2,1,3), B(2,7,4), C(3,2,3) e D(1,-2,3).

**Solução:** Os três vetores que determinam este tetraedro poderiam ser $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$.

Como $\overrightarrow{AB} = (0,6,1)$, $\overrightarrow{AC} = (1,1,0)$, $\overrightarrow{AD} = (-1,-3,0)$ e $V_T = \dfrac{\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right|}{6}$, então;

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow V_T = \frac{|-2|}{6} \Rightarrow V_T = \frac{1}{3}\text{u.v.}$$




**Exemplo (11):** Um tetraedro ABCD tem volume igual a 3 u.v. Sendo A(4,3,1), B(6,4,2) e C(1,5,1), determine o vértice D que pertence ao eixo Ox.

**Solução:** Como D é um ponto do eixo Ox, então D(x,0,0). Sejam $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ os vetores que determinam o tetraedro. Como $\overrightarrow{AB} = (2,1,1)$, $\overrightarrow{AC} = (-3,2,0)$, $\overrightarrow{AD} = (x-4,-3,-1)$ e $V_T = \dfrac{\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right|}{6} = 3$ vem que:

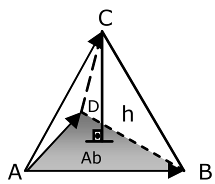
$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ x-4 & -3 & -1 \end{vmatrix} \qquad [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = -2x+10 \Rightarrow$$

$$V_T = \frac{|-2x+10|}{6} = 3 \Rightarrow -2x+10 = \pm 18 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 14 \end{cases}.$$

Portanto, D(-4,0,0) ou D(14,0,0).

**Exemplo (12):** Seja um tetraedro de vértices A(2,0,2), B(0,4,2), C(2,6,4) e D(4,4,0). Determine a altura relativa ao vértice C.

**Solução:** Os vetores que determinam o tetraedro são $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$. Da teoria de geometria espacial temos que o volume de um tetraedo é dado por $V_T = \dfrac{1}{3}Ab \cdot h$, onde Ab é área da base do tetraedro e h a sua altura. Como a área da base é um triângulo determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$, então $Ab = \dfrac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|}{2}$. Do Cálculo Vetorial temos que $V_T = \dfrac{\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right|}{6}$.



Então: $V_T = \dfrac{\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]\right|}{6} = \dfrac{1}{3}Ab\cdot h \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]\right|}{6} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|}{2}\cdot h \quad\Rightarrow$

$h = \dfrac{\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|}$. Como $\begin{cases}\overrightarrow{AB} = (-2,4,0)\\ \overrightarrow{AC} = (0,6,2)\\ \overrightarrow{AD} = (2,4,-2)\end{cases} \Rightarrow$

$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix}-2 & 4 & 0\\ 0 & 6 & 2\\ 2 & 4 & -2\end{vmatrix} = 56$ e $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 4 & 0\\ 2 & 4 & -2\end{vmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = -8\vec{i} - 4\vec{j} - 16\vec{k}$.

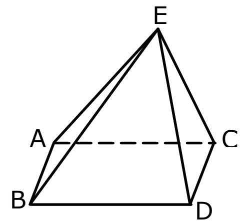
Logo $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}| = \sqrt{336} = 4\sqrt{21}$. Portanto: $h = \dfrac{56}{4\sqrt{21}} \Rightarrow h = \dfrac{2\sqrt{21}}{3}$u.c.

**<u>Exercícios Propostos</u>**

1) Determine os valores de m de modo que o tetraedro determinado pelos vetores $\vec{a} = (2,-3,0), \vec{b} = (1,m,-1)$ e $\vec{c} = (3,0,-1)$, tenha volume igual a $\dfrac{2}{3}$.

Resp: m = 1 ou m = 5

2) Sendo A(0,0,0), B(3,0,0), C(0,5,0), D(3,5,0) e E(3,5,5), determine o volume da figura abaixo.




Resp: V = 25 u.v.

3) Determinar o valor de $R = \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) - \left[\vec{v}\cdot(\vec{u}+\vec{w}) + 5\vec{u}\cdot\vec{w}\right]$ para $\vec{u} = (1,2,3), \vec{v} = (2,4,0)$ e $\vec{w} = (-1,3,-1)$.

Resp: R = 0

4) Determine o vetor $\vec{u} = (m-1, m, m+1)$, para que os vetores $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ sejam coplanares, onde $\vec{v} = (0,3,3)$ e $\vec{w} = (4,1,-1)$. Resp: $\vec{u} = (-2,-1,0)$

5) Sejam $\vec{u} = (2,2,1), \vec{v} = (-2,0,-3)$ e $\vec{w} = (1,-2,3)$. Verificar a dependência linear dos vetores $\{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\cdot(\vec{u}+\vec{v}), [\vec{u},\vec{w},\vec{v}]\cdot(\vec{u}+\vec{w}), [\vec{w},\vec{u},\vec{v}]\cdot(\vec{v}+\vec{w})\}$. Resp: LI

6) Provar que $[\vec{u}+\vec{v}, \vec{v}+\vec{w}, \vec{u}+\vec{w}] = 2[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$

***COMENTÁRIOS IMPORTANTES***

1) Só existem três operações básicas aplicadas aos vetores que são: adição, subtração e multiplicação por escalar, como vimos no capítulo 2. Os produtos estudados neste capítulo são importantes, mas não confundir com as operações básicas, ou seja, não existe multiplicação entre vetores, logo também não existem a divisão, potenciação e radiciação de vetores.

2) Não confundir ***produto por escalar*** com ***produto escalar***. Apesar de usarmos o mesmo símbolo ($\bullet$) para as duas operações, eles têm significados diferentes, ou seja: $\alpha \bullet \vec{v}$ (produto por escalar ou multiplicação por escalar, cujo resultado é um vetor) e $\vec{u} \bullet \vec{v}$ (produto escalar, cujo resultado é um número real).

3) O mesmo cuidado devemos ter com o produto vetorial. Sabemos que não existe multiplicação, nem divisão e muito menos potenciação entre vetores. Logo, ***não existem*** as notações $\frac{\vec{v}}{\vec{u}}$ ou $\vec{v}^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$. Não confundir o produto escalar ($\vec{v} \cdot \vec{u}$) ou produto vetorial ($\vec{v} \times \vec{u}$) entre dois vetores com multiplicação entre vetores. Portanto, $\vec{v} \cdot \vec{v} \neq \vec{v} \times \vec{v} \neq \vec{v}^2$, pois, $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$, $\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$ e $\vec{v}^2$ não existe.

4) No início deste capítulo foi informado que alguns conceitos não são aplicados e não podem ser interpretados geometricamente para vetores do plano ($\Re^2$) e que, de agora em diante, eles serão introduzidos somente para vetores do espaço ($\Re^3$). Pois bem, o produto escalar é um conceito que se aplica aos vetores do plano, da mesma forma como é aplicado aos vetores do espaço, mas o mesmo não acontece com o produto vetorial e o produto misto, os quais não tem interpretação geométrica no plano. (verifique!)