Questão 1. Vamos verificar se os vetores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ e } v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

são linearmente indenpendentes. Para isso, vamos verificar se a única solução possível da equação

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$$

é a solução nula, isto é, $x = y = z = 0$.

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0 \Rightarrow \; x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ -y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Vamos resolver o sistema acima, utilizando o método de Eliminação de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow -L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

O processo de eliminação de Gauss na matriz do sistema $(*)$ resultou em uma matriz cuja última linha é inteiramente nula, isso implica que o sistema $(*)$ possui infinitas soluções, a saber:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = -y \end{cases} \Rightarrow \text{ fazendo } y = t \in \mathbb{R} \text{ temos } \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Assim, concluímos que a solução nula não é a única solução do sistema $(*)$, o que implica que os vetores v_1, v_2 e v_3 não são linearmente independentes, sendo, portanto, linearmente dependentes.

Agora vamos escrever o vetor u como combinação linear dos vetores v_1, v_2 e v_3. Isto é, vamos encontrar escalares $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = u.$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = u \Rightarrow \quad x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ -y - z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Usando o método da eliminação de Gauss para resolver o sistema acima, temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Da última matriz obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ z = -1 - y \end{cases} \Rightarrow \text{ fazendo } y = t \in \mathbb{R} \text{ temos } \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -1 - t \end{cases}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

De modo que,

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = u \Leftrightarrow (1 - t)v_1 + tv_2 + (-1 - t)v_3 = u, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

é combinação linear dos vetores v_1, v_2 e v_3 que resulta no vetor u.

QUESTÃO 2. Vamos escrever a equação geral do plano Π gerado pelos vetores v_1 e v_3 da questão anterior e que passa pelo ponto $P = (1, 0, 0)$.
Para escrevermos a equação geral do plano Π precisamos determinar o vetor normal à ele.Sabemos que o vetor normal n é o produto vetorial entre v_1 e v_3:

$$
\begin{aligned}
n = v_1 \times v_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} &= -k - j + i \\
&= -(0,0,1) - (0,1,0) + (1,0,0) \\
&= (1,-1,-1).
\end{aligned}
$$

Sabemos que $\vec{PX} \cdot n = 0$, onde $X = (x, y, z) \in \Pi$ e $P = (1, 0, 0) \in \Pi$, assim $\vec{PX} = (x - 1, y, z)$.

$$
\begin{gathered}
\vec{PX} \cdot n = 0 \\
(x-1, y, z) \cdot (1, -1, -1) = 0 \\
x - 1 - y - z = 0 \\
\boxed{\Pi : x - y - z = 1}\,.
\end{gathered}
$$

Questão 3. Vamos encontrar as soluções do sistema abaixo usando o método de Eliminação de Gauss.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ -3x_1 - 7x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 7 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -5 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & -7 & 7 & -5 & 7 \\ 1 & 3 & -4 & 3 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow[\begin{subarray}{c} \end{subarray}]{\begin{subarray}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{subarray}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & 4 & -8 \\ 0 & -4 & 10 & -8 & 16 \\ 0 & 2 & -5 & 4 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow{\begin{subarray}{c} L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{subarray}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\begin{subarray}{c} L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2 \end{subarray}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{2} & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ fazendo } \begin{array}{l} x_3 = t \in \mathbb{R} \\ x_4 = s \in \mathbb{R} \end{array}$$

nós temos $\begin{cases} x_1 = 7 - \frac{7}{2}t + 3s \\ x_2 = -4 + \frac{5}{2}t - 2s \\ x_3 = t \\ x_4 = s \end{cases}, \forall t, s \in \mathbb{R}.$

Questão 4. Seja o polinômio matricial

$$p(X) = x^3 - 5x^2 + 11X - 4I$$

sabendo que $p(U) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ vamos calcular $p(U^T)$. Sabemos que $I = I^T$ e, além disso, os Teoremas 2 e 3 das seções 2.1 e 2.3, respectivamente, do livro do Nicholson nos diz que valem as seguintes propriedades, sejam $k \in \mathbb{R}$ e A uma matriz $n \times m$ então

1. $(kA)^T = kA^T$;
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$;
3. $(AB)^T = B^T A^T$

Essa última propriedade implica que se $B = A$ então $(A^n)^T = (\underbrace{AA\cdots A}_{n \text{ vezes}})^T = \underbrace{A^T A^T \cdots A^T}_{n \text{ vezes}}$, onde n é um número natural. Assim,

$$\begin{aligned} p(U^T) &= (U^T)^3 - 5(U^T)^2 + 11U^T - 4I \\ &= (U^3)^T - (5U^2)^T + 11U^T - (4I^T) \\ &= (U^3 - 5U^2 + 11U - 4I)^T \\ &= p(U)^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sabendo que $p(U) = 0$ vamos encontrar U^{-1} em termos de U:

$$\begin{aligned} p(U) = 0 \Rightarrow \\ U^3 - 5U^2 + 11U - 4I = 0 \Rightarrow \\ U^3 - 5U^2 + 11U = 4I \Rightarrow \\ U(U^2 - 5U + 11I) = 4I \Rightarrow \\ \underbrace{U^{-1}U}_{=I}(U^2 - 5U + 11I) = U^{-1}(4I) \Rightarrow \\ U^2 - 5U + 11I = 4\underbrace{U^{-1}I}_{=U^{-1}} \Rightarrow \\ U^2 - 5U + 11I = 4U^{-1} \\ \boxed{U^{-1} = \frac{1}{4}(U^2 - 5U + 11I)}. \end{aligned}$$

QUESTÃO 5.

Demonstração. Se $A^{-1} = A^T$ então nós temos que

$$A^{-1} = A^T \Leftrightarrow A^{-1}A = A^T A \Leftrightarrow I = A^T A. \tag{1}$$

Sejam $a = (a_1, a_2)$ e $b = (b_1, b_2)$ vetores em $\mathbb{R}^2$ e, seja $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$. Assim, nós temos que $A^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$.

Da equação (1) nós temos que

$$A^T A = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 = 1 & (1) \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0 & (2) \\ b_1^2 + b_2^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

Sabemos que um vetor em $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito em coordenadas polares como $(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))$ onde r é a norma do vetor e θ é o ângulo que ele forma com o eixo x. Dessa forma podemos escrever

$$a = (r_1 \cos(\theta_1), r_1\,\mathrm{sen}(\theta_1)) \text{ e } b = (r_2 \cos(\theta_2), r_2\,\mathrm{sen}(\theta_2)).$$

As equações (1) e (3) implicam que $||a|| = ||b|| = 1$, logo $r_1 = r_2 = 1$. Já a equação (2) implica que a e b são ortogonais, isto é, $\theta_2 = \theta_1 \pm \frac{\pi}{2}$, dessa forma nós temos que

$$\begin{aligned} a = &\ (\cos(\theta_1), \mathrm{sen}(\theta_1)) \\ b = &\ (\cos(\theta_1 \pm \tfrac{\pi}{2}), \mathrm{sen}(\theta_1 \pm \tfrac{\pi}{2})) \end{aligned}$$

Se $b = (\cos(\theta_1 + \frac{\pi}{2}), \mathrm{sen}(\theta_1 + \frac{\pi}{2}))$ então pelas propriedades de seno e cosseno da soma de arcos nós temos que:

$$b = (-\,\mathrm{sen}(\theta_1), \cos(\theta_1)),$$

e, se $b = (\cos(\theta_1 - \frac{\pi}{2}), \mathrm{sen}(\theta_1 - \frac{\pi}{2}))$ então

$$b = (\mathrm{sen}(\theta_1), -\cos(\theta_1)).$$

Assim, $A = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\,\mathrm{sen}(\theta_1) \\ \mathrm{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{bmatrix}$ ou $A = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \mathrm{sen}(\theta_1) \\ \mathrm{sen}(\theta_1) & -\cos(\theta_1) \end{bmatrix}$ □