Splines Interpolantes

Elias S. Helou Neto

- Dados $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$

- Dados $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$
- Encontrar $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que
  - $s(x_i) = y_i$ para $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$

- Dados $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$
- Encontrar $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que
    - $s(x_i) = y_i$ para $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$
    - para $x \in [x_i, x_{i+1})$, $s(x) = p_i(x)$ onde p_i é polinômio de grau $\leq k$

- Dados $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$
- Encontrar $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que
  - $s(x_i) = y_i$ para $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$
  - para $x \in [x_i, x_{i+1})$, $s(x) = p_i(x)$ onde p_i é polinômio de grau $\leq k$
  - $s^{(j)}$ é contínua para $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ em $[x_0, x_n]$

- Podemos interpolar um número arbitrário de pontos com polinômios de grau baixo

- Podemos interpolar um número arbitrário de pontos com polinômios de grau baixo
- Aumentar o grau dos polinômios aumenta a suavidade da interpolação

- para $x \in [x_i, x_{i+1})$,

$$\begin{aligned} s(x) = p_i(x) = \\ & A_{i,0} + A_{i,1}(x - x_i) + A_{i,2}(x - x_i)^2 \\ & \qquad + \cdots + A_{i,k}(x - x_i)^k \\ & i \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \end{aligned}$$

Splines Interpolantes

Cálculo

- para $x \in [x_i, x_{i+1})$,

$$
\begin{aligned}
s(x) = p_i(x) = \\
& A_{i,0} + A_{i,1}(x - x_i) + A_{i,2}(x - x_i)^2 \\
& \qquad + \cdots + A_{i,k}(x - x_i)^k \\
& i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}
\end{aligned}
$$

- $s(x_i) = y_i$

Splines Interpolantes

Cálculo

- para $x \in [x_i, x_{i+1})$,

$$\begin{aligned} s(x) = p_i(x) = & \\ & A_{i,0} + A_{i,1}(x - x_i) + A_{i,2}(x - x_i)^2 \\ & \qquad + \cdots + A_{i,k}(x - x_i)^k \end{aligned}$$

$$i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

- $s(x_i) = y_i \Leftrightarrow p_i(x_i) = y_i$

Splines Interpolantes
Cálculo

- para $x \in [x_i, x_{i+1})$,

$$s(x) = p_i(x) = A_{i,0} + A_{i,1}(x - x_i) + A_{i,2}(x - x_i)^2 + \cdots + A_{i,k}(x - x_i)^k$$

$$i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

- $s(x_i) = y_i \Leftrightarrow p_i(x_i) = y_i \Leftrightarrow A_{i,0} = y_i$

$$i \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

Splines Interpolantes

Cálculo

- para $x \in [x_i, x_{i+1})$,

$$
\begin{aligned}
s(x) = p_i(x) = & \\
& A_{i,0} + A_{i,1}(x - x_i) + A_{i,2}(x - x_i)^2 \\
& \qquad + \cdots + A_{i,k}(x - x_i)^k
\end{aligned}
$$

$$i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

- $s(x_i) = y_i \Leftrightarrow p_i(x_i) = y_i \Leftrightarrow A_{i,0} = y_i$

$$i \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

- $p_i^{(j)}(x_{i+1}) = p_{i+1}^{(j)}(x_{i+1})$,

$$(i, j) \in \{0, 1, \ldots, n-2\} \times \{0, 1, \ldots, k-1\}$$

- $(k+1)n$ coeficientes

- $(k+1)n$ coeficientes

- $n+1$ interpolações

Splines Interpolantes

Cálculo

- $(k+1)n$ coeficientes
- $n+1$ interpolações
- $k(n-1)$ continuidades

- $(k+1)n$ coeficientes
- $n+1$ interpolações
- $k(n-1)$ continuidades
- $(k+1)n$ incógnitas e $(k+1)(n-1)+2$ equações

- $(k+1)n$ coeficientes
- $n+1$ interpolações
- $k(n-1)$ continuidades
- $(k+1)n$ incógnitas e $(k+1)(n-1)+2$ equações
- $k-1$ incógnitas "sobrando"

- Se $k = 0$ falta um coeficiente

- Se $k = 0$ falta um coeficiente
- Uma interpolação deveria deixar de ser feita

- Se $k = 0$ falta um coeficiente
- Uma interpolação deveria deixar de ser feita
- Descontínua

- Se $k = 0$ falta um coeficiente
- Uma interpolação deveria deixar de ser feita
- Descontínua
- Não é utilizado

- Se $k = 1$ (linear por partes)

- Se $k = 1$ (linear por partes)
- Contínua

- Se $k = 1$ (linear por partes)
- Contínua
- Número de equações igual ao de incógnitas

Splines Interpolantes

Exemplo $k = 1$

- $p_i(x) = A_i + B_i(x - x_i)$

- $p_i(x) = A_i + B_i(x - x_i)$
- $p_i(x_i) = y_i \Leftrightarrow A_i = y_i$

- $p_i(x) = A_i + B_i(x - x_i)$
- $p_i(x_i) = y_i \Leftrightarrow A_i = y_i$
- $p_i(x_{i+1}) = p_{i+1}(x_{i+1})$

- $p_i(x) = A_i + B_i(x - x_i)$
- $p_i(x_i) = y_i \Leftrightarrow A_i = y_i$
- $A_i + B_i h_i = A_{i+1}$

- $p_i(x) = A_i + B_i(x - x_i)$
- $p_i(x_i) = y_i \Leftrightarrow A_i = y_i$
- $B_i = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$

- $p_i(x) = A_i + B_i(x - x_i)$
- $p_i(x_i) = y_i \Leftrightarrow A_i = y_i$
- $B_i = \dfrac{v_i}{h_i}$

- Se $k = 2$ (quadrática)

- Se $k = 2$ (quadrática)
- Derivada contínua

- Se $k = 2$ (quadrática)
- Derivada contínua
- Sobra uma incógnita

- Se $k = 2$ (quadrática)
- Derivada contínua
- Sobra uma incógnita
- Não usada (assimetria)

- Se $k = 3$ (cúbica por partes)

- Se $k = 3$ (cúbica por partes)
- Segunda derivada contínua

- Se $k = 3$ (cúbica por partes)
- Segunda derivada contínua
- Sobram duas incógnitas

- Se $k = 3$ (cúbica por partes)
- Segunda derivada contínua
- Sobram duas incógnitas
- Restrições "naturais":

$$s''(x_0) = s''(x_n) = 0$$

Splines Interpolantes
Exemplo

Reunindo todas as equações chegamos ao sistema linear

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{h_0} & \frac{2}{h_0} & & & & & \\ \frac{1}{h_0} & \frac{2}{h_0}+\frac{2}{h_1} & \frac{1}{h_1} & & & & \\ & \frac{1}{h_1} & \frac{2}{h_1}+\frac{2}{h_2} & \frac{1}{h_2} & & & \\ & & \frac{1}{h_2} & \frac{2}{h_2}+\frac{2}{h_3} & \frac{1}{h_3} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{h_{n-2}} & \frac{2}{h_{n-2}}+\frac{2}{h_{n-1}} & \frac{1}{h_{n-1}} \\ & & & & & \frac{2}{h_{n-1}} & \frac{4}{h_{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6v_0}{h_0^2} \\ \frac{3v_0}{h_0^2}+\frac{3v_1}{h_1^2} \\ \frac{3v_1}{h_1^2}+\frac{3v_2}{h_2^2} \\ \vdots \\ \frac{3v_{n-2}}{h_{n-2}^2}+\frac{3v_{n-1}}{h_{n-1}^2} \\ \frac{6v_{n-1}}{h_{n-1}^2} \end{pmatrix}$$