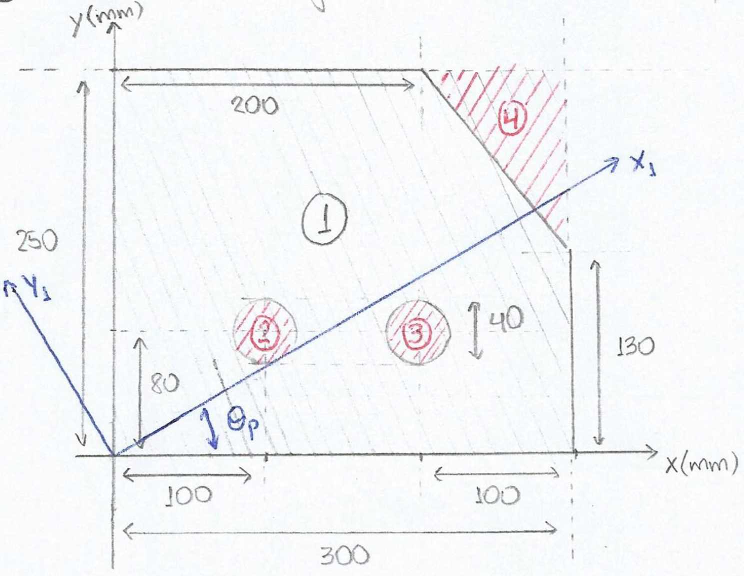
PME3210 / Mecânica dos Sólidos I

Gabarito e Resolução / Lista da Tarefa 3

① Consideramos a figura fornecida como a composição de quatro formas simples:



Matematicamente, as figuras 2, 3 e 4 terão área negativa. Com os valores dados:

$$A_1 = 75\,000 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = A_3 = -400\pi \text{ mm}^2$$

$$A_4 = -6000 \text{ mm}^2$$

Para figuras simples (retângulo e círculos) o centroide é o centro geométrico:

$$C_1 = (150, 125);\ C_2 = (100, 80);\ C_3 = (200, 80$$

Para o triângulo, o centroide é o baricentro:

$$C_4 = \left(\frac{800}{3}, 210\right)$$

Logo, na figura composta,

$$C = \frac{\sum_{i=1}^{4} A_i C_i}{\sum_{i=1}^{4} A_i} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 + \bar{x}_3 A_3 + \bar{x}_4 A_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4} \\[2ex] \bar{y} = \dfrac{\bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 + \bar{y}_3 A_3 + \bar{y}_4 A_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = 139{,}47 \text{ mm} & (0{,}5 \text{ pts}) \\ \bar{y} = 119{,}03 \text{ mm} & (0{,}5 \text{ pts}) \end{cases}$$

② a) Agora, é mais conveniente tratar 2, 3 e 4 como figuras sólidas (área positiva). Nesse caso,

$$I_x = I_{x_1} - I_{x_2} - I_{x_3} - I_{x_4};\quad I_y = I_{y_1} - I_{y_2} - I_{y_3} - I_{y_4}$$

$$I_{xy} = I_{xy_1} - I_{xy_2} - I_{xy_3} - I_{xy_4}$$

Utilizaremos o teorema dos eixos paralelos. Para o retângulo:

$$I_{x_1} = \frac{300(250)^3}{12} + A_1 \bar{y}_1^2 = 1{,}5625 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_1} = \frac{250(300)^3}{12} + A_1 \bar{x}_1^2 = 2{,}25 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy_1} = 0 + A_1 \bar{x}_1 \bar{y}_1 = 1{,}40625 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

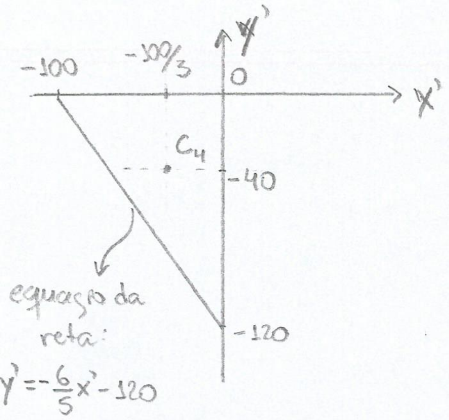
Para os círculos:

$$I_{x_2} = \frac{\pi(40)^4}{64} + A_2 \bar{y}_2^2 = 8{,}168 \cdot 10^6 \text{ mm}^4;\quad I_{x_3} = I_{x_2} = 8{,}168 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_2} = \frac{\pi(40)^4}{64} + A_2 \bar{x}_2^2 = 1{,}269 \cdot 10^7 \text{ mm}^4;\quad I_{y_3} = \frac{\pi(40)^4}{64} + A_3 \bar{x}_3^2 = 5{,}039 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy_2} = 0 + A_2 \bar{x}_2 \bar{y}_2 = 1{,}005 \cdot 10^7 \text{ mm}^4;\quad I_{xy_3} = 0 + A_3 \bar{x}_3 \bar{y}_3 = 2{,}011 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

Para o triângulo, primeiro calculamos os momentos e produto de inércia em relação ao centroide:



Com os eixos x', y', temos:

$$I_{x'} = \int_0^{-100}\int_0^{-6/5x'-120} y'^2\, dy'dx' =$$

$$= \int_0^{-100} \frac{1}{3}\left(-\frac{6}{5}x' - 120\right)^3 dx' = 1{,}44 \cdot 10^7\ mm^4$$

$$I_{y'} = \int_0^{-100}\int_0^{-6/5x'-120} x'^2\, dy'dx' =$$

$$= \int_0^{-100} -\frac{6}{5}x'^3 - 120x'^2\, dx' = 1 \cdot 10^7\ mm^4$$

$$I_{x'y'} = \int_0^{-100}\int_0^{-6/5x'-120} x'y'\, dy'dx' =$$

$$= \int_0^{-100} \frac{1}{2}x'\left(-6/5x' - 120\right)^2 dx' = 6 \cdot 10^6\ mm^4$$

Usando o teorema:

$$I_{C_{4x}} = I_{x'} - A_4(40)^2 = 4{,}8 \cdot 10^6\ mm^4$$

$$I_{C_{4y}} = I_{y'} - A_4\left(\frac{100}{3}\right)^2 = 3{,}333 \cdot 10^6\ mm^4$$

$$I_{C_{4xy}} = I_{x'y'} - A_4(-40)\left(-\frac{100}{3}\right) = -2 \cdot 10^6\ mm^4$$

Finalmente, com os eixos x, y da figura original, vem:

$$I_{x_4} = I_{C_{4x}} + A_4 \bar{y}_4^2 = 2{,}694 \cdot 10^8\ mm^4$$

$$I_{y_4} = I_{C_{4y}} + A_4 \bar{x}_4^2 = 4{,}3 \cdot 10^8\ mm^4$$

$$I_{xy_4} = I_{C_{4xy}} + A_4 \bar{x}_4 \bar{y}_4 = 3{,}34 \cdot 10^8\ mm^4$$

E, portanto, para a figura como um todo:

$I_x = 1{,}277 \cdot 10^9\ mm^4$; $I_y = 1{,}757 \cdot 10^9\ mm^4$; $I_{xy} = 1{,}042 \cdot 10^9\ mm^4$ (1,5 pts)

b) Em função dos parâmetros calculados,

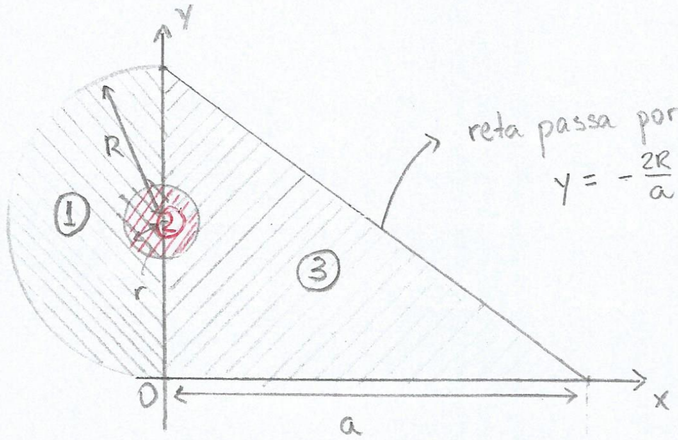
$$I_1, I_2 = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 2{,}586 \cdot 10^9\ mm^4 \\ I_2 = 4{,}477 \cdot 10^8\ mm^4 \end{cases}$$ (1,0 pts)

c) O ângulo necessário para a rotação de eixos é:

$$\tan(2\theta_p) = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \Rightarrow \theta_p = 38{,}51^\circ \text{ ou } \theta_p = 128{,}51^\circ$$

Os eixos estão representados em azul na figura da questão 1. Vemos que, com aquela figura, temos $I_1 = I_{y_1}$. Logo, o ângulo pedido é 128,51°. (0,5 pts)

③ Dividimos a figura em um semicírculo, um círculo e um triângulo:



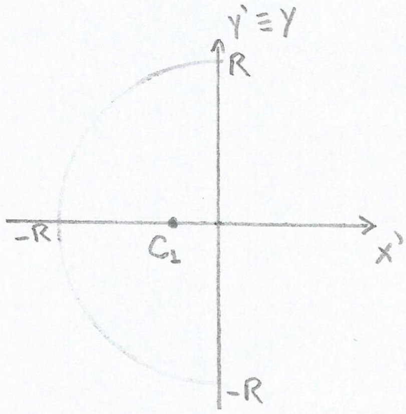
reta passa por $(0,2R)$ e $(a,0)$, logo

$$y = -\frac{2R}{a}x + 2R$$

Com essa divisão, temos:

$$I_{xy} = I_{xy_1} - I_{xy_2} + I_{xy_3}$$

Para o semicírculo, primeiramente precisamos obter o centroide C_1 e o produto de inércia em relação a ele. Considere os eixos x', y' a seguir:



O centroide é dado por

$$\bar{x}_1 = \frac{2}{\pi R^2}\iint_{①} x\,dA = \frac{2}{\pi R^2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_0^R r^2\cos\theta\,dr\,d\theta =$$

$$= \frac{2}{3\pi R^2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} R^3\cos\theta\,d\theta = \frac{2R}{3\pi}\sin\theta\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = -\frac{4R}{3\pi}$$

O eixo C_1x' é um eixo de simetria, logo,

$$I_{c_1x'y'} = 0$$

Nos eixos Oxy temos $C_1 = \left(-\frac{4R}{3\pi}, R\right)$. Dessa forma:

$$I_{xy_1} = 0 + \frac{\pi R^2}{2}\cdot\left(-\frac{4R}{3\pi}\right)\cdot R = -\frac{2}{3}R^4$$

Para o círculo,

$$I_{xy_2} = 0 + \frac{\pi r^2}{2}\cdot 0\cdot R = 0$$ (também porque Oy é eixo de simetria)

Para o triângulo,

$$I_{xy_3} = \iint_{③} xy\,dA = \int_0^a\int_0^{-\frac{2R}{a}x+2R} xy\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a x\left(-\frac{2R}{a}x + 2R\right)^2 dx =$$

$$= 2R^2\int_0^a \frac{1}{a^2}x^3 - \frac{2}{a}x^2 + x\,dx = 2R^2\left[\frac{1}{4a^2}x^4 - \frac{2}{3a}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]\Big|_0^a = \frac{1}{6}R^2a^2$$

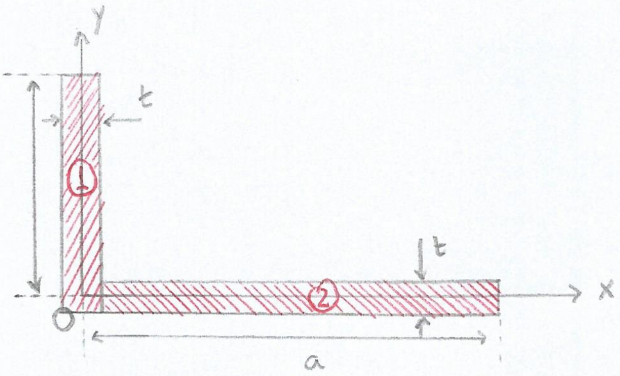
Ou seja, em função de a, o produto de inércia da figura é

$$I_{xy} = -\frac{2}{3}R^4 + \frac{1}{6}R^2a^2.$$

Para que essa grandeza seja nula, então,

$$I_{xy} = 0 \Rightarrow a^2 = 4R^2 \Rightarrow a = 2R$$ (2,0 pts)

4) Nesse caso, no qual a espessura precisa ser considerada, podemos dividir a figura em dois retângulos, conforme o esquema a seguir.



Calculamos as áreas e os centroides:

$$A_1 = t\left(b+\frac{t}{2}\right) = tb + \frac{1}{2}t^2$$

$$A_2 = t\left(a-\frac{t}{2}\right) = ta - \frac{1}{2}t^2$$

$$C_1 = \left(0, \frac{b-t/2}{2}\right) \; ; \; C_2 = \left(\frac{a+t/2}{2}, 0\right)$$

a) Dessa forma,

$$\bar{x} = \frac{\cancel{\bar{x}_1 A_1}^{\,0} + \bar{x}_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{4a^2 - t^2}{8(a+b)} \; ; \; \bar{y} = \frac{\bar{y}_1 A_1 + \cancel{\bar{y}_2 A_2}^{\,0}}{A_1 + A_2} = \frac{4b^2 - t^2}{8(a+b)}$$

(0,5 pts)

b) Considerando a fórmula exata para os momentos de inércia para os eixos centrais, e empregando o teorema dos eixos paralelos, vem:

$$I_{x_1} = \frac{1}{12}t(b+t/2)^3 + A_1\bar{y}_1^2 = \frac{1}{12}t(b+t/2)^3 + \frac{1}{4}t(b+t/2)(b-t/2)^2$$

$$I_{y_1} = \frac{1}{12}t^3(b+t/2)$$

$$I_{x_2} = \frac{1}{12}t^3(a-t/2)$$

$$I_{y_2} = \frac{1}{12}t(a-t/2)^3 + A_2\bar{x}_2^2 = \frac{1}{12}t(a-t/2)^3 + \frac{1}{4}t(a-t/2)(a+t/2)^2$$

Com isso,

Também são válidas as expressões simplificadas a partir dessas

$$I_x = I_{x_1} + I_{x_2} = \frac{1}{12}\left(t^3(a-t/2) + t(b+t/2)^3 + 3t(b+t/2)(b-t/2)^2\right)$$

$$I_y = I_{y_1} + I_{y_2} = \frac{1}{12}\left(t(a-t/2)^3 + 3t(a-t/2)(a+t/2)^2 + t^3(b+t/2)\right)$$

Os eixos Oy e Ox são eixos de simetria para 1 e 2, respectivamente. Logo:

$$I_{xy_1} = I_{xy_2} = 0 \Rightarrow I_{xy} = 0$$

(0,5 pts)

c) O produto de inércia é nulo, logo os momentos principais são I_x e I_y.

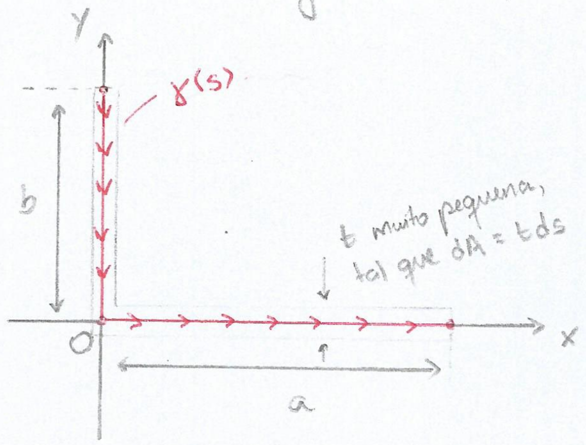
$$I_1 = \max\{I_x, I_y\} \; ; \; I_2 = \min\{I_x, I_y\}.$$

(0,5 pts)

d) O ângulo será 0 ou 90°, dependendo de qual entre I_x e I_y for maior.

(0,5 pts)

⑤ Com base na figura anterior, a curva a ser adotada é a curva γ a seguir:



Com isso, a área total da figura é:

$$A = \iint dA = \int_\gamma t\, ds$$

Mas podemos dividir a integral em dois trechos:

$$A = t\left(\int_b^0 (-dy) + \int_0^a dx\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = t(a+b)$$

As coordenadas do centroide, então, se obtém por:

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\iint x\, dA = \frac{t}{A}\int_\gamma x(s)\, ds = \frac{t}{A}\left(\int_b^0 \cancel{0(-dy)}^{\,0} + \int_0^a x\, dx\right) = \frac{a^2}{2(a+b)}$$ (0,5 pts)

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\iint y\, dA = \frac{t}{A}\int_\gamma y(s)\, ds = \frac{t}{A}\left(\int_b^0 y(-dy) + \int_0^a \cancel{0\, dx}^{\,0}\right) = \frac{b^2}{2(a+b)}$$

Da mesma forma, temos os momentos de inércia:

$$I_x = \iint y^2 dA = t\int_\gamma (y(s))^2 ds = t\left(\int_b^0 y^2(-dy) + \int_0^a \cancel{0\, dx}^{\,0}\right) = \frac{1}{3}tb^3$$ (0,5 pts)

$$I_y = \iint x^2 dA = t\int_\gamma (x(s))^2 ds = t\left(\int_b^0 \cancel{0(-dy)}^{\,0} + \int_0^a x^2 dx\right) = \frac{1}{3}ta^3$$

Por simetria, o produto de inércia I_{xy} é nulo (o que também pode ser verificado pois $xy = 0$ ao longo da curva γ).

Da mesma forma,

$$I_1 = \max\{I_x, I_y\}, \quad I_2 = \min\{I_x, I_y\}$$ (0,5 pts)

e o ângulo entre Ox e o eixo de maior inércia será 0 (se $b \geq a$) ou $90°$ (se $b < a$).
(0,5 pts)

⑥ Com as fórmulas obtidas, os cálculos levam aos valores a seguir. Nota-se que os desvios são menores para a menor espessura considerada, conforme esperado.

		$\bar{x}$ (mm)	$\bar{y}$ (mm)	I_x (mm^4)	I_y (mm^4)
Item a) $a = 200$ mm, $b = 120$ mm, $t = 25$ mm	Exato	62,256	22,256	$1,466 \cdot 10^7$	$6,682 \cdot 10^7$
	Aproximado	62,5	22,5	$1,440 \cdot 10^7$	$6,667 \cdot 10^7$
	Desvio	0,39%	1,10%	−1,77%	−0,22%
Item b) $a = 200$ mm, $b = 120$ mm, $t = 12$ mm	Exato	62,444	22,444	$6,941 \cdot 10^6$	$3,202 \cdot 10^7$
	Aproximado	62,5	22,5	$6,912 \cdot 10^6$	$3,2 \cdot 10^7$
	Desvio	0,09%	0,25%	−0,42%	−0,06%
Item c) $a = 200$ mm, $b = 120$ mm, $t = 6$ mm	Exato	62,486	22,486	$3,460 \cdot 10^6$	$1,6002 \cdot 10^7$
	Aproximado	62,5	22,5	$3,456 \cdot 10^6$	$1,6 \cdot 10^7$
	Desvio	0,02%	0,06%	−0,12%	−0,01%

(1,0 pts)