MAT1513 - Laboratório de matemática - 1o semestre 2020
Profa. Daniela - licenciatura noturno
Solução lista Sub

1) (2,0) Sejam $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$ e $g(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$
(a) (1,0) Determine o domínio e imagem de f e, caso exista, a inversa de f .

Solução:
O denominador de f deve ser diferente de zero
$2x + 1 \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{-1}{2}$
$Dmf: \ \{x \in R \ : \ x \neq \frac{-1}{2}\}$
Tomando $y = \frac{x+1}{2x+1}$ como $2x + 1 \neq 0$, $2xy + y = x + 1 \rightarrow x(2y - 1) = 1 - y \rightarrow x = \frac{1-y}{2y-1}$
A imagem da função é $f(x) = f(\frac{1-y}{2y-1}) = \frac{\frac{1-y}{2y-1}+1}{2(\frac{1-y}{2y-1})+1} = y$, para $2y - 1 \neq 0 \rightarrow y \neq \frac{1}{2}$
Com isso temos que a imagem da função f é o conjunto $\{y \in R \ : \ y \neq \frac{1}{2}\}$

Supondo $f(x) = f(x')$ $\rightarrow \frac{x+1}{2x+1} = \frac{x'+1}{2x'+1}$, como $2x + 1 \neq 0$
$\frac{x+1}{2x+1} = \frac{x'+1}{2x'+1} \rightarrow (x + 1)(2x' + 1) = (x' + 1)(2x + 1) \rightarrow 2xx' + 2x' + x + 1 = 2xx' + x' + 2x + 1$
$\rightarrow 2x' + x = x' + 2x \rightarrow x' = x$
Conclui-se que f é injetora
Podemos definir:
1) f: $\{x \in R \ : \ x \neq \frac{-1}{2}\} \rightarrow$ R
Neste caso o contradomínio é diferente da imagem, e a função não é bijetora e, portanto não possui inversa.
2) f: $\{x \in R \ : \ x \neq \frac{-1}{2}\} \rightarrow \{y \in R \ : \ y \neq \frac{1}{2}\}$
Neste caso o contradomínio é igual a imagem, e portanto a função é bijetora e podemos calcular sua inversa.
$x = f \circ f^{-1}(x) \rightarrow x = \frac{f^{-1}(x)+1}{2f^{-1}(x)+1} \rightarrow 2xf^{-1}(x) + x = f^{-1}(x) + 1 \rightarrow 2xf^{-1}(x) - f^{-1}(x) = 1 - x$
$\rightarrow (2x - 1)f^{-1}(x) = 1 - x \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1-x}{2x-1}$

(b) (1,0) Determine o domínio de g e escreva a função g como a composta de três funções.

Solução:
Dentro da raiz só poderemos ter valores maiores ou iguais a zero
$x + \sqrt{x} \geq 0 \ e \ x \geq 0$, sendo x positivo, temos que $x + \sqrt{x} \geq 0$ é satisfeito.
$Dmg: \ \{x \in R \ : \ x \geq 0\}$
Existem várias formas de escrever esta função como composição de 3.
Ex:
$h: \{x \in R: \ x \geq 0\} \rightarrow \{x \in R \ : \ x \geq 0\}$ $\qquad h(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2}$
$i: \{x \in R: \ x \geq 0\} \rightarrow \{x \in R \ : \ x \geq 0\}$ $\qquad i(x) = \sqrt{x}$

$j : R \to R$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $j(x) = x\sqrt{2}$

Temos que $g(x) = j \circ i \circ h(x)$

Perceba que esta composição só é possível pois a imagem de h está contida no domínio de i e a imagem de i está contida no domínio de j .

2) (2,5)

(a) (1,5) Encontre m de forma que $cos(x) = \frac{2}{m-1}$ e $tg(x) = \sqrt{m-2}$, para algum arco x .

Condição de existência:

1) $m - 1 \neq 0 \to m \neq 1$
2) $m - 2 \geq 0 \to m \geq 2$
3) $-1 \leq cos(x) \leq 1 \ \to \ -1 \leq \frac{2}{m-1} \leq 1$,

como $m \geq 2$ pela condição 2) temos que $m - 1$ é positivo e portanto, podemos resumir a condição 3) $\frac{2}{m-1} \leq 1 \to 3 \leq m$

$m \geq 3 \to m \geq 2$ e $m \neq 1$, a condição de existência é $m \geq 3$

Como $sec^2x = tg^2x + 1$

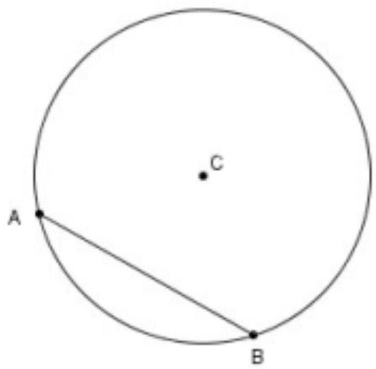
Temos que $\frac{(m-1)^2}{4} = m - 2 + 1 \to (m-1)^2 = 4(m-1)$ ou

$m - 1 = 0 \to m = 1 \ ou \ m - 1 = 4 \to m = 5$

Como apenas $m = 5$ cumpre a condição, a resposta é $m = 5$

(b) (1,0) Sobre uma circunferência de raio 10cm marcam-se os pontos A e B, de modo que a corda AB mede 10cm. Qual é a medida do arco menor AB?

Solução:



Observe que ligando os pontos A e B no centro C, teremos um triângulo ABC equilátero, com lado de 10 cm.

Sendo o triângulo ABC equilátero, todos os seus ângulo valem $\frac{\pi}{3}$.

Sabendo que o ângulo central $\widehat{ACB}$ (menor) equivale a $\frac{1}{6}$ de 360° o comprimento do arco menor AB também será $\frac{1}{6}$ do comprimento total da circunferência.

$\frac{2\pi r}{6} = \frac{20\pi}{6} = \frac{10\pi}{3}$

Perceba que a corda AB divide a circunferência em dois arcos, é importante observar que o enunciado se refere ao menor arco AB.

3) (2,5)
(a) (1,0) A desigualdade |sen3|>|sen 4| é verdadeira ou falsa? Justifique.

Solução: temos que $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$, sabemos então que 3 radianos está no segundo quadrante onde o valor do seno é positivo e, portando |sen3| = sen3
Por outro lado, $\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$ e assim 4 radianos está no terceiro quadrante onde o seno assume um valor negativo e, portanto precisaremos pegar um ângulo que possua um valor de seno equivalente em módulo ao seno de 4 radiano.
$|sen4| = sen(\pi - (4 - \pi)) = sen(2\pi - 4)$
Como $\frac{\pi}{2} \leq 2\pi - 4 \leq \pi$, sabemos então que $2\pi - 4$ está no segundo quadrante.A função seno no segundo quadrante é decrescente e portanto, $2\pi - 4 < 3 \rightarrow sen(2\pi - 4) > sen3$
$\rightarrow |sen4| > |sen3|$
A desigualdade é falsa.

(b) (1,5) Encontre uma expressão para $cotg(a + b)$ dependa apenas da cotangente de a e de b .

Solução:
Para $a, b \neq 0 + 2\pi k,\ com\ k \in Z$, temos que $cotg(a + b) = \frac{cos(a+b)}{sen(a+b)} = \frac{cosacosb - senasenb}{senascosb + senbcosa}$

como $sena \neq 0\ e\ senb \neq 0$ podemos multiplicar a expressão acima por $\frac{\frac{1}{senasenb}}{\frac{1}{senasenb}}$

$$cotg(a + b) = \frac{cosacosb - senasenb}{senascosb + senbcosa} \rightarrow \frac{\frac{cosacosb}{senasenb} - \frac{senasenb}{senasenb}}{\frac{senacosb}{senasenb} + \frac{senbcosa}{senbsena}} \rightarrow \frac{cotga.cotgb - 1}{cotgb + cotga}$$

4) (3,0)
(a) (1,5) Mostre que $cos(arctgx) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Para quais valores de x essa expressão é válida?

Solução:
Condição de existência
1) $1 + x^2$ está dentro da raiz e portanto $1 + x^2 \geq 0$, válido para todo $x \in R$
2) $-1 \leq cos\theta \leq 1 \rightarrow -1 \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$, válido para todo $x \in R$.
3) A função $arctgx$ possui como domínio o conjunto R.

Conclui-se que esta expressão é válida para todo $x \in R$.

Como $sec^2 x = tg^2 x + 1$

Temos que $sec^2(arctgx) = tg^2(arctgx) + 1 \rightarrow \frac{1}{cos^2(arctgx)} = tg^2(arctgx) + 1 \rightarrow \frac{1}{cos^2(arctgx)} = x^2 + 1$
$\rightarrow cos^2(arctgx) = \frac{1}{x^2+1} \rightarrow cos(arctgx) = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

A imagem da função arctgx pertence ao intervalo $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, neste intervalo o cosx possui valor positivo, e portanto $cos(arctgx) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(b) (1,5) Encontre uma expressão para sen(arctg x) que dependa apenas de x .

Solução:

Como $tg\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta}$

Temos que $tg(arctgx) = \frac{sen(arctgx)}{cos(arctgx)}$ pelo item a) $x = \frac{sen(arctgx)}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} \rightarrow sen(arctgx) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$