# MAT 1513 - Laboratório de Matemática - 1o Semestre 2020

## Profa. Daniela - Licenciatura Noturno

## OITAVA LISTA DE EXERCÍCIOS

*Resolva por Indução os exercícios* 1 *a* 8

**(1)** $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n \leq n$, para todo $n \geq 3$.

**(2)** $1^3 + 2^3 + 3^3 \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$, para todo $n \geq 1$.

**(3)** $(1 + 2 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 \cdots + n^3$, para todo $n \geq 1$.

**(4)** $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$, para todo $n \geq 1$.

**(5)** *(Desigualdade de Bernoulli)* $(1+\alpha)^n \geq 1 + \alpha n$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > -1$), para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

**(6)** $\dfrac{4^n - 1}{3}$ é inteiro e ímpar, para todo $n \geq 1$.

**(7)** $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$, para todo $n \geq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

**(8)** A soma dos ângulos internos de um polígono convexo e $n$ lados é $(n-2)180^o$.

**(9)** Considere a seguinte sequência de números dada recursivamente: $a_0 = 1$ e $a_n = 2a_{n-1} + 1$, para $n \geq 1$.

**(a)** Exiba os 5 primeiros termos da sequência $(a_n)$,

**(b)** Prove que $a_n = 2^{n+1} - 1$, para todo $n \geq 1$.

**(10)** Considere a seguinte sequência de números dada recursivamente: $b_0 = 1$ e $b_n = 3b_{n-1} - 1$, para $n \geq 1$.

**(a)** Exiba os 5 primeiros termos da sequência $(b_n)$,

**(b)** Encontre uma fórmula para $b_n$ que dependa somente de $n$.

**(11)** Descubra a lei sugerida pelos fatos apresentados e prove-a por indução:

$$\frac{1}{2!} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} = \frac{5}{6}, \quad \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} = \frac{23}{24}, \cdots$$

**(12)** No desenvolvimento de $\left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)^{12}$, qual é o valor do coeficiente do termo independente de $x$?

**(13)** Qual é o coeficiente de $x^7$ na expansão de $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^{15}$?

**(14)** Simplifique

**(a)** $\dfrac{(n+3)! - (n+1)!}{(n+2)!}$ **(b)** $\binom{m-1}{p-2} + \binom{m-1}{p-1} + \binom{m}{p}$ **(c)** $\sum_{m=1}^{p} \binom{m}{m-1}$

**(15)** Resolva as equações

**(a)** $(n!)^2 = 18(n!) + 144$ **(b)** $\binom{n-1}{2} = \binom{n+1}{4}$

**(16)** Mostre que $\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{r} = \binom{n}{r} \cdot \binom{n-r}{m-r}$

**(17)** Se $(\sqrt{3} - 1)^5 = a\sqrt{3} + b$, onde $a$ e $b$ são números inteiros, encontre os valores de $a$ e $b$.

**(18)** Determine o conjunto das partes de $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.