MÁXIMOS E MÍNIMOS

DEF: Sejam $f: D_f \to \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in D_f$

i) Seja $A \subset D_f$ com $x_0 \in A$. Dizemos que x_0 é ponto de máximo (mínimo) da f em A se:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x_0) \leq f(x)), \ \forall x \in A$$

$f(x_0)$ é chamado do valor máximo (mínimo) da f em A

ii) Dizemos que x_0 é ponto de máximo (mínimo) global de f se x_0 é ponto de máximo (mínimo) da f em D_f, isto é,

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x_0) \leq f(x)), \ \forall x \in D_f$$

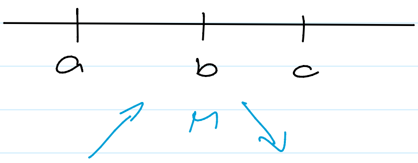
$f(x_0)$ é chamado de valor máximo (mínimo) global da f.

iii) Dizemos que x_0 é ponto de máximo (mínimo) local da f se existe $r>0$ tal que x_0 é ponto de máximo (mínimo) da f em $]x_0-r, x_0+r[\cap D_f$, isto é,

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x_0) \leq f(x)), \ \forall x \in \,]x_0-r, x_0+r[\cap D_f$$

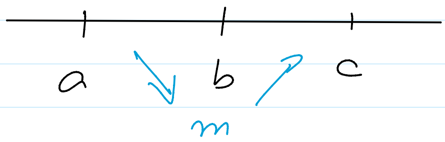
OBS: Se x_0 é ponto de máximo (mínimo) global de f, então x_0 é ponto de máximo (mínimo) local de f.
Claramente a recíproca não é verdadeira.

Se f é crescente em $]a,b]$ e decrescente em $[b,c[$, então b é ponto de máximo de f em $]a,c[$



Neste caso podemos dizer que b é ponto de máximo local de f.

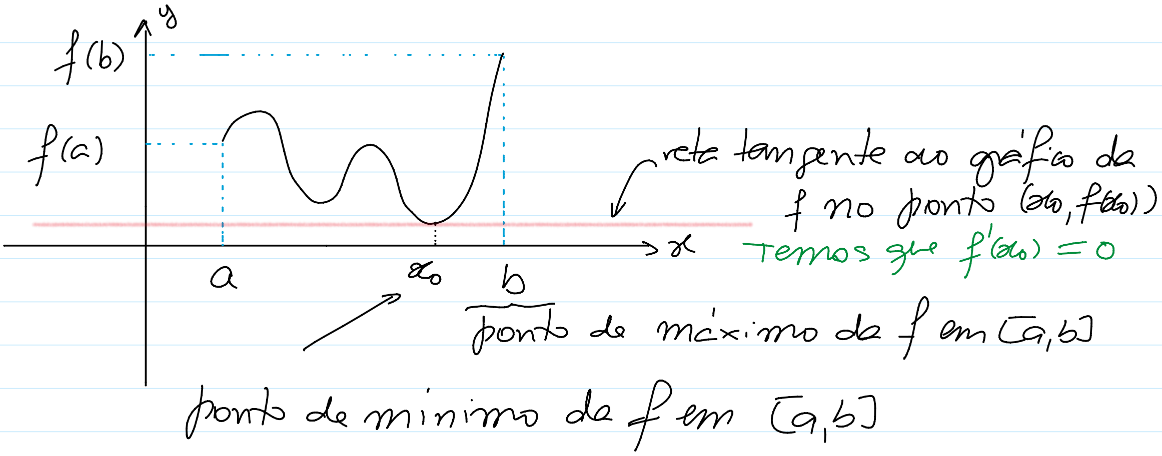
Se f é decrescente em $]a,b]$ e crescente em $[b,c[$, então b é ponto de mínimo da f em $]a,c[$



Neste caso podemos dizer que b é ponto de mínimo local de f.

Teorema Weierstrass: Se $\boxed{f \text{ é contínua em } [a,b]}$, então f tem pontos de máximo e mínimo em $[a,b]$, isto é, existem $x_0, x_1 \in [a,b]$ tais que

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1), \ \forall x \in [a,b]$$



f é derivável em $]a,b[$

PROPOSIÇÃO: Seja f definida no intervalo $\boxed{\text{aberto } I}$.

Suponhamos que $x_0 \in I$ e:

i) f é derivável em x_0;

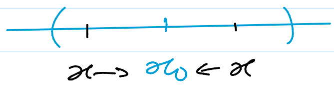
ii) x_0 é ponto de máximo (mínimo) da f em I.

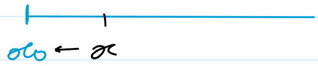
Nestas condições x_0 é ponto crítico da f, isto é, $f'(x_0) = 0$.

Dem: Temos que $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in I$

$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$ existe e é um número real

Como I é um intervalo aberto e $x_0 \in I$, então podemos calcular os limites laterais





Temos que $f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0^+ \\ x > x_0}} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{> 0}} \leq 0$, $\quad \begin{matrix} f(x) - f(x_0) \leq 0 \\ x - x_0 > 0 \end{matrix}$

$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0^- \\ x < x_0}} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{< 0}} \geq 0$, $\quad \begin{matrix} f(x) - f(x_0) \leq 0 \\ x - x_0 < 0 \end{matrix}$

$\Longrightarrow f'(x_0) \leq 0$ e $f'(x_0) \geq 0 \Longrightarrow f'(x_0) = 0$

Analogamente se x_0 é ponto de mínimo de f em I.

OBS: Seja f contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$

Pelo Teorema de Weierstrass existem $x_0 \in [a,b]$ ponto de mínimo de f em $[a,b]$ e $x_1 \in [a,b]$ ponto de máximo de f em $[a,b]$

Se $x_0 \in\ ]a,b[$, então $f'(x_0) = 0$

Se $x_1 \in\ ]a,b[$, então $f'(x_1) = 0$

Exemplos: Determinar o máximo e o mínimo de f, se existirem

Exemplos: Determinar o máximo e o mínimo da f, se existirem nos intervalos dados

1) $f(x) = x^3 - 3x - 2$ em $[-1,3]$

f é contínua em $[-1,3]$ logo f tem pontos de máximo e mínimo em $[-1,3]$, isso pelo Teorema de Weierstrass

se o ponto de máximo ou de mínimo estiver em $]-1,3[$ então eles serão pontos críticos

Determinemos os pontos críticos da f em $]-1,3[$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$1 \in]-1,3[$$

$$-1 \notin]-1,3[$$

os candidatos a pontos de máximo e mínimo da f em $[-1,3]$

são: $\underset{\text{ponto crítico em }]-1,3[}{1}$, $\underbrace{-1 \text{ e } 3}_{\text{extremos do intervalo } [-1,3]}$

$f(1) = 1 - 3 - 2 = -4$ mínimo

$f(-1) = -1 + 3 - 2 = 0$

$f(3) = 27 - 9 - 2 = 16$ máximo

1 é ponto de mínimo da f em $[-1,3]$, cujo valor mínimo é -4

3 é ponto de máximo da f em $[-1,3]$, cujo valor máximo é 16

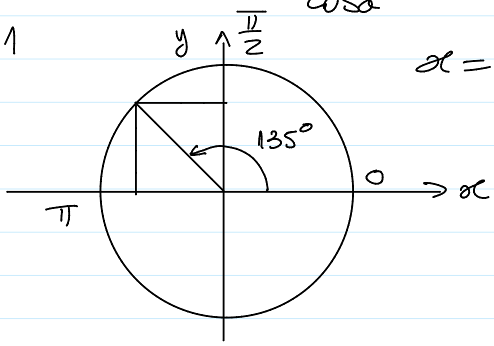
2) $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$ em $[0, \pi]$

$f'(x) = \cos x + \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \cos x \neq 0$ e $\operatorname{sen} x \neq 0$, pois $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$

$\Rightarrow -\cos x = \operatorname{sen} x \Rightarrow -1 = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$, $x \in [0, \pi]$

$\Rightarrow -\cos x = \operatorname{sen} x \Rightarrow -1 = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x \,,\ x \in [0,\pi]$

$\Rightarrow \operatorname{tg} x = -1$



$x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \in]0,\pi[$

os candidatos a pontos de máximo e mínimo de f em $[0,\pi]$

são: $\frac{3\pi}{2}$, 0 e π

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ máximo

$f(0) = \operatorname{sen}(0) - \cos(0) = -1$ mínimo

$f(\pi) = \operatorname{sen}(\pi) - \cos(\pi) = 1$

$\frac{3\pi}{2}$ é ponto de máximo de f em $[0,\pi]$, cujo valor máximo é $\sqrt{2}$

0 é ponto de mínimo de f em $[0,\pi]$, cujo valor mínimo é -1

3) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x \,,\ x \in \left[\frac{1}{2}, 4\right]$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{\overset{0}{1'} \cdot x - 1 \cdot x'}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = 0$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)x^{-1-1} = \frac{-1}{x^2}$

$\Rightarrow \frac{-1+x}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1 \in \left]\frac{1}{2}, 4\right[$

$\log_a 1 = b \Rightarrow a^b = 1 = a^0$

$\Rightarrow a^b = a^0 \Rightarrow b = 0$

$f(1) = 1 + \overset{0}{\ln 1} = 1$ mínimo

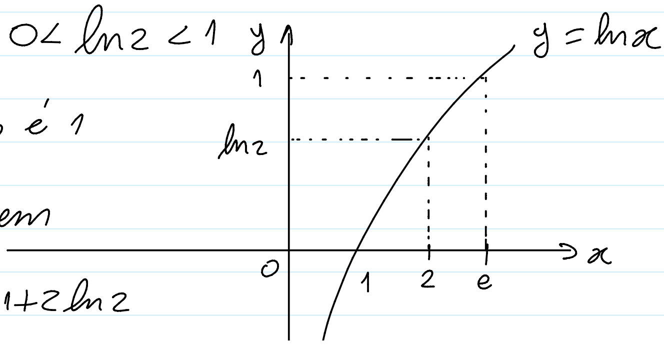
$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \overset{0}{\ln 1} - \ln 2 = 2 - \ln 2 > 1$

$f(4) = 1 + \ln 4 = 1 + \ln 2^2 = 1 + 2\ln 2$ máximo

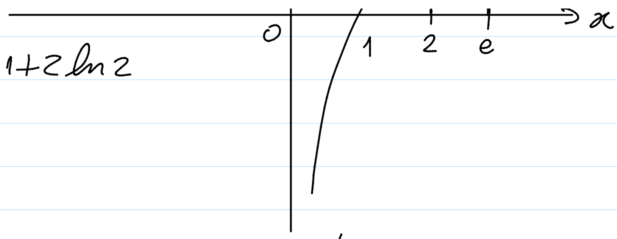
$0 < \ln 2 < 1$

1 é o ponto de mínimo de f em $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$, cujo valor mínimo é 1

4 é o ponto de máximo de f em $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$, cujo valor máximo é $1+2\ln 2$



$[\frac{1}{2}, 4]$, cujo valor máximo é $1+2\ln 2$

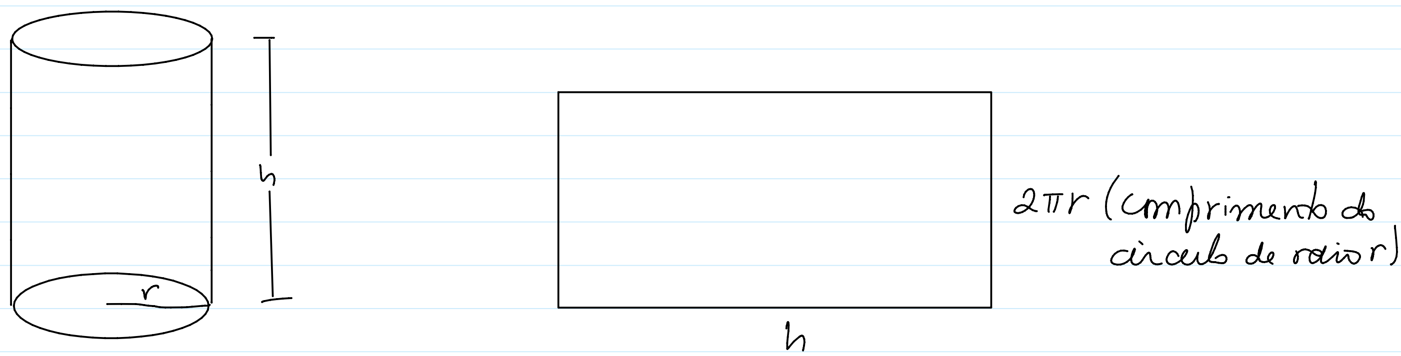


Quando que máximo (mínimo) local é global?

PROPOSIÇÃO: Suponhamos que f é derivável no intervalo aberto I e $x_0 \in I$ é o único ponto crítico de f em I.

Se x_0 é ponto de máximo (mínimo) local de f em I, então x_0 é ponto de máximo (mínimo) de f em I.

Exemplo: Latas cilíndricas fechadas devem ser feitas com um volume V especificado. Qual a razão entre a altura e o diâmetro da base que minimiza a quantidade de metal gasto para fazer a lata



(fixo) $V = \pi r^2 h \Rightarrow \boxed{h = \dfrac{V}{\pi r^2}}$, $r > 0$

área $\quad A(r,h) = \pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi r h$, $r > 0$ e $h > 0$

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi \cancel{r} \cdot \frac{V}{\pi \cancel{r^2}} = 2\pi r^2 + \underbrace{\frac{2V}{r}}_{= 2V \cdot \frac{1}{r}}, \quad r > 0$$

Tenho que estudar o mínimo de $A(r)$ em $]0,+\infty[$

$$A'(r)=0 \Rightarrow 2\pi r-\frac{2V}{r^2}=0 \Rightarrow \pi r^3-V=0$$

$$\Rightarrow r^3=\frac{V}{\pi} \Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

$\Rightarrow A(r)$ tem um único ponto crítico em $]0,+\infty[$

$$A'(r)=2\pi r-\frac{2V}{r^2}=\frac{2\pi r^3-2V}{r^2}=\frac{2\pi\left(r^3-\frac{V}{\pi}\right)}{r^2}$$

$$y=r^3-\frac{V}{\pi}=\left(r-\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)\underbrace{\left(r^2-\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\,r+\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)^2\right)}_{>0}$$

0		$\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$	
	$-$		$+$

$y=r^2>0$

$A'(r)$	0		$\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$	
		$-$		$+$
		$\searrow$	m.l	$\nearrow$

$\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ é ponto de mínimo local da $A(r)$, como ele é o único ponto crítico da $A(r)$ em $]0,+\infty[$, então $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ é ponto de mínimo da $A(r)$ em $]0,+\infty[$.

Calculemos a altura do cilindro para $r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$

$$h=\frac{V}{\pi r^2}=\frac{V}{\pi}\cdot\frac{1}{r^2}=\frac{V}{\pi}\sqrt[3]{\frac{\pi^2}{V^2}}=\frac{V^{1-\frac{2}{3}}}{\pi^{1-\frac{2}{3}}}=\frac{V^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}}=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

$$\frac{h}{2r}=\frac{1}{2}\cdot h\cdot\frac{1}{r}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\pi}{V}}=\frac{1}{2}$$ (não depende de V)