

# Artigo

## Artigo - Modelos para vigas de concreto armado

Autores buscam validar a modelagem por elementos finitos com ensaio de uma viga submetida à flexão

Edição 231 - Junho/2016

**Betina K. Muliterno**

Engenheira civil formada pela Universidade de Passo Fundo

[be.muliterno@hotmail.com](mailto:be.muliterno@hotmail.com)

**Zacarias M. Chamberlain Pravia**

Professor titular do programa de pós-graduação em engenharia civil e ambiental da Universidade de Passo Fundo

[zacarias.chamberlain@gmail.com](mailto:zacarias.chamberlain@gmail.com)

A análise estrutural tem como finalidade a obtenção dos esforços atuantes nas barras devido às ações externas. O papel do concreto armado é influenciado pela interação dos seus dois componentes: o concreto e o aço, sendo que é a aderência entre estes materiais que torna possível a transferência dos esforços, conforme Campos Filho (2003).

Segundo Nam-Ho Kim (2011), o método dos elementos finitos é um dos métodos numéricos para resolver equações diferenciais que resulta em ganhos de produtividade e de segurança. A modelagem em 3D de um elemento em concreto considerando a armadura pode apresentar resultados precisos para a análise

estrutural, sendo possível inclusive prever o comportamento do elemento real como um todo, o que é um diferencial em comparação às modelagens clássicas. Segundo Floros e Ingason (2013), essa modelagem é capaz de capturar os modos de falha que não estão disponíveis através da análise por outro método, como por exemplo, fissuração e falha de ancoragem nas regiões de apoio.

Dessa forma, o objetivo dessa pesquisa é validar a modelagem por elementos finitos com o ensaio experimental de uma viga submetida à flexão, com a finalidade de verificar a flecha e a abertura de fissuras, realizando as devidas comparações entre os métodos. A estrutura foi modelada detalhadamente através do programa ANSYS 13.0, e também dimensionada seguindo as prescrições da norma NBR 6.118:2014 Projeto de Estruturas de Concreto - Procedimento.

### Metodologia

Para a montagem da armadura utilizada na viga foram retirados os estribos que estavam no meio devido aos dois pontos de aplicação de carga que foram considerados no equipamento para o ensaio, tendo em vista que o objetivo do ensaio foi avaliar o comportamento da viga na área de flexão pura, bem como o aparecimento das fissuras conforme a aplicação da carga. A viga em estudo teve dimensões de 10 cm x 20 cm x 192 cm, conforme a figura 1.

### Modelo experimental

O concreto utilizado foi executado seguindo as recomendações da norma NBR 12.655:2015 Concreto de Cimento Portland - Preparo, Controle, Recebimento e Aceitação - Procedimento. Após a execução do concreto foram moldados

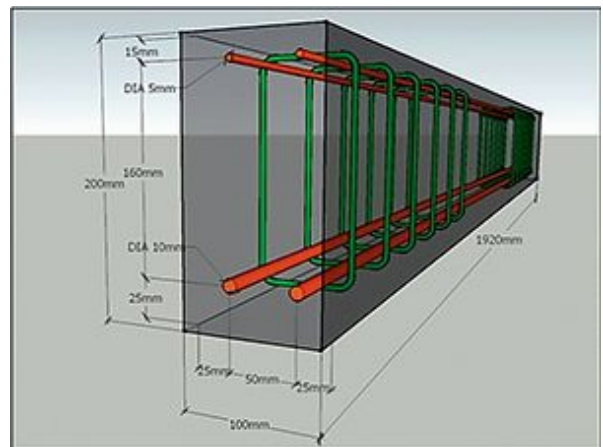


Figura 1 - Posicionamento da armadura e dimensões finais da viga

os corpos de prova, para posteriormente ser realizado o ensaio de resistência à compressão, ao final dos 28 dias necessários para a cura.

O valor de resistência obtido foi  $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$ .

Os valores a seguir foram obtidos seguindo as recomendações

da NBR 6.118:2014, encontrando-se mais detalhes do procedimento adotado em Muliterno (2015).

O aço usado foi CA50, sendo  $f_{yd} = 43,48 \text{ kN/cm}^2$ . O cálculo do momento resistente  $M_u$  é alcançado através da equação 1, obtendo-se  $M_u = 10,41 \text{ kN.m}$ .

Equação 1:

$$M_u = 0,68 \cdot b \cdot x \cdot f_{cd} (d - 0,4 x)$$

A figura 2 ilustra a viga e os pontos de aplicação da carga no ensaio, sendo o valor de  $P$  a carga total que a viga deve suportar antes da primeira fissura.

O valor do momento não deve ser majorado, resultando em  $M_n = 743,57 \text{ kN.cm}$ , conforme a equação 2:

$$\text{Equação 2: } M_u = 1,4 \cdot M_n$$

A carga que a viga poderá resistir é dada pela equação 3:

$$\text{Equação 3: } P = 2M/a$$

Sendo  $a = 68 \text{ cm}$  e  $M_n = 743,57 \text{ kN.cm}$ , temos que  $P = 22,00 \text{ kN}$ .

A avaliação da flecha em vigas de concreto armado foi realizada conforme o item 17.3 (Elementos lineares sujeitos a solicitações normais - Estados-Limites de Serviço) da norma NBR 6.118:2014, resultando na equação 4:

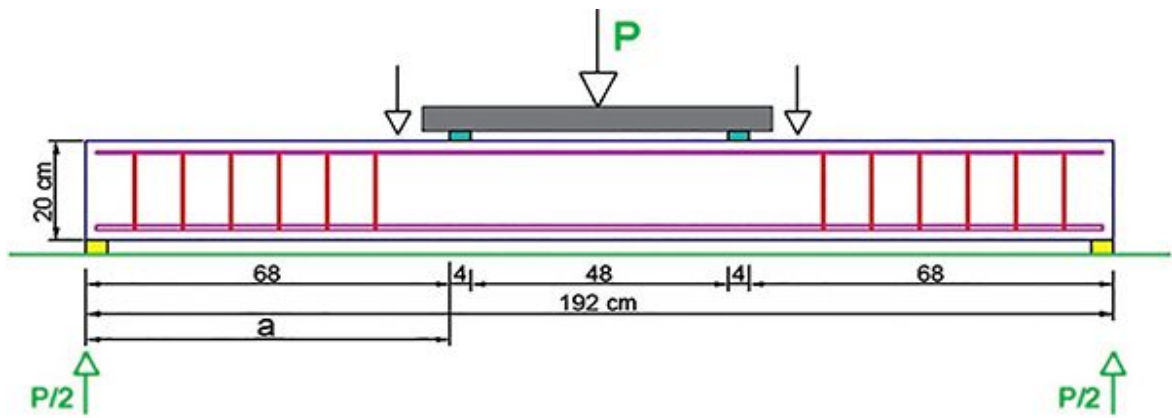


Figura 2 - Determinação da área de aplicação da carga

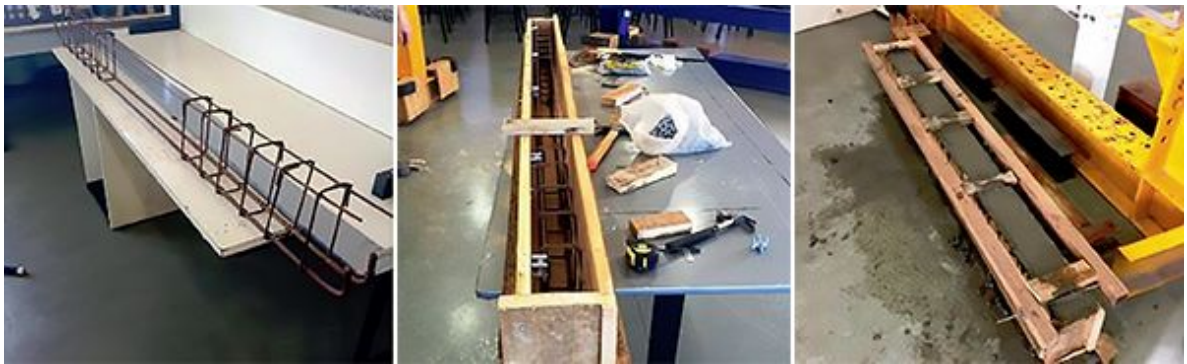


Figura 3 - Determinação da área de aplicação da carga



Figura 4 - Realização do ensaio

Equação 4:  $(EI)_{eq,t0} = Ecs \{ (Mr/Ma)^3 l_c + [1 - (Mr/Ma)^3] III \} \leq Ecs l_c = 6.648.470,40 \text{ kN.cm}^2$

Para encontrar o módulo de elasticidade equivalente, dividir pela inércia.

$E = 6.648.470,40 \text{ kN.cm}^2 / 6.667 \text{ cm}^4 = 997,2 \text{ kN/cm}^2 = 9.972 \text{ MPa}$

Para a determinação da flecha foi utilizado o programa FTOOL, sendo que o deslocamento encontrado foi de 3,49 mm. A figura 3 mostra a execução da viga em laboratório. O ensaio, realizado no LESE (UPF), foi transmitido ao vivo e ficou gravado no link <https://youtu.be/TVMnJzErmJ8>



Figura 5 - Desenvolvimento da fissuração

O procedimento, ilustrado na figura 4, consistiu em colocar a viga (simplesmente apoiada) no equipamento e aplicar a carga através de um macaco hidráulico. O valor da carga aplicada foi acompanhado por uma célula de carga com leitora. Abaixo da viga, foi posicionado um relógio comparador digital, utilizado para medir o deslocamento do elemento (flecha imediata).

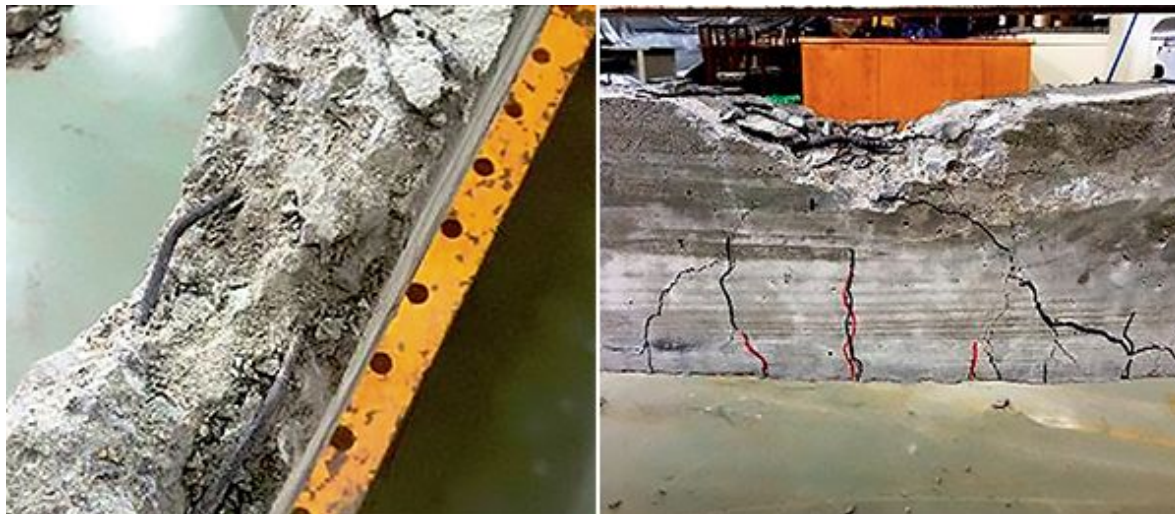


Figura 6 - Ruptura da viga: esmagamento do concreto

O procedimento, ilustrado na

figura 4, consistiu em colocar a viga (simplesmente apoiada) no equipamento e aplicar a carga através de um macaco hidráulico. O valor da carga aplicada foi acompanhado por uma célula de carga com leitora. Abaixo da viga, foi posicionado um relógio comparador digital, utilizado para medir o deslocamento do elemento (flecha imediata).

A viga foi observada atentamente até o aparecimento da primeira fissura, e em seguida aumentou-se o carregamento até a ruptura total da viga (esmagamento do concreto na parte superior da estrutura), próximo aos 60 kN (figuras 5 e 6).

### Modelagem numérica

Entre os programas de elementos finitos disponíveis, o ANSYS fornece um elemento tridimensional sólido de oito nós (SOLID65) não linear, o qual apresenta o modelo de materiais semelhantes aos materiais de concreto, sendo sua geometria demonstrada na figura 7.

Segundo Khennane, Dahmani e Kaci (2010), esse elemento apresenta uma analogia às fissuras, distribuídas por rachaduras nas zonas de tensão e um algoritmo de plasticidade que representa o esmagamento do concreto nas



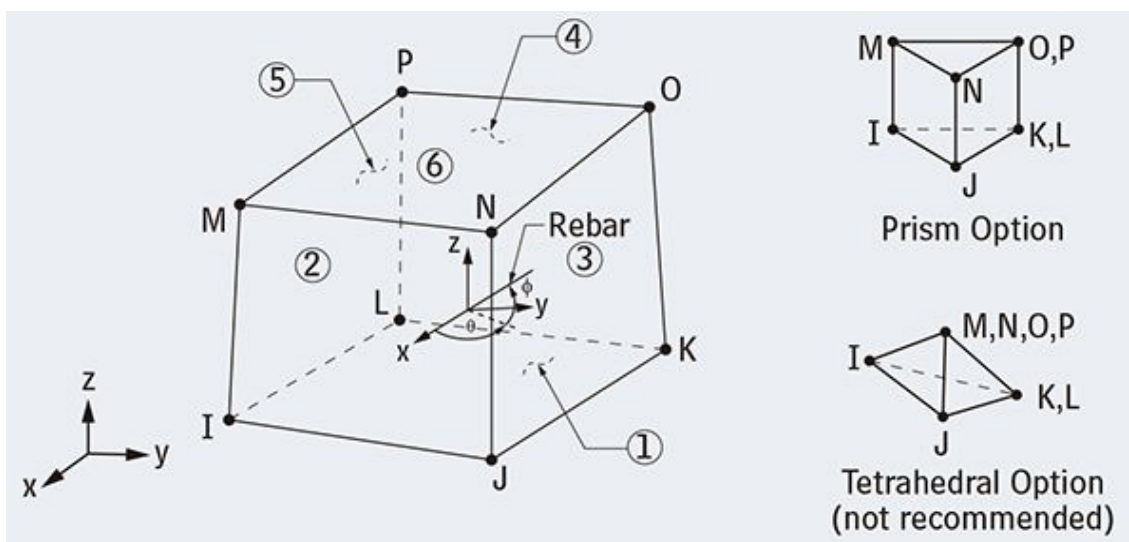


Figura 7 - Geometria do elemento SOLID65 (fonte: ANSYS 13.0, 2015)

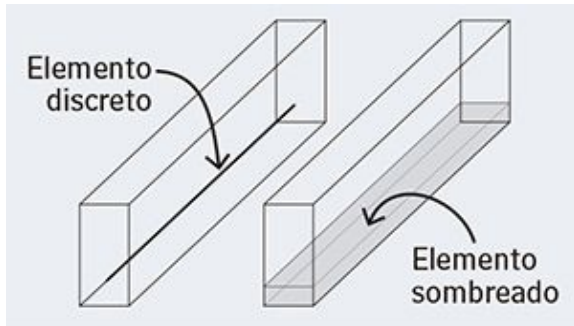
Tabela 1 – RESULTADOS OBTIDOS NO ENSAIO DA VIGA

Carga (kN)	Deslocamento (mm)	Carga (kN)	Deslocamento (mm)	Carga (kN)	Deslocamento (mm)
0	0,00	15	1,96	26	4,62
5	0,56	16	2,30	27	4,9
6	0,65	17	2,53	28	5,1
7	0,75	18	2,78	29	5,32
8	0,85	19	3,00	30	5,54
9	0,95	20	3,28	31	5,88
10	1,04	21	3,48	32	6,00
11	1,19	22	3,73	33	6,24
12	1,35	23	3,95	34	6,51
13	1,52	24	4,15	-	-
14	1,74	25	4,38	-	-

zonas de compressão. Uma vez que as tensões principais nos pontos atingem a integração de tração ou força de compressão, a fissuração ou esmagamento dos elementos de concreto podem ser formados. Os autores também expõem que existem duas maneiras de representar o reforço de aço: a primeira seria considerar o aço como uma área sombreada (smeared), representando uma porcentagem da região do concreto. A segunda opção é utilizar um elemento discreto (discrete), opção usada nesse trabalho, considerando o aço como uma barra, com propriedades geométricas semelhantes ao reforço original (figura 8).

O modelo detalhado é capaz de prever o modo de falha do material de concreto, seja por esmagamento ou fissuras. Na análise não linear, a carga total aplicada a um modelo de elementos finitos é dividida em uma série de incrementos de carga. Na conclusão de cada solução incremental, a matriz de rigidez do modelo é ajustada para refletir as mudanças não lineares na rigidez estrutural antes de prosseguir para o próximo incremento de carga.

Quando é realizada a análise considerando o reforço de aço, é fundamental o tamanho da malha dos elementos,



**Figura 8** - Elementos de reforço: diferença entre sombreado - smeared - e discreto - discrete (Fonte: Khennane, Dahmani, Kaci, 2010)

**Tabela 2 – RESULTADOS FINAIS  
OBTIDOS NOS ESTUDOS PARA FLECHA**

Método de estudo	Flecha (mm)
Dimensionamento Clássico	3,49
MEF (Programa ANSYS)	3,76
Ensaio em laboratório	3,73

pois é essa divisão que define onde estará localizada a barra de aço para a análise. No caso estudado neste trabalho, definiram-se todos os elementos com 20 mm, assim a posição da armadura ficaria correta conforme a viga executada em laboratório. Em seguida, foram selecionados os elementos para representar o aço, conforme exposto nas figuras 9 e 10.

### Análise de resultados

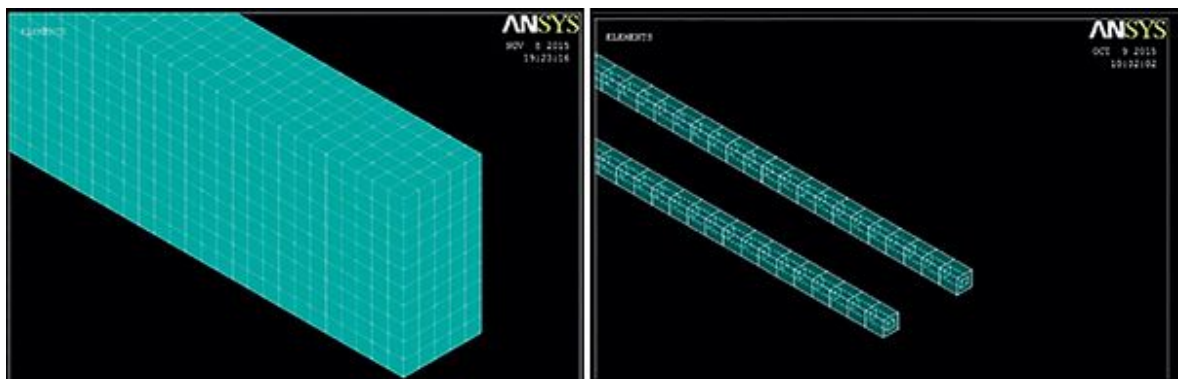
O valor da flecha obtido pelo programa ANSYS foi de 3,7599 mm. O programa permite a visualização do local onde supostamente apareceriam as fissuras, conforme os incrementos de carga. A figura 11 ilustra os resultados obtidos em vermelho, sendo as fissuras representadas na parte central inferior da viga. Foi usado o valor de Rigidez Equivalente com  $E = 9972$  MPa.

A tabela 1 e a figura 12 foram elaboradas com os resultados de deslocamento (flecha) medidos durante o ensaio, conforme a aplicação da carga aumentava. A tabela 2, inserida a seguir, resume os resultados obtidos nesse trabalho.

A variação é pequena entre os valores apresentados, o que significa que o dimensionamento, tanto pelo método clássico, quanto pelo método dos elementos finitos, representa de maneira correta o comportamento dos elementos, para o caso analisado.

Analisando os resultados obtidos no ensaio, pode-se dizer que a viga suportou a carga esperada de 22 kN, sem apresentar nenhuma fissura, de acordo com o recomendado pela norma NBR 6.118:2014. A estrutura apresentou um comportamento linear dos resultados para flecha, sendo que a mesma inclusive respeitou o valor da flecha limite.

Na modelagem através do método dos elementos finitos, observa-se que a viga suportou a carga inicial aplicada, conforme o



**Figura 9** - Malha de elementos finitos e elementos de reforço

dimensionamento clássico. A falha de flexão da viga de concreto armado é adequadamente modelada por elementos finitos, sendo os resultados obtidos muito próximos ao ensaio realizado. Entretanto é importante ressaltar que a

determinação adequada dos apoios e parâmetros é determinante para a análise do elemento, tendo em vista que estes influenciam diretamente o valor final dos resultados. Com a modelagem completa do elemento, é possível mostrar as diferentes fases do comportamento do modelo de elementos finitos, obtendo e determinando os padrões das regiões de fissuração.

## Conclusão

Durante os estudos realizados, observou-se a importância em seguir as recomendações das normas vigentes. Por exemplo, em se tratando do módulo de elasticidade reduzido recomendado para a avaliação das flechas, utilizado neste trabalho, caso fosse considerado o módulo de elasticidade do concreto, o que é seguido pela maioria dos projetistas estruturais, os valores seriam completamente diferentes, sendo muito distantes do que acontece na realidade.

A importância de realizar ensaios para avaliar o real comportamento dos elementos é inquestionável, agregando valor aos

conhecimentos sobre o assunto, e tornando possível realizar comparações com os métodos comumente utilizados no dimensionamento estrutural, e verificar, dessa forma, a praticidade e o desempenho dos mesmos.

A modelagem através do método dos elementos finitos correspondeu às expectativas, sendo a que mais se aproximou dos valores reais apresentados no ensaio. A variação dos resultados obtidos foi muito pequena, revelando que tanto o método de dimensionamento clássico quanto o método dos elementos finitos representam de maneira adequada o comportamento dos elementos, desde que ambos sejam estudados e utilizados adequadamente, com a definição correta dos parâmetros e geometria dos elementos, o que é determinante para as análises.

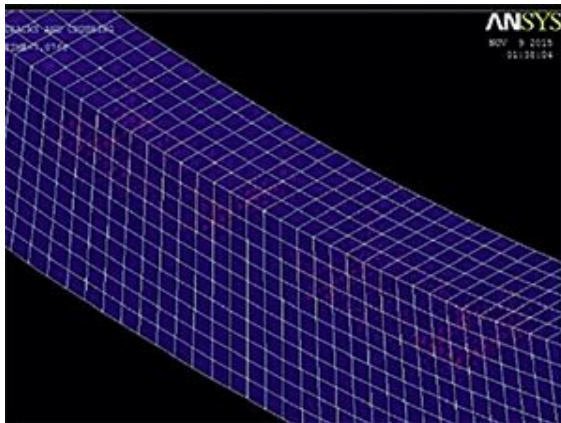


Figura 11 - Determinação das fissuras pelo programa ANSYS

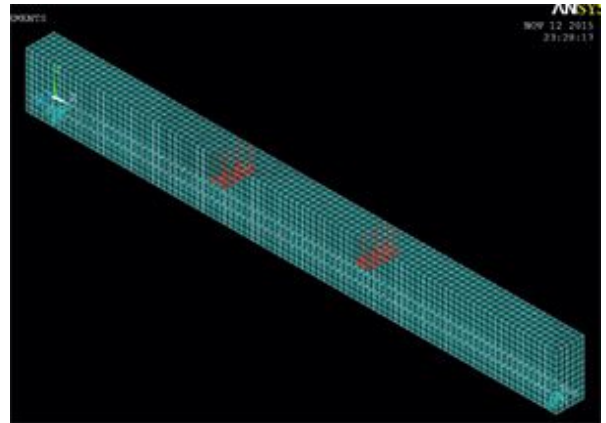


Figura 10 - Viga finalizada (elementos, apoios e cargas definidos)

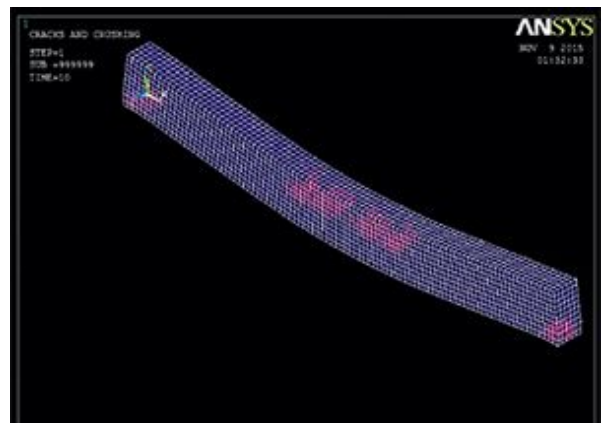


Figura 12 - Gráfico Carga x Deslocamento no meio da viga do ensaio experimental

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Análise de Estruturas: Método das Forças e Método dos Deslocamentos.** SORIANO, Humberto Lima; LIMA, Silvio de Souza. 2. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2006.
- Crack Identification in Reinforced Concrete Beams using ANSYS Software.** KHENNANE, Amar; DAHMANI, Lahlou; KACI, S.. Article in Strength of Materials, March 2010.
- Elementos Finitos: a Base da Tecnologia CAE.** ALVES FILHO, Avelino. 5. ed. São Paulo: Érica, 2007. 292 p.
- Elementos Finitos: Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas.** SORIANO, Humberto Lima. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

**Fundamentos da Análise de Estruturas de Concreto pelo Método dos Elementos Finitos.** CAMPOS FILHO, Américo. 2003. 45 p. Apostila (Pós-Graduação em Engenharia Civil) - UFRGS.

**Introdução à Análise e ao Projeto em Elementos Finitos.** KIM, Nam-Ho. Rio de Janeiro, LTC 2011.

**Método dos Elementos Finitos: Primeiros Passos.** ASSAN, Aloisio Ernesto. Campinas: Ed. Universidade Estadual de Campinas, 2003. 298 p.

**Modelling and Simulation of Reinforced Concrete Beams: Coupled Analysis of Imperfectly Bonded Reinforcement in Fracturing Concrete.** FLOROS, Dimosthenis. INGASON, Olafur Agust. Goteborg, Sweden, 2013. Master's Thesis in Solid and Structural Mechanics - Chalmers University of Technology.

**NBR 12.655: Concreto de Cimento Portland - Preparo, Controle, Recebimento e Aceitação - Procedimento.** ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. 3 ed. Rio de Janeiro, 2015. 23 p.

**NBR 6.118: Projeto de Estruturas de Concreto - Procedimento.** ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. 1 ed. Rio de Janeiro, 2014. 238 p.

**Trabalho de Conclusão de Curso: Análise Numérica e Experimental de Viga de Concreto Armado.** MULITERNO, Betina. Passo Fundo: Universidade de Passo Fundo, 2015.

**Um Primeiro Curso em Elementos Finitos.** FISH, Jacob. Rio de Janeiro: LTC, 2009.