MAP2110 - Notas de aula e exercícios

Produto Vetorial e produto triplo

Saulo R. M. Barros

Departamento de Matemática Aplicada - IME-USP

O Produto vetorial entre vetores do $\mathbb{R}^3$.

Definição: Em $\mathbb{R}^3$ é usual denominar os vetores da base canônica $E_1=(1,0,0)$, $E_2=(0,1,0)$, $E_3=(0,0,1)$ alternativamente por $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$. O Produto vetorial entre vetores $A=(a_1,a_2,a_3)$ e $B=(b_1,b_2,b_3)$ é definido como:

$$A\times B = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = (a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

Desta definição, resulta uma série de propriedades:

(a) $A\times B = -B\times A$ (anti-simetria)

(b) $A\times(B+C) = (A\times B)+(A\times C)$ (distributiva - segue facilmente das propriedades de determinantes).

(c) $\lambda(A\times B) = (\lambda A)\times B = A\times(\lambda B)$ $(\lambda\in\mathbb{R})$.

(d) $A.(A\times B) = B.(A\times B) = 0$ (ou seja $A\times B$ é um vetor ortogonal a ambos A e B. Caso A, B sejam L.I., $A\times B$ é ortogonal ao plano gerado por A e B.)

(e) $\|A\times B\|^2 = \|A\|^2\|B\|^2 - (A.B)^2$ (identidade de Lagrange)

(f) $A\times B = 0 \longleftrightarrow \{A,B\}$ é L.D.

Dem: (a), (b), (c) são imediatas.

(d) $A.(A\times B) = a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_2a_1b_3 + a_1a_3b_2 - a_3a_2b_1 = 0$

(e) $\|A\times B\|^2 = (a_2b_3-a_3b_2)^2 + (a_3b_1-a_1b_3)^2 + (a_1b_2-a_2b_1)^2$

$\|A\|^2\|B\|^2 - (A.B)^2 = (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$

Verifiquem que as duas expressões coincidem!

(f) De (e) segue que $A\times B = 0 \longleftrightarrow |A.B| = \|A\|\|B\|$ e por C.S. $\longleftrightarrow \{A,B\}$ L.D.

Observação: O produto vetorial não é associativo. Se A e B são L.I. então $A \times (A \times B) \neq (A \times A) \times B = 0$.

Teorema: Sejam A, B L.I. Então:

(a) $A, B, A \times B$ é base de $\mathbb{R}^3$

(b) se $N \cdot A = N \cdot B = 0$ então $N = \gamma \cdot (A \times B)$ $\gamma \in \mathbb{R}$.

Dem: a) Como $A \times B$ é ortogonal a $L(\{A, B\})$ e não nulo, segue que A, B e $A \times B$ são L.I. $\Rightarrow$ base de $\mathbb{R}^3$.

b) $N = \alpha A + \beta B + \gamma (A \times B)$

Então $N \cdot (A \times B) = \alpha A \cdot (A \times B) + \beta B \cdot (A \times B) + \gamma (A \times B) \cdot (A \times B)$

$= \gamma (A \times B) \cdot (A \times B)$.

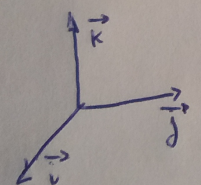
Segue que $(N - \gamma (A \times B)) \cdot (A \times B) = 0$.

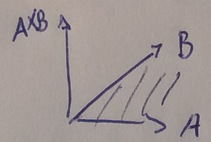
Como $(N - \gamma (A \times B)) \cdot A = 0$ e $(N - \gamma (A \times B)) \cdot B = 0$ então

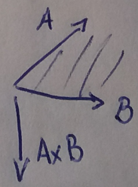
$N - \gamma (A \times B) = 0$ e $\therefore$ $N = \gamma (A \times B)$.

Regra da mão direita:

Temos que $\vec{i} \times \vec{j} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \vec{k}$ $\left(\begin{array}{l} \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \end{array} \right)$

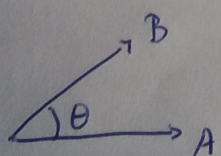






(sistema "destro" de coordenadas)

Interpretação geométrica do produto vetorial



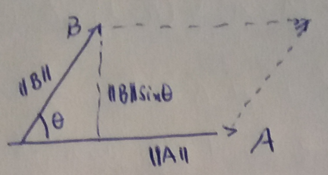
Temos que $A \cdot B = \|A\| \|B\| \cos\theta$

Da igualdade $\|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 - (A \cdot B)^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 (1 - \cos^2\theta)$

$= \|A\|^2 \|B\|^2 \sin^2\theta$

De onde obtemos $\|A \times B\| = \|A\| \|B\| \sin\theta$

Segue que



$\|A\times B\| = \|A\|\|B\|\sin\theta =$ Área do Paralelogramo definido pelos vetores A e B.

Exemplos:

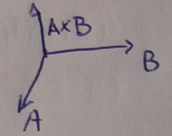
Exerc. 7 (13.11) Sejam A e B t.q. $A.B=0$ e $\|A\|=\|B\|=1$

a) Então $A, B, A\times B$ formam base ortonormal. A única coisa ainda a mostrar é que $\|A\times B\|=1$. Mas $\|A\times B\|^2 = \|A\|^2\|B\|^2 - (A.B)^2 = 1$.

b) Seja $C = (A\times B)\times A$

$\|C\|^2 = \|A\times B\|^2\|A\|^2 - ((A\times B).A)^2 = \|A\times B\|^2\|A\|^2 - 1.$

c) $(A\times B)\times A = B \qquad (A\times B)\times B = -A$



Relações se obtem da regra da mão direita.

Verifique algebricamente.

Ex: $(A\times B)\times A = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_2b_3-a_3b_2 & a_3b_1-a_1b_3 & a_1b_2-a_2b_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3^2b_1 - a_1a_3b_3 - a_1a_2b_2 + a_2^2b_1, \\ a_1^2b_2 - a_1a_2b_1 - a_2a_3b_3 + a_3^2b_2, \\ a_2^2b_3 - a_2a_3b_2 - a_1a_3b_1 + a_1^2b_3 \end{pmatrix}$

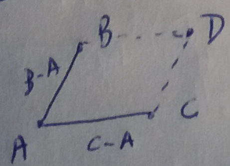
Veja que: $a_3^2b_1 - a_1b_3a_3 - a_1a_2b_2 + a_2^2b_1 = b_1(a_2^2+a_3^2) - a_1(a_2b_2+a_3b_3)$

(usando que $A.A=1$ e $A.B=0$ ⟹) $= b_1(1-a_1^2) - a_1(-a_1b_1) = b_1 - a_1^2b_1 + a_1^2b_1 = b_1$

As outras componentes são obtidas analogamente.

Exerc 11. Sejam $A=(1,0,1)$, $B=(-1,1,1)$ $C=(2,-1,2)$

Qual a área do triângulo ABC?



$D = C-A+B-A = C+B-2A.$

Area do paralelogramo:

$\|(B-A)\times(C-A)\| = \|(-2,1,0)\times(1,-1,1)\|$

$(B-A)\times(C-A) = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (1,2,-1+2) = (1,2,1)$

$\|(B-A)\times(C-A)\| = \sqrt{6}$

Area $\Delta ABC = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Exerc. 15: $A, B \in \mathbb{R}^3$, ortonormais. Seja P t.q.

$P \times B = A - P \implies P = A - P \times B$

a) $P \cdot B = A \cdot B - (P \times B) \cdot B = 0$.

$\|P\| = ?$

Temos que $\|P \times B\|^2 = \|P\|^2 \|B\|^2 - ((P \times B) \cdot B)^2 = \|P\|^2$

e $\|A\|^2 = \|P + P \times B\|^2 = \|P\|^2 + 2 P \cdot (P \times B) + \|P \times B\|^2 = 2\|P\|^2$

logo $\|P\|^2 = \dfrac{\|A\|^2}{2} = \dfrac{1}{2} \longrightarrow \|P\| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) P, B e $P \times B$ base de $\mathbb{R}^3$ (pois P e B ortogonais e não nulos.)

c) $(P \times B) \times B = -P$ (como visto no exerc. 7).

d) Mostre que $P = \frac{1}{2}(A - A \times B)$

Temos que $P \times B = A - P \longrightarrow (P \times B) \times B = (A - P) \times B = A \times B - P \times B$

$\therefore \quad -P = A \times B - P \times B$

Logo $P = P \times B - A \times B = A - P - A \times B$

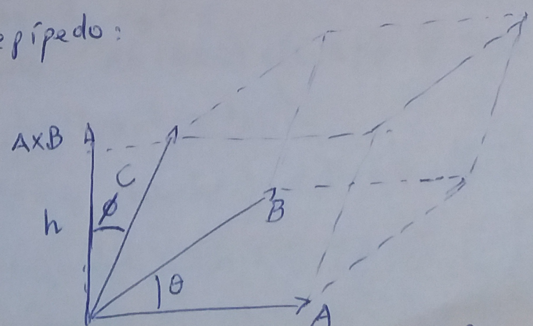
$2P = A - A \times B$ e $P = \frac{1}{2}(A - A \times B)$.

O Produto escalar triplo:

$$A \cdot (B \times C) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 \det \begin{pmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix} - a_2 \det \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{pmatrix} + a_3 \det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$$

Segue que: Teor.: $\{(A, B, C)\}$ é L.D. $\iff A \cdot (B \times C) = 0$

Volume de um paralelepípedo:



$h = \|C\| \cos\phi$

$A \cdot B \times C = A \times B \cdot C$

Área da base $\|A \times B\|$

Volume: $\|A \times B\|\, h$

$= \|A \times B\| \|C\| \cos\phi = (A \times B) \cdot C = (B \times C) \cdot A = (C \times A) \cdot B$

A regra de Cramer e o produto triplo

Considere um sistema linear 3×3 $\quad Mx = D$.

Sejam A, B, C as colunas de M. O sistema equivale a determinar $x = (x_1, x_2, x_3)$ tal que:

$$x_1 A + x_2 B + x_3 C = D$$

Vamos tomar o produto escalar da equação por $B \times C$.

Assim:

$$x_1 A \cdot B\times C + x_2 B \cdot B\times C + x_3 C \cdot B\times C = D \cdot B\times C$$

Como $B \cdot B\times C = 0$ e $C \cdot B\times C = 0$, obtemos:

$$x_1 = \frac{D \cdot B\times C}{A \cdot B\times C}$$

(o denominador é não nulo se A, B, C são LI).

De forma análoga, trocando $B\times C$ por $A\times B$ e $C\times A$ obtem-se as expressões para x_2 e x_3.

Note que $\quad A \cdot B\times C = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \det M$

e $\quad x_1 = \det\begin{pmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \Big/ \det M$

$$x_2 = \det\begin{pmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{pmatrix} \Big/ \det M \quad \text{e} \quad x_3 = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{pmatrix} \Big/ \det M.$$

Exercício: Mostre a fórmula $\quad A\times(B\times C) = (C.A)B - (B.A)C$

$(B\times C) = (b_2c_3 - c_2b_3, \; b_3c_1 - b_1c_3, \; b_1c_2 - b_2c_1)$

Se $A = \vec{i}$

$\hookrightarrow \vec{i}\times(B\times C) = (0, \; b_2c_1 - b_1c_2, \; b_3c_1 - b_1c_3) = c_1B - b_1C = (C.\vec{i})B - (B.\vec{i})C$

$\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ (B\times C)_1 & (B\times C)_2 & (B\times C)_3 \end{pmatrix}$

$\vec{j}\times(B\times C) = (b_1c_2 - b_2c_1, \; 0, \; c_2b_3 - b_2c_3) = c_2B - b_2C = (C.\vec{j})B - (B.\vec{j})C$

$\vec{k}\times(B\times C) = (b_1c_3 - c_1b_3, \; b_2c_3 - c_2b_3, \; 0) = c_3B - b_3C = (C.\vec{k})B - (B.\vec{k})C$

$(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k})\times(B\times C) = \alpha\,\vec{i}\times(B\times C) + \beta\,\vec{j}(B\times C) + \gamma\,\vec{k}\times(B\times C) = (C.A)B - (B.A)C.$