# $6^a$ Lista de exercícios - Gabarito

Intr. à Relatividade

① [2.0] Utilizando as simetrias do tensor de Riemman, mostre que o tensor de Riemann de um espaço maximamente simétrico pode ser escrito como:

$$R_{ijkl} = \frac{R}{6}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \tag{1}$$

**Solução:** O tensor de Riemann num espaço maximamente simétrico deve ter as componentes inalteradas por uma transformação de Lorentz. Portanto, o tensor de Riemann nesse espaço deve ser proporcional a um tensor que seja invariante por transformações de Lorentz. Temos, então, 3 possibilidades: a métrica, a delta de Kronecker e o tensor de Levi-Civita. Mas para que as simetrias do tensor de Riemann sejam respeitadas, um momento de reflexão revela que a única possibilidade é que o tensor de Riemann seja proporcional à combinação da métrica:

$$R_{ijkl} \propto g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}. \tag{2}$$

Contraindo ambos os lados duas vezes produz, em 3 dimensões:

$$R_{ijkl} = \frac{R}{6}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \tag{3}$$

② [2.0] Use a métrica FLRW:

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a(t)^2\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2}. \tag{4}$$

e o fato de que um fóton percorre uma geodésica nula para encontrar a relação entre o fator de escala em dois instantes diferentes e o redshift. Comece imaginando que uma crista de uma onda luminosa é emitido por uma fonte em $r$ num instante inicial $t_0$, seguido da emissão de uma segunda crista $\delta t_0$ depois. Assuma que um observador detecta a luz emitida pela fonte em $r = 0$. O redshift sofrido pelo fóton significa que alguma energia foi perdida?

**Solução:** Ao longo de geodésicas radiais nulas, temos:

$$\frac{dt}{a(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}. \tag{5}$$

Considere a emissão de duas cristas subsequentes, uma emitida no instante $t_0$ e recebida em $t_1$, e outra emitida e recebida nos instantes $t_0+\delta t_0$ e $t_1+\delta t_1$. Deste modo,

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{r_1}^{0} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}. \tag{6}$$

Assumindo que $\delta t_{0,1} \ll \frac{a}{\dot{a}}$, obtemos:

$$\frac{\delta t_0}{a\left(t_0\right)} = \frac{\delta t_1}{a\left(t_1\right)}. \tag{7}$$

Uma vez que $\delta t_{0,1} = 1/\nu_{0,1}$, então:

$$1+z = \frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{a\left(t_0\right)}{a\left(t_1\right)}. \tag{8}$$

Portanto, o fóton recebido possui um redshift com respeito ao fóton emitido. Isso não significa que o fóton perdeu energia, mas sim que, em um Universo em expansão, espaço está constantemente sendo criado entre duas cristas consecutivas e, portanto, a comprimento de onda do fóton deve aumentar para que a sua energia seja conservada.

③ [2.0] Usando as equações de Friedmann na forma:

$$-\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = \frac{1}{2}\sum_j (1+3w_j)\Omega_j \tag{9}$$

e

$$\frac{m\dot{a}^2}{2} + V(a) = 0, \tag{10}$$

onde $\Omega_j = (\frac{H_0}{H})^2 \Omega_{j,0} a^{-3(1+w_j)}$, com $j = m, \Lambda$ e $k$, $m \equiv 2/H_0^2$ e

$$V(a) \equiv -\left(\frac{\Omega_{m,0}}{a} + \Omega_{\Lambda,0}a^2 + \Omega_{k,0}\right), \tag{11}$$

com $\Omega_k = 1 - (\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0})$, encontre as regiões no plano $\Omega_m - \Omega_\Lambda$ onde (i) o fator de escala se expande de forma acelerada ou desacelerada (ii) o Universo é aberto ou fechado (iii) o Universo se expande indefinidamente ou eventualmente recolapsa. Existe alguma situação na qual nunca houve um Big Bang? *Dica: é útil esboçar a forma de $V(a)$ em cada situação. Lembre-se que hoje $\dot{a} > 0$ e $a = 1$.*

**Solução:** (i) Pela equação (10) é imediato que $\ddot{a}$ só é positivo se

$$\Omega_\Lambda > \frac{1}{2}\Omega_m. \tag{12}$$

No nosso Universo, portanto, o fator de escala se expande de forma acelerada.

(ii) Para que o Universo seja plano, $\Omega_k$ deve ser nulo. Poranto, a curva que separa um universo aberto ($\Omega_k < 0$) de um universo fechado ($\Omega_k > 0$) é dada por

$$\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m.$$

(iii) A equação (10) sugere que podemos tratar esse problema como o movimento unidimensional de uma partícula de energia zero sujeita ao potêncial $V(a)$. Pela equação (11) vemos que esse potêncial pode ser de 3 tipos, dependendo dos valores de $\Omega_\Lambda$ e $\Omega_m$. A figura (1) ilustra esses 3 tipos. No primeiro tipo (acima, esquerda) o fator de escala vêm de zero e atualmente está aumentando ($\dot{a} > 0$), até atingir $V(a) = 0$, onde a sua velocidade se anula (a "partícula"possui energia nula) e então volta a se contrair. Portanto, nessa situação o Universo se expande hoje e eventualmente recolapsa. No segundo tipo (acima, direita), o Universo se expande para sempre. No terceiro caso (abaixo), atualmente o Universo está expandindo e nunca ouve um Big Bang, pois $V(a) = 0$ acontece para $a < 1$. Portanto, se a energia escura for dominante o suficiente, o Universo nunca experienciou um Big Bang.

Para encontrar a curva que separa um universo que se expande para sempre de um universo que se expande e depois se contrai, precisamos encontrar a situação na qual $V(a_{max}) = 0$ e $V'(a_{max}) = 0$, onde $a_{max}$ é o valor do fator de escala no qual o potêncial é máximo. Por conveniência, vamos dividir (10) por $\Omega_m$:

$$V(a) = -a^{-1} - 4x^3a^2 - \left(s - 4x^3\right). \tag{13}$$

Na equação acima, $x \equiv \left(\frac{\Omega_\Lambda}{4\Omega_m}\right)^{\frac{1}{3}}$ e $s \equiv \frac{1-\Omega_{\rm m}}{\Omega_{\rm m}}$. A condição $V(a_{max}) = 0$ nos dá $a_{max} = \frac{1}{2x}$. Substituindo $a_{max}$ em (13) produz:

$$V\left(a_{\rm max}\right) = 4x^3 - 3x - s. \tag{14}$$

Portanto, a curva que separa a situação de um universo que se expande pra sempre de um universo que recolapsa pode ser encontrada resolvendo a equação algébrica $4x^3 - 3x - s = 0$.

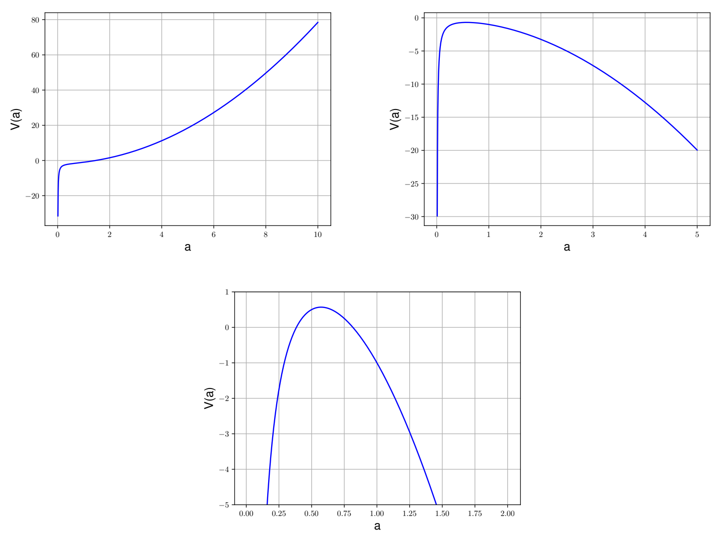


Figura 1: O comportamento do potêncial $V(a)$ nas situações $(\Omega_m, \Omega_\Lambda) = (0.3, -0.8)$ (acima, esquerda), $(0.3, 0.8)$ (acima, direita) e $(4, 1.5)$ (abaixo).

④ [2.0] Com futuros detectores de ondas gravitacionais será possível obter informação do Universo em até redshift z $\sim$ 10, como o Riccardo Sturani comentou em aula. Neste exercício, vamos procurar ter alguma idéia de o quanto para trás no tempo poderemos "ver" com as ondas gravitacionais.

a) A partir da definição do parâmetro de Hubble:

$$H \equiv \dot{a}/a = H_0\sqrt{\Omega_m a^{-3} + \Omega_r a^{-4} + \Omega_\Lambda}, \tag{15}$$

, da relação entre o redshift $z$ e o fator de escala:

$$a(z) = \frac{1}{1+z} \tag{16}$$

e sabendo que a era da dominação de energia escura começa a aproximadamente 4 bilhões de anos atrás (antes disso o Universo foi dominado por matéria[1]), esboçe um gráfico do redshift em função do tempo e responda: em redshift aproximadamente 10 corresponde a quanto tempo atrás? (Use que $\Omega_m = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$ e $H_0 = 70Km/s/Mpc$)

**Solução:** Esse exercício pode ser resolvido resolvendo numéricamente a integral

$$t(z) = -\int_z^0 \frac{dz}{(1+z)H(z)}, \tag{17}$$

que segue trivialmente de 15. A figura (2) mostra o resultado numérico da integral acima. O código que gera esse grático está público [2]. Como output esse código mostra quanto tempo atrás foi emitida a luz de um fóton que sofreu o redshift $z$. Obtemos que um fóton com redshift $z = 10$ foi emitido quando o Universo tinha apenas 1.12 bilhões de anos.

b) Pelo o ítem a) sabemos que a maior parte do tempo da evolucão do Universo está compreendida em baixos redshifts. Dê uma explicação *qualitativa* para esse fato.

**Solução:** Portanto, grandes variações no tempo cósmico correspondem à variações modestas no redshift. Isso acontece porque o valor de $H_0$ é muito pequeno. Em unidades de $Gy^{-1}$, $H_0 \simeq 0.07$. Isso significa que a cada Megaparsec, espaço é criado a uma taxa de 70 $Km/s$. Quanto mais próximo de nós, portanto, menos relevante é essa "criação de espaço". Quando o Universo foi dominado por radiação ($\simeq$ 47000 anos após o Big Bang),

$$dz \simeq dtH_0\sqrt{\Omega_r}(1+z)^3 \tag{18}$$

e portanto para redshifts altos $dz$ vai se tornar grande com variações em $dt$. É por isso que a maior parte da história do Universo está compreendida em baixos redshifts.

[1] O Universo também foi dominado por radiação desde depois da inflação até aproximadamente 47000 anos depois do Big Bang

[2] github.com/RenanBoschetti/cosmic_calculator/tree/master

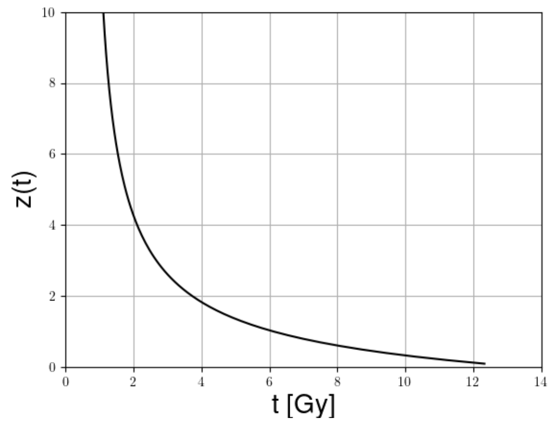


Figura 2: Redshift em função do tempo cosmico em unidades de $Gy$.

c) Imagine dois corpos que estão longe de qualquer coisa e possuem atração gravitacional mútua despresível. Se a distância física entre esses dois corpos for, digamos, a distância entre a Terra e o Sol, então a luz que sair de um deles e for detectada pelo outro não sofrerá nenhum redshift devido a expansão. Explique *qualitativamente* esse fato e estime a ordem de grandeza que o parâmetro de Hubble precisaria ter para que esse redshift fosse da ordem de $10^{-1}$. *Dica: Nesse ítem você pode assumir um universo dominado pela constante cosmológica.*

**Solução:** Como dito na solução do ítem anterior, a taxa com a qual espaço é criado só é relevante em distâncias muito grandes. A princípio, o redshift da luz que chega num observador vinda de uma fonte a uma distância equivalente à distância entre a terra e o sol existe, mas é muito pequeno se a taxa de expansão $H_0$ for como nós a observamos e, portanto, indetectável.

Num universo dominado por constante cosmológica, podemos calcular qual deveria ser o valor do parâmetro de Hubble para que o redshift na situação acima fosse da ordem de 0.1 como:

$$D = \frac{c}{H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \int_0^{0.1} dz, \tag{19}$$

onde $D$ é a distância entre a Terra e o Sol. Usando os valores numéricos de $c$, $D$ e $\Omega_\Lambda$ obtemos

$$H_0 \sim 10^{16} Km/s/Mpc. \tag{20}$$

d) Agora estime a ordem de grandeza que o parâmetro de Hubble precisaria ter para que os elétrons fossem arrancados dos átomos de hidrogênio. *Dica: você só precisa calcular a equação da geodésica para um universo de de Sitter.*

**Solução:** Esse ítem diz respeito ao chamado "big rip", que é a destruíção de todas as estruturas do Universo devido à expansão.

Para que isso aconteça, a expansão deve gerar uma aceleração efetiva que seja maior do que a aceleração que o elétron sente devido à força de Coulomb. Vamos ignorar o movimento do elétron em volta do próton (modelo de Bohr) e verificar o que acontece na direção radial. Escrevendo a equação da geodésica para uma métrica FLRW em 2D $ds^2 = -c^2dt^2 + a(t)^2dr^2$, obtemos:

$$\frac{dv^r}{d\tau} = -H(t)v^r, \tag{21}$$

onde $v^r = dr/d\tau$ e $H(t)$ é o parâmetro de Hubble. Como foi discutido em aula, esse resultado nos diz que, se a velocidade inicial na direção radial for nula, então nada vai acontecer. A única maneira de gerar uma aceleração efetiva devido à expansão é fazer com que o parâmetro de Hubble seja infinito!

Surpreendentemente isso é possível, desde que a equação de estado da energia escura seja $w < -1$. É fácil ver isso pela equação de Friedmann (15). Negligenciando os termos de matéria e radiação, obtemos que

$$a(t)^{\frac{3(1+w)}{2}} = \frac{3}{2} H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda} |1 + w| (t - t_0) + 1, \tag{22}$$

onde $t_0$ é hoje. Ou seja, para $w < -1$ e

$$t_0 - t_{rip} = \frac{2}{3} H_0^{-1} \Omega_\Lambda^{-1/2} |1 + w|^{-1} \tag{23}$$

o fator de escala e, portanto, $H(t)$, explodem para infinito em um tempo finito. Por exemplo, para $w = -3/2$ e $H_0 = 70$ o big rip acontece em 22 $Gyr$.

No passado foi especulado que a energia escura tivesse $w < -1$ . Hoje sabemos, através de vínculos observacionais, que a equação de estado da energia escura é muito próxima de -1 (com um erro de $\sim 5\%$). Portanto, é muito improvável que o nosso Universo termine em um big rip.

⑤ [2.0] Em 1920 o físico e astrônomo Holandês Willem de Sitter encontrou uma solução muito interessante das equações de Friedmann. Ele considerou um universo contendo uma única componente (a *Constante Cosmológica (CC)* $\Lambda$), cuja densidade de energia é uma constante, $\rho_\Lambda$ =const. Esse modelo de *de Sitter* tem algumas peculiaridades: ele se expande para sempre de modo exponencial, e não há nem um início nem um fim, ou seja, $-\infty < t < \infty$.

a) Mostre que a pressão associado com a CC é $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$. Dê uma interpretação física para esse resultado.

**Solução:** Para que o tensor energia-momento de um fluido perfeito

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u^\alpha u^\beta + pg^{\alpha\beta} \tag{24}$$

seja constante, ou seja, uma constante cosmológica nas equações de Einstein, a pressão deve ser exatamente $p = -\rho$.

Ou seja, pressão igual a menos a densidade de enrgia, ou equação de estado $w = -1$, está diretamente ligado com uma densidade de energia que se mantem constante em um Universo em expansão. Podemos fazer um experimento de pensamento para tentar interpretar o que significa um fluido de pressão negativa.

Considere um gás em um recipiente com um pistão. Se o gás possui pressão positiva, então para que o volume se expanda é necessário que o gás realize trabalho sobre o pistão e portanto, que perca energia, de forma que a sua densidade de energia diminua. Se esse recipiente está preenchido com um gás de pressão negativa, então é necessário que trabalho externo seja realizado sobre o gás para que o volume se expanda (as moléculas do gás "puxam" o pistão quando colidem com ele). Assim, o gás ganha energia quando o volume se expande. Se a pressão for exatamente menos a densidade de energia, então a energia aumenta de forma que a densidade de enrgia permaneça constante.

Ou seja: um gás com pressão negativa ganha energia quando o volume aumenta!

b) Supondo que a curvatura espacial é nula ($k = 0$) use as equações de Friedmann para encontrar a fórmula explícita para $a(t)$. *Dica: Será útil usar a notação* $H_\Lambda = \sqrt{8\pi G\rho_\Lambda/3}$.

**Solução:** Suponto um universo de *de Sitter*,

$$\dot{a} = aH_\Lambda, \tag{25}$$

onde o ponto denota derivada com respeito ao tempo cósmico. A solução dessa EDO é trivial:

$$a(t) = Ae^{H_\Lambda t}. \tag{26}$$

c) Agora vamos estudar os cones de luz e os horizontes nesse universo dominado pela CC e com curvatura espacial nula. Vamos tomar eventos em instantes quaisquer, mas sempre limitados a posições sobre o eixo comóvel $x-$ ou seja, vamos considerar as coordenadas comóveis $y$ e $z$ fixas ($dy = dz = 0$). Usando a forma conforme-cartesiana da métrica de FLRW, encontre a expressão para as coordenadas $(t, x)$ do cone de luz de um evento qualquer num instante $(t_0, x_0)$ . Em particular, mostre que podemos expressar esse cone de luz por meio da igualdade:

$$\left|e^{-H_\Lambda t} - e^{-H_\Lambda t_0}\right| = H_\Lambda \left|x - x_0\right|$$

**Solução:** A métrica em coordenadas conforme-cartesianas é:

$$ds^2 = a^2(t)(-d\eta^2 + dx^2). \tag{27}$$

O tempo conforme $\eta$ é definido como:

$$\eta = \int \frac{dt}{a}. \tag{28}$$

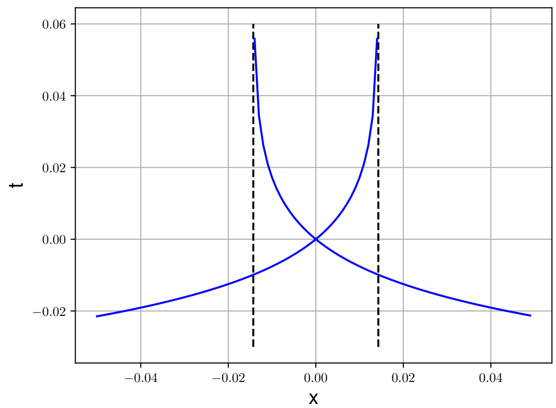


Figura 3: Cone de luz em um Universo de de Sitter.

Em um Universo de *de Sitter*, portanto,

$$\eta = -\frac{e^{-H_\Lambda}}{H_\Lambda} \tag{29}$$

a menos de uma constante de integração. Em um geodésica nula:

$$|d\eta| = |dx|. \tag{30}$$

Substituindo (29) e fazendo $dx = x - x_0$ e $d\eta = \eta - \eta_0$, obtemos:

$$\left|e^{-H_\Lambda t} - e^{-H_\Lambda t_0}\right| = H_\Lambda \left|x - x_0\right|. \tag{31}$$

d) Esboce graficamente a forma desse cone de luz, (como usual, coloque $t$ nas abscissas e $x$ nas ordenadas ). Para este item e os itens seguintes, você pode assumir que o evento está localizado em $t_0 = 0$ e $x_0 = 0$

**Solução:** A figura (3) mostra o cone de luz no Universo de *de Sitter*. As linhas trastejadas possuem $x = \pm 1/H_\Lambda$.

e) Esse evento, nesse universo de *de* Sitter, possui um horizonte de partículas (tipo passado )? Em outras palavras, o passado desse evento compreende um volume comóvel finito? Caso a sua resposta seja sim, qual é valor desse horizonte comóvel de partículas $X_{Hp}$ para o evento do instante $t_0 = 0$?

**Solução:** Como podemos ver pela figura (3), o evento $(x_0, t_0) = (0, 0)$ não possui um horizonte de partículas.

d) Esse evento possui um horizonte de eventos (tipo futuro)? Em outras palavras, o futuro desse evento compreende um volume comóvel finito? Caso a sua resposta seja sim, qual é o valor desse horizonte comóvel de eventos $X_{He}$ para o evento do instante $t_0 = 0$?

**Solução:** Como podemos ver pela figura (3), o evento $(x_0, t_0) = (0, 0)$ possui um horizonte de eventos. Portanto este evento possui uma relação de causalidade com os pontos do Universo que estão compreendidos em uma esfera com centro em $x_0$ e raio $1/H_\Lambda$.