Dinâmica

Esmerindo Bernardes [1]

L.I.A. – Laboratório de Instrumentação Algébrica

Departamento de Física e Ciência dos Materiais

Instituto de Física de São Carlos

Universidade de São Paulo

23 de novembro de 2020

[1]email: sousa@ifsc.usp.br

Sumário

Capítulo 1

Leis de Newton

1.1 Introdução

Que é uma lei (ou princípio)? No que diz respeito às leis da natureza, o dicionário nos diz que uma lei (da natureza) é "aquilo que se impõe ao homem por sua razão, consciência ou por determinadas condições ou circunstâncias". Em outras palavras, uma lei física é uma afirmação fundamental, passível de verificação, formando a base de uma teoria. Portanto, uma teoria é um conjunto de leis.

É importante fazermos um paralelo entre Física e Matemática. Em Matemática, o postulado é o equivalente de uma lei em Física, porém com uma diferença muito importante: um postulado nem sempre está sujeito à verificação. Por estarem sempre sujeitas a verificações, as leis físicas estão sempre em estado de alerta.

A história tem nos mostrado que uma lei física não é imutável. Basta uma única experiência bem sucedida que mostre claramente a violação de uma determinada lei para que ela seja abandonada ou corrigida. Por exemplo, até a década de 60, acreditava-se que um processo físico e a sua imagem (como num espelho) fossem idênticos, isto é, produzissem os mesmos resultados. Esta lei ficou conhecida como a lei da conservação da paridade (sem distinção entre direito e esquerdo; similaridade). Todavia, dois jovens físicos, C. N. Yang e T. D. Lee, fizeram em 1956 uma previsão (ou observação) onde esta lei da conservação da paridade pudesse ser violada em processos de desintegração nuclear (decaimento beta). Esta previsão foi confirmada em 1957 em um belíssimo experimento conduzido por Madame Wu (C. S. Wu). Neste caso, a conservação da paridade foi descartada como uma lei.

Um outro exemplo: a teoria Newtoniana da gravitação é capaz de explicar razoavelmente bem, o comportamento mecânico do nosso sistema solar, ou seja, reproduz as leis de Kepler. Todavia, existem alguns efeitos minuciosos que a teoria Newtoniana da gravitação não consegue explicar (reproduzir). Dois deles, o desvio da luz ao passar próxima de um corpo estelar como o nosso sol e a precessão do periélio do planeta Mercúrio, quando calculados com a teoria Newtoniana não concordam plenamente com as observações. A reconciliação entre teoria e experimento só é possível no contexto da Relatividade Geral de Einstein (1915). Neste caso, a teoria Newtoniana foi corrigida pela relatividade geral. A relatividade geral nos revelou que a matéria (e/ou energia) diz ao espaço-tempo como se deformar (curvar e torcer) e, por sua vez, o espaço deformado dita à matéria como ela deve se mover. Mesmo as leis de Newton para o movimento translacional que estamos prestes a discutir valem somente para velocidades baixas em comparação com a velocidade da luz. Para velocidades comparáveis à da luz, a Mecânica Newtoniana é corrigida pela Mecânica Relativística (Einstein, 1905), como veremos mais tarde. Além de corrigir a Mecânica Newtoniana, a Relatividade Especial de Einstein nos revelou a fusão entre espaço e tempo (o tempo não é absoluto como na Mecânica Newtoniana) bem como entre energia e massa ($\Delta E = \Delta mc^2$).

Sabemos construir a trajetória de um ponto material usando curvas espaciais em um espaço Euclidiano tridimensional. Também sabemos determinar velocidade e aceleração, bem como o espaço percorrido, em qualquer instante de tempo. Portanto, é hora de passarmos ao estudo das leis físicas que determinam e controlam o movimento de corpos macroscópicos (que não sejam muito mais massivos que o Sol) com velocidades muito inferiores à velocidade da luz no vácuo (aproximadamente 300 000 km/s). Estas leis são conhecidas por "leis de Newton" do movimento. As duas restrições mencionadas (corpos macroscópicos de baixa massa e com baixas velocidades) são importantes, pois as leis Newtonianas deixam de ser válidas em três ocasiões: (1) no mundo microscópico de dimensões atômicas (neste caso as leis Newtonianas são corrigidas pelas leis da Física Quântica), (2) quando as velocidades envolvidas são comparáveis à velocidade da luz no vácuo (neste caso as leis Newtonianas são corrigidas pelas leis da Relatividade Especial de Einstein) e (3) para corpos extremamente massivos , como estrelas de nêutrons (neste caso as leis Newtonianas são corrigidas pela Relatividade Geral de Einstein).

1.2 Experimento

Imagine três objetos completamente isolados e que podem movimentar-se livremente num plano. Cuidadosamente, observa-se a colisão entre os três pares possíveis. Seja $\vec{v}_i$ as velocidades de cada objeto ($i \in \{1, 2, 3\}$) antes da colisão e $\vec{u}_i$ as velocidades após a colisão. Como estes objetos estão isolados e interagem somente no momento da colisão, os vetores velocidades mudam apenas durante a colisão. A direção e a rapidez (módulo) de cada vetor velocidade são anotadas e analisadas cuidadosamente. Após uma análise meticulosa, verifica-se que há uma combinação linear entre os vetores velocidades, particular de cada experimento, que se mantém a mesma antes e depois da colisão,

$$\vec{v}_i(t) + \mu_{ij}\vec{v}_j(t) = \vec{u}_i(t) + \mu_{ij}\vec{u}_j(t), \qquad (1.1)$$

onde μ_{ij} são números reais e positivos. Para cada colisão existe um único valor de μ_{ij} que torna verdadeira a igualdade acima. Outro resultado surpreendente: os valores dos parâmetros μ_{ij}, determinados em cada experimento, satisfazem

$$\mu_{12}\mu_{23}\mu_{31} = 1. \tag{1.2}$$

Como veremos a seguir, a análise deste experimento nos permite extrair dois princípios equivalentes às três leis de Newton, bem como o conceito operacional de massa (inercial).

1.3 Os princípios

Princípio 1. *Existem certos referenciais, denominados de inerciais (no sentido de incapacitados), com as seguintes propriedades.*

1. *Cada corpo isolado move-se em uma linha reta neste referencial inercial.*
2. *A noção de tempo pode ser quantificada: uma unidade de tempo pode ser definida através do movimento uniforme de um corpo isolado neste referencial inercial.*
3. *Cada corpo isolado move-se com uma velocidade constante neste referencial inercial.*

Estas três propriedades definem um referencial inercial. Note que um corpo isolado não tem aceleração em um referencial inercial. Assim, podemos definir, pelo menos operacionalmente, tempo como sendo um parâmetro t proporcional ao comprimento s da trajetória de um corpo isolado (velocidade constante) em um referencial inercial:

$$\Delta s(t) = \int_0^{\Delta t} v\, dt = v\, \Delta t \implies \Delta t = \frac{\Delta s}{v}. \tag{1.3}$$

Naturalmente, qualquer outro parâmetro t' definido como tempo, usando um outro corpo isolado, estará relacionado de forma linear com o primeiro parâmetro t, pois os comprimentos de duas trajetórias quaisquer são sempre proporcionais. Note também que podemos medir apenas intervalos de tempo, proporcionais ao comprimento da trajetória, e nunca os valores absolutos do "tempo".

Como vimos anteriormente, o comprimento de uma trajetória é calculado através de uma integral. Assim, usar o comprimento de uma trajetória para medir intervalos de tempo não é prático. Desde há muito tempo, temos usado o movimento de rotação da Terra em torno de seu próprio eixo, praticamente constante, como um instrumento (relógio) para medir intervalos de tempo. Qualquer processo repetitivo, com uma frequência praticamente constante, pode ser usado como um relógio. Os relógios mais precisos que dispomos no momento são os chamados "relógios atômicos", baseados na impressionante regularidade de certos processos nucleares (portanto, pertencentes ao domínio da física quântica). Em um relógio destes, o erro é de apenas um segundo em um milhão de anos. Um fato importante: embora não sabemos exatamente o que é o tempo, sabemos operar com ele, isto é, sabemos medir intervalos de tempo. Em geral, escolhemos um intervalo padrão como unidade de tempo e todos os demais intervalos são medidos por comparação.

Princípio 2. *Considere três corpos isolados sendo observados em um referencial inercial. Estes corpos podem interagir apenas entre si, sempre aos pares. Sejam $\vec{v}_i(t)$, $i \in \{1, 2, 3\}$,* *seus vetores velocidades e t o tempo. Então as duas propriedades seguintes se verificam.*

1. *Existem experimentos envolvendo a colisão entre dois corpos cujos resultados podem ser expressados como*

$$\vec{v}_i(t) + \mu_{ij}\vec{v}_j(t) = \vec{P}_{ij}, \tag{1.4}$$

onde os escalares μ_{ij} e os vetores $\vec{P}_{ij}$ são constantes, isto é, são independentes do tempo. As constantes vetoriais $\vec{P}_{ij}$: elas dependem do experimento, do referencial inercial e dos dois corpos envolvidos.

2. *As constantes escalares $\mu_{ij} > 0$ são positivas e não dependem do experimento e nem do referencial inercial. Elas dependem apenas dos dois corpos envolvidos e satisfazem*

$$\mu_{12}\mu_{23}\mu_{31} = 1. \tag{1.5}$$

Algumas observações são necessárias. Observe que devido ao fato das constantes $\mu_{ij} > 0$ obedecerem à condição (1.5), elas podem ser escritas numa forma racional $\mu_{ij} = m_j/m_i$, com $m_i > 0$ (faça o Exercício 1). Em termos destas novas constantes, os resultados experimentais em (1.1) podem ser re-escritos como

$$m_i\vec{v}_i(t) + m_j\vec{v}_j(t) = \vec{p}_{ij}, \quad \vec{p}_{ij} = m_i\vec{P}_{ij}. \tag{1.6}$$

A quantidade vetorial

$$m_i\vec{v}_i(t) \equiv \vec{p}_i(t) \tag{1.7}$$

é denominada de momentum linear (ou quantidade de movimento) do i-ésimo corpo. Note que (1.7) é uma definição. A constante vetorial $\vec{p}_{ij} = \vec{p}_i(t) + \vec{p}_j(t)$ é o momentum linear total dos dois corpos envolvidos em cada experimento e é uma constante quando estes dois corpos interagem entre si via uma colisão. A constante $m_i > 0$ é denominada de carga inercial (ou massa inercial, ou simplesmente massa, por razões históricas). Note que apenas a razão μ_{ij} é determinada pelo experimento. Portanto, podemos determinar apenas as razões $\mu_{ij} = m_j/m_i$ entre massas. Isto significa que temos de eleger um corpo padrão, cuja massa deve ser assumida como uma unidade de massa, digamos $m_i = 1$ Kg. Então a massa $m_j = \mu_{ij}$ é determinada univocamente do experimento. Novamente, mesmo não sabendo o que é massa, somos capazes de operar com ela, escolhendo um padrão e realizando comparações.

1.4 As leis de Newton

E as famosas três leis de Newton para o movimento? Onde estão? Elas estão contidas nos dois princípios apresentados. A primeira lei de Newton, ou lei da inércia está contida no Princípio 1. Uma partícula isolada em um referencial inercial ou está em repouso ou está em movimento uniforme. Note que não estamos usando o conceito de forças no Princípio 1. Não devemos esquecer que o Princípio 1 também nos dá uma definição operacional de tempo.

A segunda lei de Newton está contida no Princípio 2,

$$\vec{F}_R = \frac{d}{dt}\vec{p}, \quad \vec{p} = m\vec{v}, \tag{1.8}$$

onde $\dot{\vec{p}} = m\vec{a}$ para massas constantes. Em geral, a força resultante $\vec{F}_R$ é conhecida independentemente do momentum linear, ou seja, a segunda lei de Newton não é uma mera definição de força e nem de massa. Ela representa um fato experimental: uma força muda o estado de movimento de uma massa m de acordo com a expressão em (1.8).

De fato, como nestes experimentos de colisão o momentum linear total $\vec{p}_{ij} = \vec{p}_i(t) + \vec{p}_j(t)$ é constante, então, derivando no tempo os dois lados desta expressão, assumindo que as massas m_i sejam constantes, temos

$$m_i\vec{a}_i(t) + m_j\vec{a}_j(t) = 0. \tag{1.9}$$

O que esta expressão nos revela. Apesar dos dois corpos estarem isolados, eles interagem entre si no momento da colisão. Esta interação produz mudanças nas velocidades (ou na quantidade de movimento) acarretando na relação (1.9). Naturalmente, as acelerações em (1.9) são diferentes de zero apenas durante o (curto) intervalo de tempo da colisão. Como temos apenas dois corpos, isto significa que cada parcela em (1.9) deve ser idêntica à interação sofrida por um dos corpos no momento da colisão. Esta interação entre estes dois corpos, capaz de mudar o vetor velocidade, denominaremos de força. Força é um vetor. Assim, podemos concluir que uma força $\vec{F}_i(t)$ agindo num objeto de massa m_i (constante) altera seu movimento de acordo com

$$\vec{F}_i(t) = m_i\vec{a}_i(t) = \frac{d}{dt}\vec{p}_i. \tag{1.10}$$

No nosso experimento, esta é a forma com que a força devida ao j-ésimo objeto atua sobre o i-ésimo objeto durante a colisão. Aprendemos com estes experimentos que é necessário um agente físico (força) para alterar o estado de movimento de um corpo material e que esta força é a taxa de variação do momentum linear (segunda lei de Newton). Ao contrário da definição (1.7) do momentum linear, a Eq. (1.10) **não** é uma definição de força e nem de massa. A segunda lei de Newton é o resultado de uma observação experimental.

Desta forma, o resultado experimental (1.9) pode ser re-escrito como

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{ij}(t) + \vec{F}_{ji}(t) = 0. \tag{1.11}$$

Note que $\vec{F}_{ij}(t) = m_i\vec{a}_i(t)$ é a força que o corpo j faz no corpo i e $\vec{F}_{ji}(t) = m_j\vec{a}_j(t)$ é a força que o corpo i faz no corpo j, portanto elas atuam em corpos diferentes. Ainda mais, a soma vetorial nula em (1.11) implica em $|\vec{F}_{ij}| = |\vec{F}_{ji}|$ e $\vec{F}_{ij} \,//\, -\vec{F}_{ji}$ (vetores anti-paralelos). Consequentemente, (1.11) expressa a terceira lei de Newton (ação e reação). Portanto, a terceira lei de Newton também está contida no Princípio 2.

Vimos nestes experimentos com colisões, através do Princípio 2, que tanto o momentum linear total em (1.4) quanto a força total (ou resultante) em (1.11) são obtidos somando todas as contribuições individuais, soma esta que é uma combinação linear de vetores. Em Física, quantidades que são determinadas através de combinações lineares de outras são ditas satisfazerem o princípio de superposição.

É importante frisar que todas as medidas (experimentos) estão sendo realizadas em um referencial inercial. Caso contrário, a segunda lei de Newton (1.8) não é válida, ou seja, em um referencial não-inercial a segunda lei de Newton precisa ser corrigida (veremos isto ao estudarmos as leis que governam o movimento rotacional).

1.5 Leis de conservação

Dada e relação entre o momentum linear e força na segunda lei (1.8), se a força é nula, então o momentum linear é constante. Uma quantidade constante no tempo é denominada de quantidade conservada. Então temos nosso primeiro teorema,

Teorema 1 (conservação do momentum linear). *Se a força resultante em um sistema físico é nula em um referencial inercial, então o momentum linear total deste sistema é conservado (não varia no tempo).*

A utilidade de uma quantidade conservada reside no fato dela possuir os mesmos valores em tempos diferentes. Por exemplo, a quantidade de movimento total $\vec{p}_{ij}(t)$ em (1.4) é conservada no nosso experimento. Então, se denotarmos por t_1 um tempo antes da colisão e por t_2 um tempo depois da colisão, teremos $\vec{p}_{ij}(t_1) = \vec{p}_{ij}(t_2)$, a qual pode ser usada para determinar alguma quantidade desconhecida contida nela (faça o Exercício 2).

Naturalmente, o momentum linear tem um papel importante na Mecânica Newtoniana. Esta importância é devida à própria segunda lei e também ao Teorema 1 sobre a conservação do momentum linear. Portanto, podemos dizer que a sua definição em (1.7) está plenamente justificada pelo seu conteúdo físico.

1.6 Massa inercial

Qual é a importância da massa m que aparece na quantidade conservada em (1.4)? Lá, o experimento nos revelou que o momentum linear total do sistema (isolado) formado apenas pelos corpos i e j é constante. Se fizermos $m_j = 0$, então resulta que $\vec{v}_i$ é também uma constante, ou seja, o corpo i está em movimento uniforme. No entanto, se este mesmo corpo i também tivesse uma massa nula, $m_i = 0$, então a sua quantidade de movimento seria nula. Isto nos sugere que é necessário que um corpo tenha massa não-nula para poder ter uma quantidade de movimento não-nula. Desta forma, podemos afirmar que a condição de estar em movimento uniforme em um referencial inercial depende exclusivamente de ter uma massa não-nula.

Vale mencionar que até a época de Newton (até o Séc. 16, portanto um pouco mais de 2000 anos depois de Aristóteles) acreditava-se que era necessário uma força para manter um corpo em movimento, mesmo em movimento uniforme. Assim, a massa m em (1.8) passou a ser conhecida também por massa inercial. Considerando massas constantes, $\vec{F} = m\vec{a}$. Vemos que aumentando a massa (através de uma troca de objetos), devemos aumentar também a intensidade da força para manter a intensidade da aceleração no mesmo valor. Isto significa que temos de esforçar mais para mudar o estado de movimento de um corpo com uma maior massa. Esta resistência em mudar o estado de movimento é quantificada pela massa inercial. Em outras palavras, a massa inercial mede a resistência de um corpo em mudar seu estado de movimento. A massa inercial é uma propriedade intrínseca de qualquer objeto.

1.7 Exercícios

Exercício 1. *Escreva as constantes* $\mu_{ij} > 0$ *numa forma racional* $\mu_{ij} = m_j/m_i$*, com* $m_i > 0$ *e mostre que elas satisfazem a relação* (1.5)*. Estas constantes positivas* $m_i > 0$ *são denominadas de "massas".*

Exercício 2. *Sabendo que as quantidades* $\vec{P}_{ij}$ *em* (1.6) *são conservadas, determine as constantes* μ_{ij} *em termos das velocidades antes e depois das colisões, as quais são medidas (conhecidas). Sugestão: se uma quantidade (vetorial ou escalar)* $A(t)$ *é conservada, então* $A(t_1) = A(t_2)$*, para* $t_1 \neq t_2$*.*

Capítulo 2

Segunda lei

2.1 Introdução

Em geral dada uma força resultante $\vec{F}$ agindo em um objeto de massa inercial m, dadas a posição inicial $\vec{r}(t_0)$ e a velocidade inicial $\vec{v}(t_0)$, queremos determinar a posição $\vec{r}(t)$ desse objeto em qualquer instante de tempo t posterior ao instante inicial t_0. Determinar trajetórias criadas por forças resultantes é o objetivo básico da Mecânica. A implementação desse objetivo é feita pela segunda lei (1.8).

Para compreendermos como a segunda lei fornece trajetórias, vamos considerá-la com a massa inercial constante,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{2.1}$$

O lado direito da segunda lei é proporcional à aceleração, a segunda taxa de variação do vetor posição, o qual representa a trajetória na forma paramétrica. O lado esquerdo da segunda lei é proporcional à força, uma expressão matemática da interação mantida pelo objeto de massa m. Em princípio, estes dois vetores, força e aceleração, possuem naturezas completamente distintas. A igualdade entre eles na segunda lei somente é possível com a presença da massa inercial. Assim, as dimensões de força são

$$[\vec{F}] = [m\vec{a}] = \frac{ML}{T^2}. \tag{2.2}$$

Em geral, a força deve ser determinada experimentalmente, ou por conjecturas, e poderá depender da posição $\vec{r}$ e da velocidade $\dot{\vec{r}}$. Em algumas ocasiões raras, a força poderá depender da aceleração e do próprio tempo. Considerando $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$, a segunda lei assume a forma

$$\vec{F}\big(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}\big) = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \tag{2.3}$$

ou, em coordenadas,

$$F_i\big(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}\big) = m\frac{d^2x_i}{dt^2}, \;\; \vec{r} = (x_1, x_2, x_3). \tag{2.4}$$

Portanto, do ponto de vista operacional, a segunda lei é um conjunto de três equações, tendo como incógnitas as componentes x_i do vetor posição $\vec{r}$.

No entanto, estas não são equações convencionais, pois as incógnitas x_i são funções do tempo t, $x_i = x_i(t)$. Além disso, aparecem nestas mesmas equações, as derivadas primeira e segunda destas mesmas incógnitas. Uma equação deste tipo recebe o nome de equação diferencial ordinária (ou simplesmente EDO). Um pouquinho sobre nomenclatura. As equações horárias $x_i = x_i(t)$ são as variáveis dependentes (as incógnitas). O tempo t é a variável independente. Todas as derivadas numa equação diferencial ocorrem em termos das variáveis independentes. Quando temos apenas uma variável independente, como nesse caso, a equação diferencial é dita ser ordinária (EDO). Quando há mais de uma variável independente, a equação diferencial é dita ser parcial (EDP). A ordem de uma equação diferencial é dada pela ordem da derivada mais alta. Na segunda lei, a derivada mais alta é de ordem dois. Assim, nossas EDOs serão todas de segunda ordem.

Teorema 2 (EDO de segunda ordem). *A solução $f = f(t, c_1, c_2)$ de uma EDO de segunda ordem contém duas constantes arbitrárias c_1 e c_2.*

Esse teorema exige que disponibilizemos duas informações adicionais para que uma equação horária determinada pela segunda lei, através da EDO (2.4), seja única. Estas informações adicionais serão dadas pela posição inicial $x_i(t_0)$ e pela velocidade inicial $\dot{x}_i(t_0)$, denominadas de condições iniciais. O instante inicial t_0 pode ser escolhido convenientemente.

Então estamos numa posição bastante confortável. Dado a força resultante $\vec{F}$ e as condições iniciais, $\vec{r}(t_0)$ e $\vec{v}(t_0)$, usamos as EDOs fornecidas pela segunda lei $\vec{F} = m\vec{a}$ para determinamos a trajetória $\vec{r}(t)$ e, consequentemente, o vetor velocidade $\vec{v}(t)$. O vetor aceleração já está dada pelo segunda lei $\vec{a} = \vec{F}/m$. Isto significa que podemos prever todo o comportamento do nosso sistema em qualquer instante de tempo $t \geq t_0$. Esse é o programa Newtoniano para determinar trajetórias. Desta forma, podemos afirmar que a Mecânica Newtoniana é completamente determinística. Preço: aprender a resolver EDOs!

2.2 Introito

Uma equação diferencial ordinária (EDO), como o primeiro nome diz, é uma equação. Esta equação relaciona termos conhecidos e desconhecidos compostos por funções e suas derivadas. A brincadeira consiste em determinar as funções mais gerais que respeitem as equações nas EDOs. Caso ainda não teve contato com equações diferenciais ordinárias (EDOs) mas teve contato com derivadas e integrais, então já fez uso de EDOs mesmo não sabendo que estava.

Vejamos um exemplo simples. Suponha $x(t)$ uma função (desconhecida) do tempo t satisfazendo a seguinte EDO de primeira ordem:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \alpha, \tag{2.5}$$

onde α é um parâmetro (constante) real. Pergunta: quem é a função x de t que derivada uma vez resulta numa constante? Essa pergunta é a verbalização da EDO dada. Esta EDO é tão simples que a função procurada, $x(t)$, pode ser encontrada usando o teorema fundamental do cálculo,

$$x(t) = \alpha t + \beta, \tag{2.6}$$

onde β é outra constante. A verificação é imediata: basta tomar a derivada primeira. O resultado já é a própria EDO dada. Note que fizemos uso apenas do teorema fundamental do cálculo. Nós adivinhamos a solução usando apenas nossos conhecimentos de derivadas e integrais das funções elementares. É uma adivinhação educada.

Vejamos outro exemplo simples. Suponha $x(t)$ uma função (desconhecida) do tempo t satisfazendo a seguinte EDO de segunda ordem:

$$\ddot{x} = \alpha, \tag{2.7}$$

onde α é um parâmetro (constante) real. Pergunta: quem é a função x de t que derivada duas vezes resulta numa constante? Novamente, usando nossos conhecimentos de derivadas e integrais das funções elementares, a solução deve ser um polinômio quadrático,

$$x(t) = \frac{\alpha}{2}t^2 + \beta t + \gamma, \tag{2.8}$$

onde β e γ são constantes. A verificação é imediata:

$$\dot{x} = \alpha t + \beta, \ \ddot{x} = \alpha. \tag{2.9}$$

A propósito o teorema fundamental do cálculo:

Teorema 3 (Teorema Fundamental). *Seja $f(t)$ uma função contínua e $F(t)$ a sua integral (indefinida),*

$$\int f(t)\, dt = F(t). \tag{2.10}$$

Então,

$$\frac{d}{dt}F(t) = f(t). \tag{2.11}$$

Sob a luz deste teorema, a EDO de primeira ordem (2.5) pode resolvida formalmente. Basta integrar no tempo os dois lados desta EDO,

$$\int \dot{x}\, dt = \int \alpha\, dt \implies x(t) = \alpha t + \beta, \tag{2.12}$$

e usar o Teorema Fundamental no lado esquerdo e resolver a integral do lado direito. Note que precisamos conhecer o integrando para resolver a integral do lado direito. Esta é uma técnica conhecida por separação de variáveis, onde há uma separação completa entre as variáveis dependentes e independentes. Aplicando esta técnica duas vezes, resolvemos a EDO de segunda ordem (2.7) no segundo exemplo (verifique).

Todo processo dinâmico, em todas as áreas do conhecimento, é controlado por equações diferenciais. O estudo de equações diferenciais é uma das áreas mais importantes do conhecimento científico. Aprenda o que puder sobre equações diferenciais.

2.3 Gravidade

A gravidade é a força que a Terra exerce sobre qualquer objeto nas proximidades de sua superfície. Newton (Séc. XVII) foi o primeiro a propor um modelo matemático para a gravidade, principalmente baseado nos trabalhos de outros cientistas-filósofos como Galileu e Kepler (ambos do Séc. XVI). A gravidade Newtoniana estabelece que um objeto de massa (inercial) m acima da superfície terrestre fique sujeito a uma força da forma

$$\vec{F}_g = -mg\,\hat{r}, \; g = 9,8 \text{ m/s}^2, \tag{2.13}$$

onde o versor $\hat{r}$ está orientado do centro da Terra para a sua superfície (em relação ao nível do mar). Portanto, a força da gravidade é atrativa e radial. Pela intensidade dela ser a mesma numa superfície esférica concêntrica com o centro da Terra, a gravidade é uma força com simetria esférica. A constante g foi medida por Galileu, um século antes de Newton. Na verdade g varia com a distância ao centro da Terra, mas é praticamente constante para alturas em torno de alguns quilômetros acima da superfície média da Terra. Em São Carlos, SP, $g \approx 9,9$ m/s^2.

A presença da massa inercial na expressão da força da gravidade Newtoniana é uma novela interessante per si. Newton imaginou que objetos tinham algum tipo de carga gravitacional que permitia a interação atrativa com a Terra. Newton denotou esta carga gravitacional por m_g. Esta ideia é baseada na existência de cargas elétricas como responsáveis pela força Coulombiana (de atração ou repulsão). Então, visto que existe uma atração de objetos pela Terra, é imediato supor a existência de um novo tipo de carga responsável por esta atração gravitacional: a carga gravitacional. Segundo o próprio Newton, esta força gravitacional tinha que ser da forma

$$\vec{F}_g = -m_g g\,\hat{r}. \tag{2.14}$$

Esta era a forma que reproduzia os resultados de Kepler (as leis de Kepler para o movimento dos planetas no sistema solar). Newton já havia estabelecido sua segunda lei. Portanto, de acordo com a segunda lei,

$$\vec{F}_g = -m_g g\,\hat{r} = m_i\vec{a}, \tag{2.15}$$

onde m_i é a massa inercial. Ao medir o módulo a da aceleração de um objeto em queda livre, Galileu identificou um resultado surpreendente: $a \approx g$. Newton realizou uma série de experimentos que confirmaram o resultado de Galileu. Desta forma, levando este fato experimental à segunda lei, a conclusão é uma identificação entre carga gravitacional e carga inercial, $m_g = m_i$. A ideia de carga gravitacional iniciou e terminou com Newton. Hoje falamos apenas em termos da massa inercial, simplesmente denotada por m. Einstein explorou este fato curioso para a elaboração de sua Teoria geral da Relatividade, a qual corrige a gravitação Newtoniana.

Alguns sistemas mecânicos tendo a gravidade como a força motriz serão discutidos nas subseções seguintes.

2.3.1 Queda livre

Solte do repouso, numa altura H acima do solo, um objeto de massa m. Este objeto está sujeito à ação da força da gravidade $\vec{F}_g$, dirigida ao solo. O solo está no plano XY. Como podemos verificar facilmente, a trajetória deste objeto será retilínea e vertical (eixo Z), na qual o objeto atingirá o solo depois de algum instante. Esse fato nos sugere o sistema de coordenadas mostrado na Figura 2.1, onde escolhemos o eixo Z na direção da trajetória retilínea. Esta escolha é a mais simples possível.

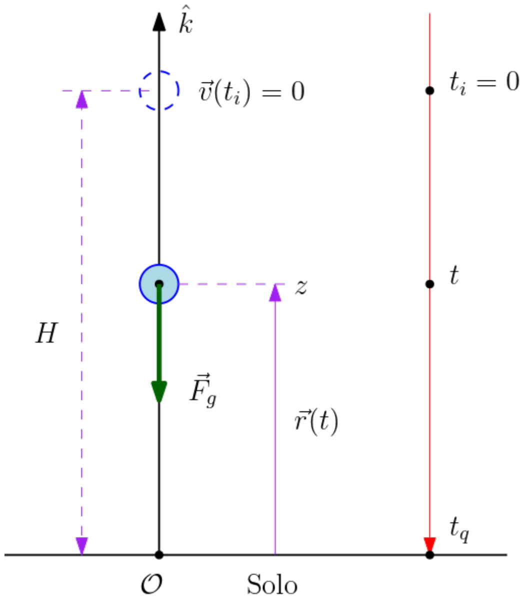

Figura 2.1: Queda livre: um objeto, sob ação da gravidade $\vec{F}_g$, solto do repouso de uma altura H.

A Figura 2.1 mostra o eixo temporal (meramente ilustrativo) em seu lado direito. No instante inicial $t_i = 0$, o objeto está na altura $z(t_i) = H$, com velocidade nula, $\vec{v}(t_i) = 0$. Quando o objeto é solto, ele entra em movimento (de "queda" ao solo). A Figura 2.1 mostra também a posição $z(t)$ do objeto num instante $t > t_i$ qualquer. Quando o objeto atinge o solo, num instante t_q (tempo de queda), naturalmente $z(t_q) = 0$. Este sistema mecânico é denominado de "queda livre". A única força presente é a gravidade.

Estabelecido o melhor sistema de coordenadas (mostrado na Figura 2.1) e nomeado todos os parâmetros e quantidade vetoriais pertinentes, devemos escrever todos os vetores em coordenadas. Iniciando pelas condições iniciais ($t_i = 0$),

$$\vec{r}(0) = H\hat{k},\ \vec{v}(0) = 0, \qquad (2.16)$$

e a força da gravidade,

$$\vec{F}_g = -mg\,\hat{k},\ g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}. \qquad (2.17)$$

Em seguida precisamos das quantidades cinemáticas num tempo qualquer $t > 0$,

$$\vec{r}(t) = z(t)\hat{k},\ \vec{v}(t) = \dot{z}(t)\hat{k},\ \vec{a}(t) = \ddot{z}(t)\hat{k}. \qquad (2.18)$$

Hora de usar a segunda lei $\vec{F}_g = m\vec{a}$ (massa constante) na forma de coordenadas,

$$-mg\,\hat{k} = m\ddot{z}(t)\hat{k} \implies \ddot{z} = -g, \qquad (2.19)$$

a qual implica em uma EDO fácil de ser resolvida. Esta EDO foi discutida na Seção 2.2. Sua solução é

$$z(t) = c_0 + c_1 t - \frac{1}{2}gt^2, \qquad (2.20)$$

cuja verificação é imediata (verifique). Assim, a componente Z do vetores velocidade e aceleração são

$$v_z(t) = \dot{z}(t) = c_1 - gt,\ a_z = \dot{v}_z = -g. \quad (2.21)$$

As constantes c_0 e c_1 são determinadas pelas condições iniciais dadas em (2.16), substituídas em $z(t)$ e $v_z(t)$,

$$v_z(0) = c_1 = 0 \implies c_1 = 0, \qquad (2.22)$$

e

$$z(0) = c_0 = H \implies c_0 = H. \qquad (2.23)$$

Desta forma, a trajetória é a reta $\vec{r}(t) =$

$z(t)\,\hat{k}$, com a equação horária

$$z(t) = H - \frac{1}{2}gt^2. \tag{2.24}$$

O tempo de queda t_q é dado pelo condição (verifique)

$$z(t_q) = H - \frac{1}{2}gt_q^2 = 0 \implies t_q = \sqrt{\frac{2H}{g}}. \tag{2.25}$$

No momento em que toca o solo, a componente Z da velocidade do objeto é (verifique)

$$v_z(t_q) = -\sqrt{2gH}. \tag{2.26}$$

Esta é uma ótima oportunidade para checar o esquema de calcular o comprimento da trajetória entre os instantes inicial $t_i = 0$ e final t_q, o qual sabemos ser H,

$$\Delta s = \int\limits_{t=0}^{t=t_q} |v_z(t)|\,dt = \frac{g}{2}t^2\Big|_{t=0}^{t=t_q} = H, \tag{2.27}$$

como esperado (verifique). Note o detalhe na simplificação do módulo do vetor velocidade $\vec{v}(t) = v_z(t)\hat{k}$ (verifique),

$$v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{v_z^2(t)} = |v_z(t)| = gt. \tag{2.28}$$

Exercício 3. *Detalhe todas as passagens sinalizadas por "verifique".*

2.3.2 Lançamento oblíquo

No lançamento oblíquo, um objeto de massa m, sob ação da gravidade $\vec{F}_g$, dirigida ao solo, é lançado com uma determinada velocidade inicial $\vec{v}_0$. O experimento mostra uma trajetória plana com curvatura. Sendo plana, podemos colocá-la no plano YZ, por conveniência, com o eixo Z perpendicular ao solo (plano XY). Essa é a melhor escolha para o sistema de coordenadas nesse caso, a qual está ilustrada na Figura 2.2.

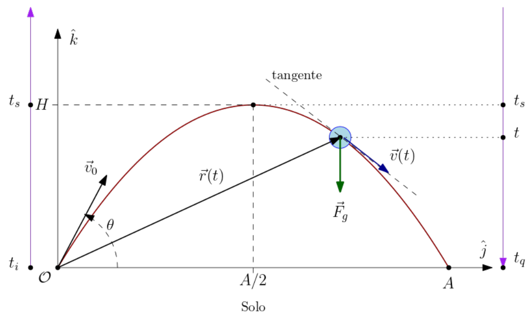

Figura 2.2: Lançamento oblíquo: um objeto, sob ação da gravidade $\vec{F}_g$, lançado com uma determinada velocidade inicial $\vec{v}_0$.

A Figura 2.2 exibe o vetor velocidade inicial $\vec{v}_0 = \vec{v}(t_i)$, o qual faz um ângulo θ $(0 \le \theta \le \pi)$ com o eixo Y (no solo). Por conveniência, escolheremos o instante inicial como sendo zero, $t_i = 0$. Também por conveniência, escolheremos a origem como a posição inicial, $\vec{r}(t_i) = 0$. A Figura 2.2 exibe também o vetor posição $\vec{r}(t)$ no instante $t > t_i$, bem como o vetor velocidade neste mesmo instante. Lembre-se que a velocidade é sempre tangente à trajetória (mesmo que a curva representando a trajetória ainda não seja conhecida).

Escreva todos os vetores em coordenadas. Usando o sistema de coordenadas mostrado na Figura 2.2, temos a gravidade

$$\vec{F}_g = -mg\,\hat{k},\ g = 9,8\ \text{m/s}^2, \tag{2.29}$$

o vetor posição

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}, \tag{2.30}$$

o vetor velocidade

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\hat{\imath} + \dot{y}(t)\hat{\jmath} + \dot{z}(t)\hat{k}, \tag{2.31}$$

e o vetor aceleração

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\hat{\imath} + \ddot{y}(t)\hat{\jmath} + \ddot{z}(t)\hat{k}. \tag{2.32}$$

Finalmente, as condições iniciais,

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0 \tag{2.33}$$

e

$$\dot{x}(0) = 0, \dot{y}(0) = v_0 \cos\theta, \dot{z}(0) = v_0 \operatorname{sen}\theta. \tag{2.34}$$

Momento de usar a segunda lei $\vec{F}_g = m\vec{a}$ (massa constante) na forma de coordenadas,

$$-mg\,\hat{k} = m\ddot{x}(t)\hat{\imath} + m\ddot{y}(t)\hat{\jmath} + m\ddot{z}(t)\hat{k}, \tag{2.35}$$

a qual implica em três EDOs (a igualdade vetorial implica na igualdade entre coordenadas em cada eixo; verifique),

$$0 = \ddot{x}(t),\ 0 = \ddot{y}(t),\ -g = \ddot{z}(t). \tag{2.36}$$

Essas EDOs são, essencialmente, do mesmo tipo: derivada segunda igual a uma constante. De acordo com a Seção 2.2, cada equação horária será um polinômio no tempo t (verifique),

$$x(t) = c_1 + c_2 t, \tag{2.37}$$

$$y(t) = c_3 + c_4 t, \tag{2.38}$$

$$z(t) = c_5 + c_6 t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{2.39}$$

As seis coordenadas serão determinadas pelas condições iniciais (verifique),

$$c_1 = c_3 = c_5 = 0, \tag{2.40}$$

e

$$c_2 = 0, c_4 = v_0 \cos\theta, c_6 = v_0 \operatorname{sen}\theta. \tag{2.41}$$

Desta forma, esta trajetória é representada pela curva cuja forma paramétrica é dada pelas equações horárias

$$x(t) = 0, \tag{2.42}$$

$$y(t) = v_0 \cos\theta\, t, \tag{2.43}$$

$$z(t) = v_0 \operatorname{sen}\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{2.44}$$

Esta curva é uma parábola no plano YZ. Consequentemente, as componentes do vetor velocidade são,

$$v_x(t) = 0, \tag{2.45}$$

$$v_y(t) = v_0 \cos\theta, \tag{2.46}$$

$$v_z(t) = v_0 \operatorname{sen}\theta - gt. \tag{2.47}$$

O módulo desse vetor velocidade, necessário para calcular o comprimento da trajetória, é (verifique)

$$v^2(t) = \vec{v}\cdot\vec{v} = v_0^2 - g \operatorname{sen} 2\theta\, t + (gt)^2. \tag{2.48}$$

Como o comprimento da trajetória é a integral do módulo do vetor velocidade

$$\Delta s = \int_{t=0}^{t=t_q} v(t)\, dt = f(\theta), \tag{2.49}$$

ele se torna uma função do ângulo θ de lançamento. Assim, o maior comprimento ocorre para um ângulo θ_m quando esta função $f(\theta)$ passa pelo seu máximo (um dos extremos), satisfazendo (verifique)

$$\left.\frac{df}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_m} = 0 \implies \theta_m = \frac{\pi}{2}. \tag{2.50}$$

Esse também é o ângulo para o qual o alcance é máximo (verifique). Dica: use o fato da derivada de uma função composta (como a raiz quadrada) ser proporcional à derivada de seu argumento.

Modelagem. Apenas observando o experimento é impossível afirmar que a trajetória de um objeto lançado obliquamente é uma parábola. Mais difícil ainda identificar o ângulo para o qual o alcance (e o comprimento da trajetória) é máximo. Quando o sistema mecânico é simulado por um modelo matemático, previsões podem ser feitas sem a necessidade de experimentos. Como a força resultante é paralela ao eixo vertical, o eixo Z, a segunda lei nos diz que o momentum linear é conservado nas demais direções (onde as componentes da força resultante são nulas). A conservação do momentum linear no eixo X é trivial, pois não há movimento lá. No entanto, a conservação do momentum linear no eixo Y, mais uma previsão do modelo matemático, somente pode ser observada após uma série de medidas cuidadosas da velocidade neste eixo. Outro resultado que jamais poderia ser percebido somente pela experimentação: a trajetória não depende da massa do objeto. Isto significa que as trajetórias de uma bola de gude e de um fusca serão idênticas quando lançados sob as mesmas condições iniciais. Este modelo (ainda) não leva em consideração a presença da atmosfera (se houver).

Exercício 4. *Detalhe todas as passagens sinalizadas por "verifique".*

2.4 Oscilador harmônico

2.4.1 Lei de Hooke

Por volta de 1660 Hooke descobriu experimentalmente o comportamento da deformação de objetos. Quando deformado, comprimido ou esticado, o objeto tende a se restaurar. Para pequenas deformações, a restauração é proporcional à deformação. Essa é a lei de Hooke. Na mesma época, Newton estava estabelecendo suas leis do movimento, bem como a teoria da gravitação. Hoje podemos parafrasear a lei de Hooke em termos de forças, as mesmas que aparecem na segunda lei: a força restauradora produzida por uma pequena deformação em um objeto é proporcional à deformação e está na mesma direção da deformação. A lei de Hooke permitiu a construção de molas com as mais variadas capacidades restauradoras e formatos. A capacidade de restauração de uma mola é dada pela chamada constante de mola k, determinada experimentalmente.

2.4.2 Força elástica

A Figura 2.3 mostra uma mola de constante $k > 0$, em forma de uma espiral. Uma das extremidades está presa no suporte mantido fixo (lado esquerdo). Na outra extremidade da mola há um objeto de massa m, o qual é permitido movimentar-se na direção da deformação. Esse sistema mecânico é denominado de massa-mola. O sistema de coordenadas mais adequado está mostrado na Figura 2.3, onde a deformação está em um dos eixos e a origem $\mathcal{O}$ corresponde a uma deformação nula na mola. Desta forma, a posição x do objeto de massa m também indica a deformação aplicada à mola. Para $x > 0$ a mola está esticada (situação indicada na figura). Para $x < 0$ a mola está comprimida. Assim a lei de Hooke toma a forma

$$\vec{F}_e = -kx\,\hat{\imath}. \tag{2.51}$$

Note esta força elástica é dependente da posição x da massa presa à mola e sempre oposta à deformação ($|x|$) graças ao sinal negativo presente nela (verifique). A constante de mola k é sempre positiva.

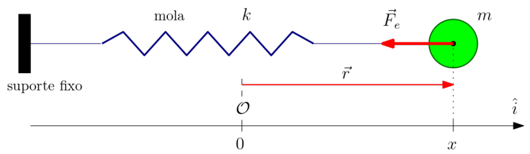

Figura 2.3: Massa-mola: um objeto de massa m preso a uma mola de constante k.

2.4.3 Fatos experimentais

A observação cuidadosa do sistema massa-mola exibido na Figura 2.3, completamente isolado, revela os seguintes fatos.

1. A massa m executa um movimento oscilatório, limitado a uma certa região retilínea de comprimento $2A$. A quantidade A é denominada de amplitude.

2. Esse movimento oscilatório tem uma frequência (fixa) que depende apenas da massa m e da constante de mola k. A frequência não depende da amplitude.

3. Na ausência de outras forças, esse movimento oscilatório é permanente, harmônico. Porém, na presença da atmosfera, a qual contribui com uma força viscosa, esse movimento cessa.

2.4.4 Segunda lei

A Figura 2.3 representa a massa sujeita à força elástica $\vec{F}_e$ num dado instante de tempo t após o momento inicial t_0. Neste instante t, a massa m encontra-se numa determinada posição especificada pelo vetor posição $\vec{r}$, cuja única componente é x (sabemos que a trajetória será retilínea). Portanto, os vetores cinemáticos, escritos em coordenadas, no mesmo sistema de coordenadas $\mathcal{O}$ em que a força elástica foi escrita, são

$$\vec{r} = x\,\hat{\imath},\ \vec{v} = \dot{x}\,\hat{\imath},\ \vec{a} = \ddot{x}\,\hat{\imath}. \tag{2.52}$$

desta forma, a segunda lei $\vec{F}_e = \dot{\vec{p}} = m\vec{a}$ (massa constante), com a força elástica $\vec{F}_e$ dada em (2.51), fornece a seguinte EDO (verifique):

$$-\,kx = m\ddot{x} \implies \boxed{\ddot{x} = -\omega_0^2\, x},\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{2.53}$$

Note que a constante (ou parâmetro) ω_0 tem dimensões de frequência (inverso do tempo; verifique),

$$[k] = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{T}^2}, \quad [\omega_0] = \frac{1}{\mathrm{T}}. \tag{2.54}$$

2.4.5 Equação horária

A EDO em (2.53) está nos perguntando se conhecemos "uma função cuja derivada segunda é proporcional a ela mesma". Note que essa constante de proporcionalidade é estritamente negativa, $-\omega_0^2$. Sim, conhecemos as funções trigonométricas (seno e cosseno). Assim, a equação horária pode ser da forma

$$x(t) = A\cos\theta(t), \tag{2.55}$$

com A constante e $\theta(t)$ uma função ainda desconhecida do tempo. O argumento θ de uma função trigonométrica é denominado de fase. Lembre-se que o cosseno é uma função transcendental e, como tal, seu argumento deve ser adimensional. Portanto, $[A] = [x] = \mathrm{L}$. Tomemos a derivada segunda (verifique) dessa equação horária (proposta de solução), sem esquecer que as funções trigonométricas são funções compostas,

$$\dot{x} = -A\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{2.56}$$

e

$$\ddot{x} = -A\,\dot{\theta}^2\cos\theta - A\,\ddot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{2.57}$$

Momento de substituir (verifique) a derivada segunda na EDO (2.53),

$$\ddot{x} = -\omega_0^2\, x \implies \dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta = \omega_0^2\cos\theta. \tag{2.58}$$

Este resultado pode ser reescrito numa forma mais organizada, coletando os termos em cosseno e seno, (verifique)

$$(\dot{\theta}^2 - \omega_0^2)\cos\theta + \ddot{\theta}A\,\mathrm{sen}\,\theta = 0. \tag{2.59}$$

A trigonometria nos ensinou que uma função trigonométrica não pode ser escrita como múltipla da outra, ou seja, as funções cosseno e seno são linearmente independentes,

$$a\cos\theta + b\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \implies a = b = 0. \tag{2.60}$$

A expressão que obtivemos anteriormente, decorrente da substituição da equação horária proposta na EDO do sistema massa-mola, é justamente uma combinação linear de duas funções linearmente independentes. Portanto, cada coeficiente nesta equação deve ser nulo (única solução possível),

$$\dot{\theta}^2 - \omega_0^2 = 0, \quad \ddot{\theta} = 0. \tag{2.61}$$

A última dessas duas EDOs para a função $\theta(t)$ implica que ela seja uma função linear do tempo (verifique; veja a Seção 2.2),

$$\ddot{\theta} = 0 \implies \theta(t) = \varphi + \omega t \implies \dot{\theta} = \omega, \tag{2.62}$$

com φ e ω constantes. Substituindo esse resultado na outra EDO para θ, encontramos (verifique) o valor da constante ω,

$$\dot{\theta}^2 - \omega_0^2 = 0 \implies \dot{\theta}^2 = \omega^2\omega_0^2 \implies \omega = \pm\omega_0. \quad (2.63)$$

Como as funções trigonométricas possuem paridades bem definidas (o cosseno é uma função par e o seno é uma função ímpar) e A e φ são arbitrárias (o que significa que podemos reescrevê-las como $-A$ e $-\varphi$), podemos ignorar (verifique) o sinal o negativo em $\omega = \pm\omega_0$. Assim, a equação horária $x(t)$, solução da EDO do sistema massa-mola, é

$$\boxed{\ddot{x} = -\omega_0^2\, x} \implies \boxed{x(t) = A\cos\theta(t),\ \theta(t) = \varphi + \omega_0 t}. \quad (2.64)$$

Por razões óbvias, a constante A é denominada de amplitude, φ de constante da fase e ω_0 de frequência (angular) natural. Essa EDO do sistema massa-mola aparece em muitos outros modelos em diversas áreas do conhecimento. Ela deve ser memorizada.

2.4.6 Condições iniciais

As duas constantes A (amplitude) e φ (constante da fase) devem ser determinadas pelas condições iniciais. Por exemplo, suponha que no instante inicial $t_0 = 0$ a massa m seja solta do repouso, portanto com velocidade inicial nula, $\dot{x}(0) = 0$, na posição $x(0) = 1$ (uma unidade de comprimento). Impondo que a velocidade inicial seja nula (repouso), determinamos a constante da fase,

$$\dot{x}(0) = -\omega_0 A \operatorname{sen}\varphi = 0 \implies \varphi = 0. \quad (2.65)$$

Com a constante da fase determinada, $\varphi = 0$, a posição inicial determina a amplitude,

$$x(0) = A\cos(0) = 1 \implies A = 1. \quad (2.66)$$

Escolhendo $\omega_0 = 1$ (inverso da unidade de tempo), a equação horária correspondente a este exemplo é $x(t) = cos(t)$ (em unidades de comprimento). O movimento da massa m forma uma trajetória retilínea e oscilatória. Esse sistema massa-mola também é conhecido por oscilador harmônico. O adjetivo harmônico vem da presença de uma função trigonométrica elementar (periódica) na equação horária.

2.4.7 Modelagem

Naturalmente, a concordância entre a previsão feita pelo modelo matemático para a frequência de oscilação,

$$f = 2\pi\omega_0,\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (2.67)$$

e o valor medido experimentalmente é excelente, perfeita. Note o fator 2π na frequência que é medida no laboratório. A inclusão de uma força viscosa, produzida por um fluido, como a atmosfera ou óleo no caso de amortecedores, leva à indústria bilionário dos amortecedores.

Exercício 5. *Detalhe todas as passagens sinalizadas por "verifique".*