Cinemática

Esmerindo Bernardes [1]

L.I.A. – Laboratório de Instrumentação Algébrica

Departamento de Física e Ciência dos Materiais

Instituto de Física de São Carlos

Universidade de São Paulo

10 de novembro de 2020

[1]email: sousa@ifsc.usp.br

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Este curso usa as leis da Mecânica newtoniana para ampliar a familiaridade com o método científico, da mesma forma que usamos uma academia de ginástica. Portanto, participação ativa é fundamental. Não há qualquer benefício em observar passivamente os aparelhos numa sala de ginástica. As ferramentas matemáticas necessárias serão construídas e/ou reconstruídas, bem como procedimentos científicos, na medida da necessidade. Conhecimentos de Cálculo (derivadas e integrais), Geometria (pontos, curvas, vetores e sistemas de coordenadas) e Computação (simulação, visualização e computação algébrica) serão colocados juntos na descrição de alguns sistemas mecânicos via o conceito de modelo científico.

Estudaremos em Cinemática os conceitos de posição, velocidade, aceleração e trajetórias, sem nos preocuparmos com as suas causas. Procuraremos construir ferramentas matemáticas adequadas a uma descrição elegante e prática destas grandezas físicas.

Em geral, um objeto qualquer move-se em um determinado espaço, geralmente o espaço euclidiano tridimensional. Portanto, precisaremos construir uma forma efetiva de representar posição, velocidade, aceleração e trajetória deste objeto em cada instante de tempo neste espaço. Para efetuarmos esta representação, precisaremos de ferramentas matemáticas. Precisaremos de pontos para localizar nossos objetos físicos e de curvas espaciais para representar suas trajetórias. Precisaremos de vetores para representar posição, velocidade, aceleração e forças. Precisaremos de um sistema de coordenadas para descrever pontos, vetores e trajetórias. Precisaremos de produtos escalares e vetoriais para extrairmos informações mensuráveis de vetores, bem como construir novos vetores. Também precisaremos de ferramentas do Cálculo (derivadas e integrais) para expressar taxas de variação (no tempo) e espaço percorrido. Computação é indispensável para simularmos e visualizarmos movimentos em sistemas mecânicos, além de realizar operações algébricas tediosas de serem realizadas manualmente (computação algébrica).

No decorrer de nossas atividades desenvolveremos também a (incrível) capacidade de construir modelos, onde sistemas mecânicos são descritos matematicamente, possibilitando e facilitando a descoberta de informações novas (previsões). Um bom modelo tem uma forma circular (perfeita). Observações sobre um sistema leva a uma descrição matemática que leva a informações novas (dificilmente descobertas pela experimentação direta). Naturalmente, o *modus operandi* trabalhado nesta construção de modelos pode ser aplicado a qualquer área da ciência.

Capítulo 2

Geometria

2.1 O espaço Euclidiano

O que é o espaço? Pode parecer inacreditável, mas ainda não dispomos de uma resposta concreta a esta pergunta e, talvez, nunca venhamos tê-la. No entanto, veremos que, mesmo desprovidos de uma definição, seremos capazes de usar o espaço de forma operacional. Encontraremos outras duas situações análogas envolvendo os conceitos de tempo e massa. Esta capacidade de operar com conceitos desprovidos de uma definição única é, sem dúvidas, uma das grandes conquistas humanas.

Vamos admitir a "existência" de um espaço caracterizado pelas seguintes qualidades:

1. a soma dos espaços das partes é igual ao espaço do todo contendo estas partes;

2. o espaço é desprovido de matéria e, portanto, desprovido de qualquer propriedade que possa influenciar no movimento dos corpos;

3. o espaço é homogêneo, isto é, qualquer posição ao longo de uma determinada direção é sempre igual às demais;

4. o espaço é isotrópico, isto é, estando em uma posição fixa, todas as direções são idênticas;

5. o espaço apresenta três dimensões independentes (por exemplo, largura, profundidade e altura) e é infinito.

Como veremos a seguir, estas propriedades tornam operacional o conceito de espaço euclidiano, uma homenagem ao matemático grego Euclides que viveu no Séc. III a.C., considerado o fundador da geometria plana, foi estabelecido somente a partir do Séc. XIV. As principais propriedades dos objetos geométricos da geometria Euclidiana são estudadas detalhadamente no curso de Geometria Analítica.

Tendo estabelecido estas propriedades, podemos afirmar que objetos podem ser localizados neste espaço através de coordenadas, medidas em relação a alguma posição fixa, previamente escolhida, a qual chamaremos de referencial. Note, portanto, que coordenadas são medidas relativas de distância.

Também é importante mencionar que espaço e tempo são conceitos distintos mecânica newtoniana, ou seja, relógios sincronizados podem ser colocados simultaneamente em qualquer posição neste espaço que estamos considerando. Desta forma, trabalharemos com a noção de tempo absoluto, ou seja, relógios sincronizados sempre marcarão os mesmos intervalos de tempo em qualquer posição do espaço.

Usaremos aqui as noções de ponto como sendo um objeto adimensional, de curva como sendo um objeto unidimensional (tendo apenas comprimento, como retas, parábolas, circunferências, elipses, espirais, etc.) e de superfície como sendo um objeto bidimensional (tendo apenas área, como planos, cascas esféricas e cilíndricas, etc.). Também utilizaremos a noção de vetor como sendo uma flecha (segmento orientado) tendo comprimento, direção e sentido. Portanto, vetores são objetos que necessitam de três informações para serem especificados. Objetos que precisam de apenas uma informação para serem especificados, como os números reais, são denominados de escalares. Também assumiremos que o teorema de Pitágoras para triângulos retângulos seja conhecido (a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa).

2.2 Referencial

Muito bem, tendo estabelecido as principais propriedades do espaço euclidiano, precisamos construir um referencial para localizar pontos e curvas (restringindo aos objetos geométricos que nos interessa mais). Uma vez que estaremos considerando o espaço euclidiano tridimensional, o referencial mais simples deverá apresentar um ponto fixo (a origem) pelo qual passam três retas mutuamente ortogonais e indicar um sentido positivo em cada uma delas (eixos orientados). Denominemos de $\mathcal{O}$ a origem, de X, Y e Z os eixos mutuamente perpendiculares e de $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ os segmentos orientados de comprimentos unitários em cada eixo. Esses segmentos orientados unitários são denominados de versores. Um ponto m será "localizado"neste referencial pelo seguinte procedimento geométrico:

1. trace uma reta paralela ao eixo Z, passando por m, até interceptar o plano XY em m';
2. trace uma reta paralela ao eixo Y, passando por m', até interceptar o eixo X em x;
3. trace uma reta paralela ao eixo X, passando por m', até interceptar o eixo Y em y;
4. trace uma reta paralela ao plano XY, passando por m, até interceptar o eixo Z em z;
5. as projeções (x, y, z) são as coordenadas do ponto m.

A Figura 2.1 ilustra o ponto m, com coordenadas $m = (x, y, z)$, representado em um referencial com eixos X, Y e Z mutuamente perpendiculares (ortogonais), conhecido como sistema de coordenadas cartesiano, ou simplesmente sistema ortonormal de coordenadas, introduzido por René Descartes no Séc. XVII. Em geral usamos a origem para nomear um sistema de coordenadas. Neste caso, dizemos “o referencial (ortonormal) $\mathcal{O}$”.

E se os eixos do referencial não forem ortogonais (perpendiculares)? Neste caso há

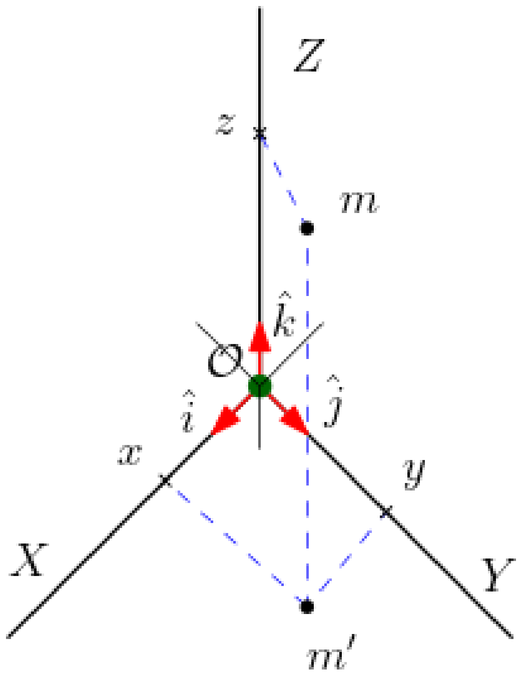

Figura 2.1: Sistema de coordenadas ortogonal. Ponto (ou objeto) m localizado pelas coordenadas (x, y, z) no referencial $\mathcal{O}$.

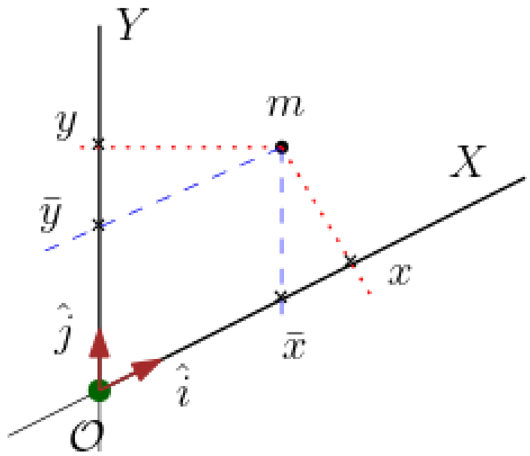

Figura 2.2: Sistema de coordenadas não-ortogonal. Ponto (ou objeto) m localizado pelas coordenadas (x, y) e $(\bar{x}, \bar{y})$ no referencial $\mathcal{O}$.

mais de uma forma "canônica"de construirmos as coordenadas de um ponto. Você questionou o uso de retas paralelas (aos eixos) no procedimento geométrico usado para construir as coordenadas no referencial ortonormal? Por que não retas com uma outra inclinação? Para reduzir ao mínimo o número de possibilidades, o bom senso pede para usarmos retas paralelas ou perpendiculares aos eixos. A Figura 2.2 ilustra o uso de retas paralelas e perpendiculares aos eixos, resultando em projeções diferentes (x, y) e $(\bar{x}, \bar{y})$. Embora estas projeções distintas possam ser relacionadas, deixaremos este exercício para outra oportunidade.

Como podemos calcular a distância entre dois pontos usando suas coordenadas? A distância entre dois pontos é o comprimento do segmento de reta que os une. Por exemplo, o segmento de reta que une a origem $\mathcal{O} = (0, 0, 0)$ e o ponto $m = (x, y, z)$ na Figura 2.3 tem um comprimento igual a $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Este resultado pode ser obtido aplicando o teorema de Pitágoras duas vezes (faça o Exercício 1). Este exemplo nos ensina que em geral a distância $d(A, B)$ entre dois pontos quaisquer $A = (x_a, y_a, z_a)$ e $B = (x_b, y_b, z_b)$ é

$$d(A, B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}. \quad (2.1)$$

Esse resultado será válido mesmo se esses dois pontos estiverem infinitesimalmente próximos. Há outra utilidade para esta distância entre dois pontos num espaço euclidiano. Denominemos por vetor um segmento de reta com uma orientação (segmento orientado, flecha). Como todo segmento orientado inicia em um ponto, digamos $A = (x_a, y_a, z_a)$, e termina em outro, digamos $B = (x_b, y_b, z_b)$, então o comprimento (ou norma) $\|\vec{AB}\|$ do vetor $\vec{AB}$ é

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}. \quad (2.2)$$

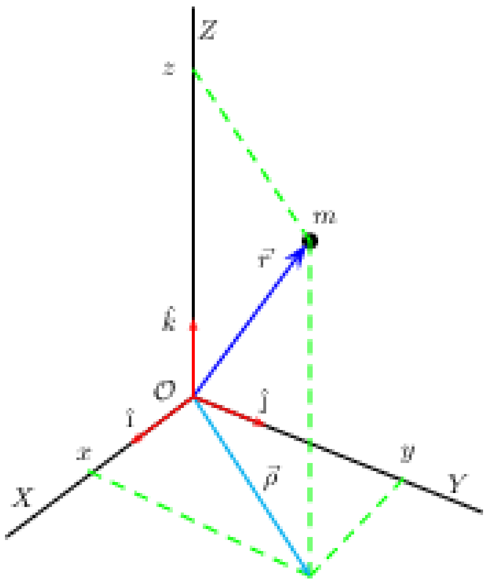

Figura 2.3: Sistema de coordenadas cartesiano ortonormal. Ponto (ou objeto) m localizado pelas coordenadas (x, y, z) no referencial $\mathcal{O}$. Vetores posição $\vec{r}$ e sua projeção $\vec{\rho}$ no plano XY.

2.2.1 Exercícios

Exercício 1. *Use o teorema de Pitágoras para determinar o comprimento do vetor $\vec{\rho}$ no plano XY na Figura 2.3 em termos das coordenadas x e y. Use régua e papel e lápis e desenhe um triângulo retângulo formado com os catetos $x = 4$ cm e $y = 3$ cm. Verifique (experimentalmente) com sua régua que o comprimento da hipotenusa é muito próximo do valor calculado pelo teorema de Pitágoras (opcional). Discuta a fonte e o tamanho dos erros em suas medidas (opcional).*

Exercício 2. *Use o resultado do exercício anterior e novamente o teorema de Pitágoras para determinar o comprimento do vetor $\vec{r}$ na Figura 2.3. Calcule o valor deste comprimento quando $x = 4$ cm, $y = 3$ cm e $z = 5$ cm.*

2.3 Vetor posição

Um vetor com a origem fixa na origem de um sistema de coordenadas e com a ponta na posição de um objeto (em movimento ou não) é denominado de vetor posição. Essencialmente, estamos usando vetores para representar posições. Em princípio não precisamos usar um vetor para localizar um ponto no espaço. No entanto, a noção de velocidade requer a presença de um vetor posição, como veremos adiante. Quando há movimento, é importante especificar também a direção e o sentido deste movimento. Em outras palavras, precisamos saber para onde estamos indo, literalmente. Como veremos, vetores constituem uma linguagem matemática extremamente concisa, elegante e prática para descrevermos posições, velocidades, acelerações e outras quantidades físicas, como forças, que necessitam de direção e sentido, além de intensidade, para serem especificadas completamente.

Vejamos então algumas propriedades importantes sobre vetores (todas as propriedades de vetores são estudadas detalhadamente no curso de Geometria Anlítica). Primeiro, vetores podem ser multiplicados por núme-

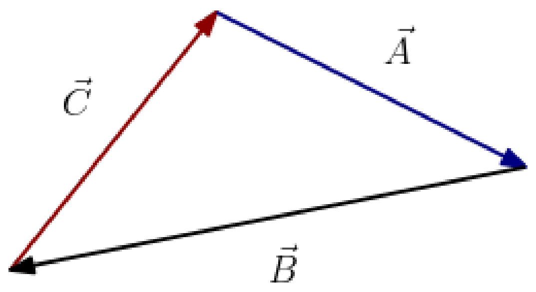

Figura 2.4: Os vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$ formam um polígono fechado: $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=0$.

ros, mantendo a direção e alterando o comprimento. O sentido será invertido somente se esse número for negativo. Segundo, vetores podem ser somados (ou subtraídos) de acordo com a regra simples: a soma é nula se os vetores formarem um polígono fechado, com a ponta de um vetor no "pé" do outro, como ilustrado na Figura 2.4 onde $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=0$. Note que estamos assumindo que vetores possam ser transportados (como flechas) sem que haja mudanças no comprimento, direção e sentido. Quando multiplicamos objetos por números e realizamos somas desses mesmos objetos, obtendo objetos do mesmo tipo, estamos realizando combinações lineares. Por exemplo, na Figura 2.4 podemos formar a combinação linear $\vec{C}=-\vec{A}-\vec{B}$, entre outras possíveis.

Outra característica de um vetor, muito importante para a Física, é o seu comportamento em relação a rotações em torno de um eixo fixo e à inversões espaciais. Quando um vetor é rodado em torno de um eixo fixo, o comprimento do vetor não é alterado. Inversão espacial significa inverter o sentido, mantendo a direção e o comprimento inalterados ("virar ao avesso"). Um candidato a vetor (que tem comprimento, direção e sentido) que permanece invariante a uma inversão espacial é denominado de pseudo-vetor (exemplos de pseudo-vetores serão apresentados após estudarmos o produto vetorial).

A descrição de vetores num sistema de coordenadas é muito frutífera. Vamos denotar por $\hat{r}$ (observe a notação) um vetor de comprimento unitário, o qual chamaremos de versor. O versor sempre indica a direção e o sentido de um determinado vetor. Sendo r o comprimento do vetor $\vec{r}$, então $\vec{r}=r\hat{r}$. A Figura 2.3 exibe três versores, $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$; um versor para cada uma das três direções independentes. Observe na Figura 2.3 que podemos formar, naturalmente, a combinação linear $\vec{\rho}=x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}$, bem como $\vec{r}=\vec{\rho}+z\hat{k}$, ou seja

$$\vec{r}=x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}+z\hat{k}=(x,y,z), \tag{2.3}$$

e

$$r^2=x^2+y^2+z^2, \tag{2.4}$$

onde a notação $\vec{r}=(x,y,z)$ é conveniente (a ordem não pode ser alterada). As projeções (x,y,z) são as coordenadas do vetor posição r no sistema de coordenadas $\mathcal{O}$. Por exemplo, quando escritos nesta notação conveniente, a combinação linear entre os vetores $\vec{A}=(x_a,y_a,z_a)$ e $\vec{B}=(x_b,y_b,z_b)$ será

$$\begin{aligned}\alpha\vec{A}+\vec{B}&=(\alpha x_a,\alpha y_a,\alpha z_a)+(x_b,y_b,z_b)\\&=(\alpha x_a+x_b,\alpha y_a+y_b,\alpha z_a+z_b).\end{aligned} \tag{2.5}$$

Vale observar que dado três vetores, não necessariamente num mesmo plano, pode ser que nenhuma combinação linear entre eles seja possível. Neste caso, estes vetores são denominados de linearmente independentes. Os três versores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$, mostrados na Figura 2.3, são linearmente independentes (faça o Exercício 4).

2.3.1 Exercícios

Exercício 3. *Desenhe os vetores posição* $\vec{R}_1 = (1, 2, 0)$ *e* $\vec{R}_2 = (1, 1, 0)$ *em um mesmo sistema cartesiano de coordenadas (ortonormal). Determine as coordenadas da soma* $\vec{R}_1+\vec{R}_2$ *e da diferença* $\vec{R}_1-\vec{R}_2$ *e represente-os no mesmo sistema de coordenadas anterior. Use o teorema de Pitágoras para determinar o comprimento de cada vetor.*

Exercício 4. *Primeiro note que as componentes dos versores* $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ *e* $\hat{k}$ *mostrados na Figura 2.3 são* $\hat{\imath} = (1, 0, 0)$, $\hat{\jmath} = (0, 1, 0)$ *e* $\hat{k} = (0, 0, 1)$. *Agora tente escrever, por exemplo,* $\hat{k} = \alpha\hat{\imath} + \beta\hat{\jmath}$. *Sabendo que a igualdade entre vetores somente é possível se houver uma igualdade entre suas componentes em cada direção, mostre que a combinação linear* $\hat{k} = \alpha\hat{\imath}+\beta\hat{\jmath}$ *resulta em três equações lineares. Mostre que duas destas equações lineares envolvem os escalares* α *e* β, *cuja soluções são* $\alpha = 0$ *e* $\beta = 0$. *Verifique que a terceira equação é inconsistente* $(0 = 1)$. *Isto mostra que os versores* $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ *e* $\hat{k}$ *são linearmente independentes, isto é, não admitem uma combinação linear entre eles. Este é um resultado tão importante que será abordado em outros cursos (Cálculo, Geometria e Álgebra).*

2.4 Produto escalar

Há outras operações binárias que podemos realizar com vetores, além da combinação linear? É possível inventar uma operação entre dois vetores que nos dê informações sobre seus comprimentos e o ângulo entre eles? Sim, é possível e muito útil. Vejamos.

Podemos construir uma operação binária envolvendo dois vetores cujo resultado é um número real. Esta operação binária entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, denotada por $\vec{A}\cdot\vec{B} \in \mathbb{R}$, será denominada de produto escalar. O produto escalar é definido requerendo que ele satisfaça as propriedades seguintes.

1. Simetria:
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A} \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

2. Linearidade ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$):
$$\vec{C}\cdot(\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}) = \alpha\,\vec{C}\cdot\vec{A}+\beta\,\vec{C}\cdot\vec{B}. \tag{2.7}$$

3. Positivo definido:
$$\begin{cases} \vec{A}\cdot\vec{A} = 0 \iff \vec{A} = \vec{0}, \\ \vec{A}\cdot\vec{A} > 0 \iff \vec{A} \neq \vec{0}. \end{cases} \tag{2.8}$$

4. Mensurabilidade:
$$A \equiv \|\vec{A}\| \equiv \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}. \tag{2.9}$$

A propriedade (2.6) expressa que o produto escalar é uma operação binária simétrica (ou comutativa). A propriedade (2.7) significa que o produto escalar é linear, pois obedece a propriedade distributiva. Note que os números α e β no lado direito de (2.7) podem ser retirados livremente de dentro do produto escalar. A propriedade (2.8) garante que o produto escalar seja bem comportado (não-degenerado), pois evita que o produto escalar de um vetor com ele mesmo seja nulo sem que o vetor seja nulo. A propriedade (2.9) garante que o comprimento, também conhecido por módulo ou norma, seja calculado pelo produto escalar. Note que a propriedade (2.8) está em sintonia com a definição (2.9) de comprimento como uma quantidade real positiva ou nula. Comprimento nulo quando, e somente quando, o vetor for nulo. O produto escalar é um instrumento (analítico) de medida do comprimento de um vetor.

Uma questão importante é: como realizar esta operação binária, denominada de produto escalar, em termos de coordenadas? ou seja, como tornar o produto escalar operacional? Graças à propriedade distributiva (2.7), basta conhecermos todos os produtos escalares possíveis entres os versores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$, colocados ao longo dos três eixos independentes do espaço euclidiano (veja a Figura 2.3). Desta forma, teremos, em princípio, nove produtos escalares a serem determinados, pois cada vetor pode ser escrito como uma combinação linear dos versores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ do sistema de coordenadas escolhido. No entanto, a propriedade de simetria, presente na definição do produto escalar em (2.6), reduz para seis o número de produtos escalares que devemos conhecer. Uma forma eficiente de guardarmos estes produtos escalares é utilizando um arranjo matricial, isto é, uma matriz 3×3,

$$g \equiv (g_{ij}) \equiv \begin{pmatrix} \hat{\imath}\cdot\hat{\imath} & \hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} & \hat{\imath}\cdot\hat{k} \\ \hat{\jmath}\cdot\hat{\imath} & \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} & \hat{\jmath}\cdot\hat{k} \\ \hat{k}\cdot\hat{\imath} & \hat{k}\cdot\hat{\jmath} & \hat{k}\cdot\hat{k} \end{pmatrix}. \qquad (2.10)$$

Esta matriz é denominada de métrica (por razões óbvias). É sempre bom procurarmos por expressões matemáticas mais sintéticas. Simplesmente rebatizando os versores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ para

$$\hat{e}_1 \equiv \hat{\imath},\ \hat{e}_2 \equiv \hat{\jmath},\ \hat{e}_3 \equiv \hat{k}, \qquad (2.11)$$

podemos reescrever os elementos de matriz da métrica (2.10) como (verifique)

$$g_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = g_{ji},\ i,j \in \{1,2,3\}. \qquad (2.12)$$

Além de mais simples é também muito elegante. Note que a simetria da métrica é uma consequência direta da simetria do produto escalar.

Considere agora dois vetores escritos num mesmo referencial, como aquele mostrado na Figura 2.3, com os versores escritos como em (2.11). Seja então

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^{3} A_i\hat{e}_i = A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3 = (A_1, A_2, A_3) \qquad (2.13)$$

e

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{3} B_i\hat{e}_i = B_1\hat{e}_1 + B_2\hat{e}_2 + B_3\hat{e}_3 = (B_1, B_2, B_3). \qquad (2.14)$$

Agora use todas as propriedades do produto escalar para calcular explicitamente, de preferência usando os somatórios,

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left(\sum_{i=1}^{3} A_i\hat{e}_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{3} B_j\hat{e}_j\right)$$
$$= \sum_{i,j=1}^{3} A_iB_j\,\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j = \sum_{i,j=1}^{3} A_iB_j\,g_{ij}. \quad (2.15)$$

Note o uso de índices distintos (i e j) em (2.15) no momento de escrever cada um dos vetores em coordenadas. **Cada soma requer um índice distinto. Não economize nos índices.** Este mesmo resultado pode ser reobtido usando produtos matriciais (linhas por colunas). Basta usar o vetor $\vec{A}$ como uma matriz linha, $\vec{A}\to(A_i)=(A_1,A_2,A_3)$ e o vetor $\vec{B}$ como uma matriz coluna, a transposta, $(B_j)^{\mathrm{T}}$. Para ver um exemplo, faça o Exercício 5.

Teorema 1. *O produto escalar numa base qualquer é*

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_i)\,g\,(B_j)^T. \quad (2.16)$$

Afinal de contas, como poderemos calcular os produtos escalares que aparecem na métrica (2.10)? Não podemos! Estes produtos escalares devem ser fornecidos no momento em que compramos o referencial. Para entendermos melhor esta situação, devemos nos perguntar: **qual é o significado geométrico do produto escalar?**

Para entendermos melhor o significado geométrico do produto escalar, devemos calcular primeiro o produto escalar entre dois vetores perpendiculares (ortogonais). Vamos usar os versores $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ como dois representantes típicos de vetores ortogonais. Como indicado na Figura 2.5, o comprimento da soma vetorial $\hat{\imath}+\hat{\jmath}$ é a hipotenusa do triângulo retângulo formado pelos versores $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$. Como os versores possuem comprimentos unitários, por definição, então a hipotenusa pode ser calculada usando o teorema de Pitágoras,

$$\|\hat{\imath}+\hat{\jmath}\|^2 = \|\hat{\imath}\|^2 + \|\hat{\jmath}\|^2 = 2. \quad (2.17)$$

Sim, você tem razão. Naturalmente, o valor da hipotenusa também pode ser calculado usando somente a ferramenta (2.9) para calcular o comprimento de um vetor,

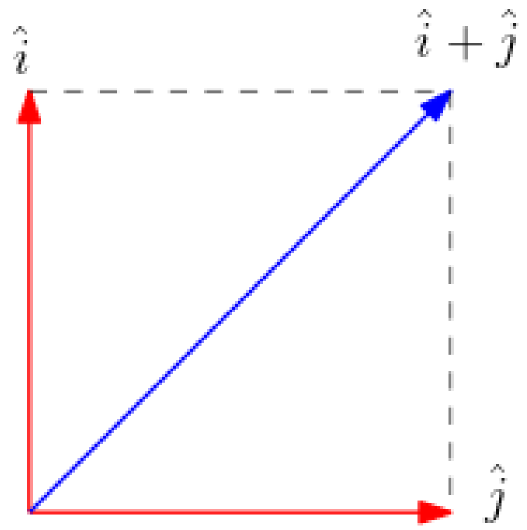

Figura 2.5: Soma de dois versores ortogonais e o teorema de Pitágoras.

$$\|\hat{\imath}+\hat{\jmath}\|^2 = (\hat{\imath}+\hat{\jmath})\cdot(\hat{\imath}+\hat{\jmath})$$
$$= \|\hat{\imath}\|^2 + \|\hat{\jmath}\|^2 + 2\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = 2 + 2\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath}, \quad (2.18)$$

onde usamos também a propriedade distributiva do produto escalar. Comparando estes dois resultados, (2.17) e (2.18), concluímos que $\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath}=0$. **Isto significa que o produto escalar entre dois vetores ortogo-**

nais é nulo. Este resultado continua valendo mesmo para vetores não-unitários, seguindo o mesmo raciocínio anterior. Portanto ele é um teorema:

Teorema 2. *Sejam $\vec{A}$ e $\vec{B}$ dois vetores perpendiculares. Então,*

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{A}\perp\vec{B}. \tag{2.19}$$

Portanto, sabemos o significado de cada elemento na diagonal da métrica (2.10): são os comprimentos (ao quadrado) dos versores. Para o sistema de coordenadas cartesiano da Figura 2.3, os versores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ são unitários (possuem comprimentos iguais a um).

E quando os vetores não são perpendiculares? qual é o significado do produto escalar? Considere dois vetores arbitrários $\vec{A}$ e $\vec{B}$, formando um ângulo θ entre eles. Dois vetores sempre estão em um plano, como mostrado na Figura 2.6. Escolha neste plano um vetor $\vec{C}$ perpendicular a $\vec{B}$. Naturalmente, os versores $\hat{B}$ e $\hat{C}$ formam uma base ortonormal para o vetor $\vec{A}$, isto é, podemos escrever $\vec{A}=A\cos\theta\,\hat{B}+A\sin\theta\,\hat{C}$. Efetue agora o produto escalar $\vec{A}\cdot\hat{B}$ e use o Teorema 2. Resulta (verifique) que $A\cos\theta=\vec{A}\cdot\hat{B}$. **O produto escalar $\vec{A}\cdot\hat{B}$ é exatamente a projeção do vetor $\vec{A}$ sobre o versor $\hat{B}$ (ou na direção do vetor $\vec{B}$).** Note na Figura 2.3 que $\vec{r}\cdot\hat{\imath}=x$, $\vec{r}\cdot\hat{\jmath}=y$ e $\vec{r}\cdot\hat{k}=z$, ou seja, as coordenadas são as projeções do vetor sobre os versores da base. Naturalmente, os papeis de $\vec{A}$ e $\vec{B}$ podem ser perfeitamente invertidos. Assim, temos um segundo teorema.

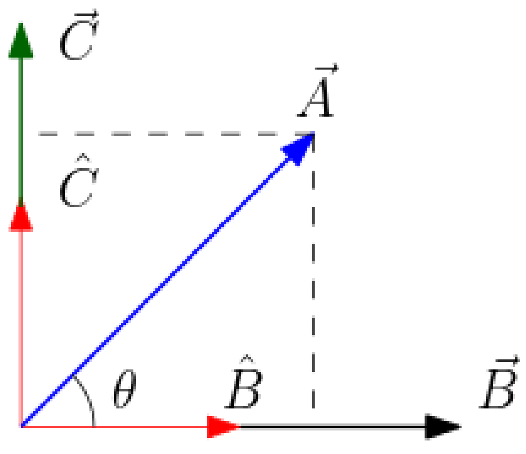

Figura 2.6: Projeção de um vetor sobre o outro.

Teorema 3. *Sejam $\vec{A}$ e $\vec{B}$ dois vetores formando um ângulo θ entre eles. Então,*

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta. \tag{2.20}$$

Note que este teorema nos permite calcular o produto escalar entre dois vetores sem a necessidade de escrevê-los em um determinado sistema de coordenadas, basta conhecermos seus comprimentos e o ângulo entre eles. Vetores são flechas e existem independentemente de um referencial (sistema de coordenadas).

Resumindo: além do comprimento, o produto escalar nos dá também uma informação sobre a orientação relativa entre vetores. Também é importante notar que a expressão (2.20) nos fornece uma forma operacional para calcularmos o produto escalar entre vetores quando seus comprimentos e o ângulo entre eles são conhecidos previamente.

Voltemos ao nosso problema original: o sistema cartesiano da Figura 2.3. Nele, escolhemos os três versores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ mutuamente ortogonais (perpendiculares), isto é, os ângulos entre estes versores é de 90 graus. Portanto, usando o Teorema 3, a métrica (2.10) desse sistema de coordenadas é

$$g = \begin{pmatrix} \hat{\imath}\cdot\hat{\imath} & \hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} & \hat{\imath}\cdot\hat{k} \\ \hat{\jmath}\cdot\hat{\imath} & \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} & \hat{\jmath}\cdot\hat{k} \\ \hat{k}\cdot\hat{\imath} & \hat{k}\cdot\hat{\jmath} & \hat{k}\cdot\hat{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

ou seja, ela é a matriz identidade para um sistema de coordenadas ortonormal. Isto simplifica muito nossa vida e explica a importância prática de usarmos sistemas ortonormais (versores ortogonais e unitários) de coordenadas. Assim, podemos escrever o produto escalar entre dois vetores arbitrários $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ e $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$, usando a prescrição (2.16), em um sistema de coordenadas ortonormal cartesiano simplesmente multiplicando componentes na mesma direção e somando (verifique)

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z. \tag{2.22}$$

Como mais um teste de consistência, use (2.22) para calcular o comprimento do vetor posição $\vec{r}$ da Figura 2.3 e veja que é o mesmo valor obtido diretamente das projeções indicadas na mesma figura.

Também é importante ter em mente que a expressão (2.22) é válida somente em um sistema ortonormal de coordenadas. Caso a base não seja ortonormal, devemos usar a métrica (2.10) em todas as operações envolvendo o produto escalar, como em (2.16). Também devemos ter em mente que a métrica vem junto com a base, ela é um conjunto de "especificações técnicas" sobre a base, uma espécie de "manual de instruções". Se alguém lhe vender uma base sem a métrica, entre em contato com o Procon mais próximo.

Uma vez que as coordenadas dos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são conhecidas em um sistema ortonormal de coordenadas, então podemos usar (2.22) para calcular (em termos das coordenadas) o valor do produto escalar que aparece no lado esquerdo de (2.20), bem como os módulos A e B que aparecem no lado direito. Assim, poderemos usar (2.20) para calcular o ângulo entre dois vetores.

Observação sobre o módulo de um vetor. A Propriedade 4 na definição do produto escalar, diz para calcularmos o comprimento de um vetor usando um produto escalar, Eq. (2.9). Usar o produto escalar é muito mais geral que usar a distância euclidiana, válida somente num sistema ortornal de coordendas. O produto escalar pode ser implementado em qualquer sistema de coordenadas.

2.4.1 Exercícios

Exercício 5. *Use os procedimentos (2.15) e (2.16) para obter a forma explícita da métrica em (2.10).*

Exercício 6. *Efetue o produto escalar entre os vetores posição $\vec{R}_1 = (1,2,1)$ e $\vec{R}_2 = (1,1,2)$. Calcule também o comprimento de cada um deles bem como o ângulo entre eles. Repita este procedimento para os vetores resultantes da soma e da diferença entre $\vec{R}_1$ e $\vec{R}_2$. Considere um sistema ortonormal de coordenadas.*

Exercício 7. *Suponha que uma determinada* *base tenha a seguinte métrica:*

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (2.23)$$

Determine os ângulos entre os versores desta base e desenhe-a. Suponha que $\vec{R}_1 = (1,2,1)$ *e* $\vec{R}_2 = (1,1,2)$ *sejam dois vetores escritos nesta base. Determine seus comprimentos e o produto escalar e o ângulo entre eles. Desenhe-os nesta base.*

2.5 Produto vetorial

Há somente mais uma operação binária com vetores que nos interessa (e muito). Desta vez, esta operação binária produzirá um novo vetor. Seja $\mathbb{V}$ o conjunto de todos os vetores. Esta nova operação binária entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, denotada por $\vec{A} \times \vec{B} \in \mathbb{V}$, será denominada de produto vetorial. **Lembre-se que o produto escalar produz um número real (escalar) e o produto vetorial produz um vetor (flecha).** O produto vetorial é definido requerendo que ele satisfaça as propriedades seguintes.

1. Anti-simetria:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}. \qquad (2.24)$$

2. Linearidade ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$):

$$\vec{C} \times (\alpha\vec{A} + \beta\vec{B}) = \alpha(\vec{C} \times \vec{A}) + \beta(\vec{C} \times \vec{B}). \qquad (2.25)$$

3. Perpendicularidade: $\vec{C} \equiv \vec{A} \times \vec{B}$,

$$\vec{C} \cdot \vec{A} = \vec{C} \cdot \vec{B} = 0. \qquad (2.26)$$

4. Orientabilidade: $\vec{C} \equiv \vec{A} \times \vec{B}$,

$$(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) \leftrightarrow (\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}). \qquad (2.27)$$

A propriedade (2.24) afirma que o produto vetorial, ao contrário do produto escalar, é anti-simétrico (troca de sinal quando os vetores trocam de posições). A propriedade (2.25) significa que o produto vetorial, assim como o produto escalar, é linear. Note que os escalares α e β no lado direito de (2.25) podem ser retirados de dentro do produto vetorial (como no caso do produto escalar). A propriedade (2.26) significa que o vetor resultante $\vec{A} \times \vec{B}$ é, simultaneamente, perpendicular aos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

A propriedade (2.27) é uma novidade. O produto vetorial cria um vetor numa direção e que precisa de um sentido nesta direção. A propriedade (2.27) afirma que o sentido do vetor resultante $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ na trinca $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{A} \times \vec{B})$ é idêntico ao sentido do versor $\hat{k}$ na trinca $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ mostrada na Figura 2.3. É equivalente à regra da mão direita indicada na Figura 2.7: o sentido do vetor resultante $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ é indicado pelo nosso polegar direito quando movimentamos os demais dedos da mão direita no sentido de $\vec{A}$ para $\vec{B}$. Note que a propriedade (2.27) é uma escolha para a orientação do produto vetorial (estamos usando a regra da mão direita para estabelecer uma orientação espacial).

Como podemos calcular as componentes do

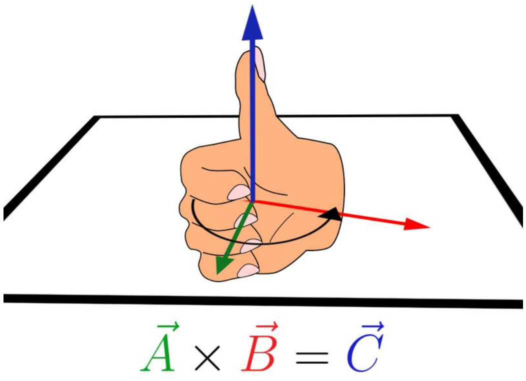

Figura 2.7: O sentido do vetor resultante $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ é dado pela regra da mão direita: empurrando com o dedo indicador o vetor $\vec{A}$ sobre o vetor $\vec{B}$, o polegar indica o sentido do vetor $\vec{C}$.

vetor resultante $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ a partir das componentes dos vetores $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ e $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$? Isto pode ser feito em duas etapas. Primeiro observe que a propriedade (2.26) nos fornece as seguintes relações (verifique):

$$C_x A_x + C_y A_y + C_z A_z = 0, \tag{2.28}$$
$$C_x B_x + C_y B_y + C_z B_z = 0. \tag{2.29}$$

Note que estamos pressupondo que estes vetores estejam decompostos numa base ortonormal. Caso a base não seja ortonormal, devemos efetuar os produtos escalares usando a métrica apropriada.

Das relações (2.28) e (2.29) podemos escrever, por exemplo, as componentes C_x e C_y em função de C_z (verifique),

$$C_x = \frac{A_y B_z - A_z B_y}{A_x B_y - A_y B_x} C_z, \tag{2.30}$$
$$C_y = \frac{A_z B_x - A_x B_z}{A_x B_y - A_y B_x} C_z. \tag{2.31}$$

Naturalmente, podemos reescrevê-las na forma (verifique)

$$\begin{aligned} \frac{C_x}{A_y B_z - A_z B_y} &= \frac{C_y}{A_z B_x - A_x B_z} \\ &= \frac{C_z}{A_x B_y - A_y B_x} = \beta, \end{aligned} \tag{2.32}$$

onde β é um número real arbitrário e independente das coordenadas dos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$. Estas razões devem ser válidas para quaisquer vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$. Desta forma, temos as componentes do vetor $\vec{C}$, resultante do produto vetorial $\vec{A} \times \vec{B}$, em termos das componentes dos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ e da constante arbitrária β. Mas como esta constante β é arbitrária, então podemos escolher um valor para ela: $\beta = 1$. Não se assuste, como veremos adiante, há várias razões práticas para tal escolha. Com $\beta = 1$ em (2.32), temos mais um teorema.

Teorema 4. *As componentes (base ortonormal) do produto vetorial $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ são*

$$\begin{aligned} C_x &= A_y B_z - A_z B_y, \\ C_y &= A_z B_x - A_x B_z, \\ C_z &= A_x B_y - A_y B_x. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Como veremos através de vários exemplos, escolher β como sendo um número positivo está condizente com a propriedade (2.27) (regra da mão direita). Caso tivéssemos escolhido um número negativo para β, teríamos que usar uma regra da mão esquerda. Note que a disposição dos índices x, y e z nas expressões dadas no Teorema 4 segue uma ordem cíclica, com valores positivos no sentido horário, $\{(x, y, z), (z, x, y), (y, z, x)\}$, e com valores negativos no sentido antihorário, $\{(x,z,y),(y,x,z),(z,y,x)\}$. Veja a Figura (2.8), com $(\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k})$ trocados por (x,y,z), para uma ilustração de mais uma regra mnemônica.

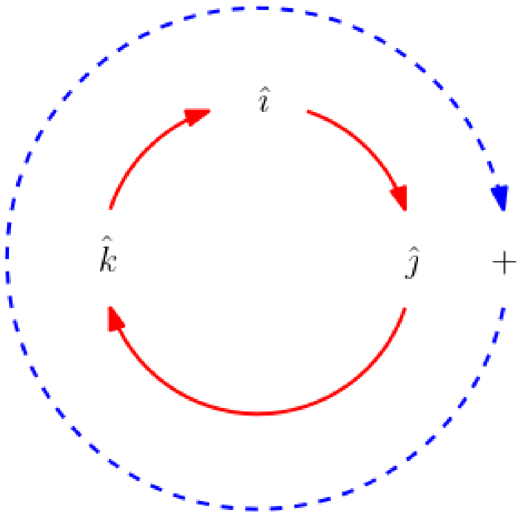

Figura 2.8: O sentido do produto vetorial é dado pela regra da mão direita. Esta regra é equivalente à execução de permutações circulares dos versores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$: $\hat{\imath}\times\hat{\jmath}=\hat{k}$, $\hat{\jmath}\times\hat{k}=\hat{\imath}$ e $\hat{k}\times\hat{\imath}=\hat{\jmath}$.

Tendo as componentes (2.33) do vetor $\vec{C}$, oriundo do produto vetorial $\vec{A}\times\vec{B}$, podemos calcular seu módulo usando o produto escalar (2.9). Após um pouco de paciência (Faça o Exercício 8; use computação algébrica para checar os resultados), encontraremos

$$C^2 = \|\vec{C}\|^2 = A^2B^2 - (\vec{A}\cdot\vec{B})^2, \qquad (2.34)$$

a qual pode ser perfeitamente reescrita, usando o Teorema 2, veja (2.20), em termos do ângulo θ entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$,

$$\begin{aligned} C^2 &= A^2B^2 - A^2B^2\cos^2\theta \\ &= (AB)^2\sin^2\theta. \end{aligned} \qquad (2.35)$$

Portanto, temos outro teorema.

Teorema 5. *O módulo do vetor $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$ pode ser convenientemente calculado por*

$$C = AB\,|\sin\theta|. \qquad (2.36)$$

Este teorema nos permite calcular o comprimento do vetor resultante de um produto vetorial a partir dos comprimentos dos vetores iniciais e do ângulo entre eles, sem a necessidade de escrevê-los em um sistema de coordenadas. Esta situação é análoga àquela relacionada com o Teorema 3. Note a presença do módulo na função trigonométrica.

Vimos anteriormente que um produto escalar está associado com a projeção de um vetor sobre o outro. E o produto vetorial? ele tem alguma interpretação geométrica? Sim, ele tem e é muito relevante. Note que a expressão (2.36) é numericamente igual à área do paralelogramo de lados $A=\|\vec{A}\|$ e $B=\|\vec{B}\|$, formado pelos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ (veja a Figura 2.9 para se convencer disto e faça o Exercício 10). Note que a escolha $\beta=1$ permite esta interpretação. Caso contrário ($\beta\neq 1$), teríamos a área do paralelogramo multiplicada pelo valor de β. Desta forma, podemos adotar esta interpretação geométrica como mais uma propriedade na definição do produto vetorial (para fixar o valor $\beta=1$). Esta propriedade geométrica será usada para derivarmos uma das leis de Kepler para o movimento planetário.

Vejamos outras consequências do Teorema 5. A propriedade (2.36) significa que o produto vetorial entre dois vetores paralelos (ou anti-paralelos) resulta em um vetor nulo, pois neste caso o ângulo entre eles é 0 graus (ou 180 graus). Esta propriedade,

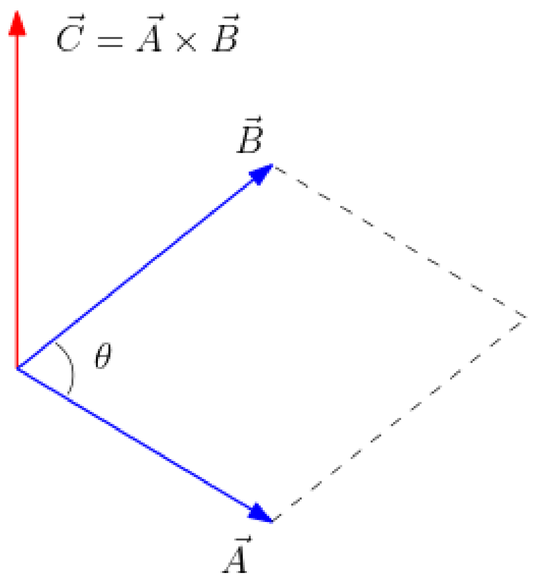

Figura 2.9: O produto vetorial está associado com a área do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$. O sentido do vetor resultante $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ é dado pela regra da mão direita: empurrando com o dedo indicador o vetor $\vec{A}$ sobre o vetor $\vec{B}$, o polegar indica o sentido do vetor $\vec{C}$.

juntamente com a regra da mão direita nos permite calcular todos os produtos vetoriais entre os versores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ de uma base ortonormal:

$$\hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{k}, \quad \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{\imath}, \quad \hat{k} = \hat{\imath} \times \hat{\jmath}. \qquad (2.37)$$

Notas:

1. observando os produtos vetoriais (2.37), percebemos que a regra da mão direita é equivalente a efetuarmos permutações circulares nos versores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$, tomando o sentido horário como positivo, como indicado na Figura (2.8);

2. podemos ver em (2.37) que a escolha $\beta = 1$ em (2.32) garante que o versor resultante $\hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{k}$ seja unitário;

3. usando (2.37) e a propriedade de linearidade (2.25), podemos calcular o produto vetorial entre dois vetores arbitrários escritos explicitamente em termos de uma base ortonormal (faça o Exercício 11).

Mencionamos na Seção 2.3 que um pseudo-vetor não inverte o seu sentido perante uma inversão espacial. Sendo assim, um produto vetorial é um pseudo-vetor, pois invertendo os sentidos de $\vec{A}$ e $\vec{B}$, simultaneamente, em $\vec{A} \times \vec{B}$ nada de novo acontece. Em Física, temos vários pseudo-vetores importantes. Iremos trabalhar com dois deles em Mecânica: momentum angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ e torque $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, onde $\vec{r}$ é o vetor posição, $\vec{p}$ é o momentum linear ($\vec{p} = m\vec{v}$) e $\vec{F}$ é a força resultante atuando no centro de massa de um objeto de massa m. Nas nossas aplicações iremos usar também a força de Lorentz, outro pseudo-vetor importante, $\vec{F}_L = q\,\vec{v} \times \vec{B}$, produzida por um campo magnético $\vec{B}$ sobre uma carga q em movimento com uma velocidade $\vec{v}$.

2.5.1 Exercícios

Exercício 8. *Use as componentes dadas em* (2.33) *para verificar (ou provar, demonstrar) que a expressão em* (2.34) *está correta.*

Exercício 9. *Efetue o produto vetorial* $\vec{R}_3 = \vec{R}_1 \times \vec{R}_2$ *entre os vetores posição* $\vec{R}_1 = (1, 2, 1)$ *e* $\vec{R}_2 = (1, 1, 2)$. *Calcule os comprimentos de cada vetor, bem como os ângulos entre eles. Faça uma representação gráfica destes vetores. Calcule também a área de cada paralelogramo formado por cada par de vetores. Considere um sistema ortonormal de coordenadas.*

Exercício 10. *Calcule a área do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ mostrados na Figura 2.9 em termos dos comprimentos A e B e do ângulo θ entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$.*

Exercício 11. *Efetue o produto vetorial entre $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$ e $\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$ explicitamente, usando apenas a propriedade distributiva (2.25) e os produtos vetoriais (2.37). Mostre que este procedimento nos possibilita re-obter as expressões (2.33).*

Exercício 12. *Verifique que as componentes (2.33) também podem ser calculadas através do determinante*

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \qquad (2.38)$$

Refaça o Exercício 9 usando este método para calcular o produto vetorial.

2.6 Produto misto

O produto misto envolve um produto vetorial seguido de um produto escalar, nessa ordem. A sua definição é: dado três vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$ quaisquer, o produto misto é um número definido por $\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$ (veja a Figura 2.10). Note que temos de executar primeiro o produto vetorial $\vec{A} \times \vec{B}$, o qual resultará em um vetor, para depois calcularmos o produto escalar com $\vec{C}$, resultando em um número.

Que acontece se as posições dos três vetores no produto misto $\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$ forem modificadas simultaneamente, por exemplo para $\vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$? Nada! O produto misto é invariante por permutações circulares (cíclicas) das letras A, B e C. Sim, mais um teorema.

Teorema 6. *O produto misto é invariante por permutações circulares (cíclicas),*

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}). \qquad (2.39)$$

Uma forma de provar o Teorema 6 é fazendo uso do determinante para calcular o produto vetorial (verifique; faça o Exercício 12):

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{A}\cdot\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \qquad (2.40)$$

Note que as permutações cíclicas efetuadas no produto misto (2.39) correspondem a quatro trocas de linhas no último determinante em (2.40), deixando-o inalterado. Portanto, do ponto de vista operacional, o produto misto está muito bem compreendido.

E o significado geométrico do produto misto? Muito bem, você está aprendendo rápido as regras do nosso jogo. O produto misto é numericamente igual ao volume do paralelepípedo formado pelos três vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$ conforme ilustrado pela Figura 2.10 (estude a Figura 2.10 e faça o Exercício 13).

Algumas observações importantes sobre produtos escalares e vetoriais a serem lembradas sempre: (1) o produto escalar é um número real e, geometricamente, está associado à projeção de um vetor sobre o outro; (2) o produto vetorial fornece um novo vetor (na verdade, um pseudo-vetor) cuja norma (módulo) é numericamente igual à área do parale-

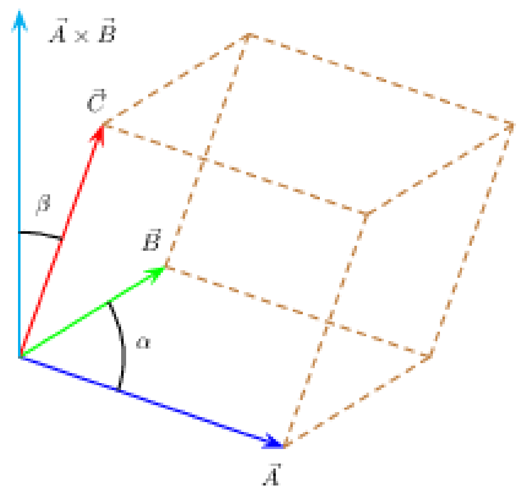

Figura 2.10: O produto misto $\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$ é numericamente igual ao volume do paralelepípedo formado pelos vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$, conforme o tracejado. O módulo do vetor $\vec{D}=\vec{A}\times\vec{B}$ é igual à área da base e o produto escalar $\vec{C}\cdot\vec{D}$ é a altura vezes a área da base, fornecendo o volume.

logramo subentendido pelos dois vetores que foram usados no produto vetorial.

2.6.1 Exercícios

Exercício 13. *Calcule o volume do paralelepípedo formado pelos vetores A, B e C da Figura 2.10 e mostre que este volume é numericamente igual ao produto misto $\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$. Portanto, o produto misto está relacionado com volume. Calcule o produto misto entre os vetores posição $\vec{A}=(1,2,1)$, $\vec{B}=(1,1,2)$ e $\vec{C}=(1,1,-1)$ mostrados na Figura 2.10. Qual é a área da base, a altura, o comprimento dos três lados e o volume do paralelepípedo formado por estes três vetores?*

2.7 Trajetórias

Tendo estabelecido propriedades importantes sobre o espaço Euclidiano, temos que precisar a noção de trajetória de um objeto em movimento neste espaço. Qual é a noção cotidiana de trajetória que temos? Eu a vejo como um sequência de fotografias de um objeto em movimento, tiradas em intervalos de tempo muito pequenos, com as posições do objeto ligadas por retas. Se os intervalos de tempo são muito pequenos, a trajetória terá a aparência de uma curva espacial, um curva suave em três dimensões. Isto é tudo que precisamos para estabelecer uma estrutura matemática geral para qualquer trajetória. Portanto, nosso problema agora é como representar uma curva no espaço Euclidiano de forma eficiente, *i.e.*, tendo um sistema de coordenadas Cartesiano (de preferência ortonormal), temos de encontrar uma forma adequada (para a Mecânica) para representarmos analiticamente uma curva em termos de coordenadas. É o programa cartesiano: transformar objetos geométricos em números.

Definição. Uma curva espacial γ é definida como o lugar geométrico dos pontos

$$\gamma:\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),\ t\in\mathbb{R}. \qquad (2.41)$$

Note que estamos usando as coordenadas de um vetor posição $\vec{r}$, descrito em algum referencial ortonormal, para descrever as coordendas de um ponto na curva γ. Naturalmente, esse vetor posição identifica a posição de um objeto na sua trajetória, descrita pela curva espacial γ. Muito conveniente, não acha? Ainda mais conveniente é adiantar que a segunda lei de Newton nos obriga a interpretar o parâmetro t na definição em (2.41) como sendo o tempo, medido por nossos relógios. Para o geômetra, esse parâmetro t não precisa de um significado específico. Eles preferem o próprio comprimento da trajetória! Uma curva descrita como em (2.41) está na sua forma paramétrica, onde t é o parâmetro, o qual pertence a algum intervalo da reta real. Denominaremos as coordenadas $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$, ou simplesmente $x_i(t)$, de equações horárias (por razões óbvias, t será o tempo). Vale mencionar que a forma paramétrica é também a forma mais eficiente computacionalmente em duas dimensões e única em três ou mais dimensões. Veja alguns exemplos.

2.7.1 Reta

A forma paramétrica de uma reta exige que as sua equações horárias sejam polinômios de primeiro grau no parâmetro escolhido,

$$x_i(t) = a_i + b_i\, t,\ i \in \{1,2,3\}. \tag{2.42}$$

2.7.2 Parábola

A forma paramétrica de uma parábola exige que as sua equações horárias sejam polinômios de segundo grau no parâmetro escolhido,

$$x_i(t) = a_i + b_i\, t + c_i\, t^2,\ i \in \{1,2,3\}. \tag{2.43}$$

2.7.3 Círculo

A forma paramétrica de uma círculo de raio R é dada pelas equações horárias

$$x_i(t) = c_i + a_i R\, \cos\theta(t) + b_i R\, \sin\theta(t). \tag{2.44}$$

Este círculo está centrado no ponto (c_1, c_2, c_3). O plano deste círculo contém os versores $\hat{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\hat{b} = (b_1, b_2, b_3)$, perpendiculares, $\hat{a} \cdot \hat{b} = 0$. A forma funcional da fase $\theta(t)$ é arbitrária.

2.7.4 Espiral

Por comodidade, uma espiral de base circular de raio R, centrada no eixo Z, tem a forma paramétrica dada pelas equações horárias

$$x(t) = R\, \cos\theta(t),\ y(t) = R\, \mathrm{sen}\,\theta(t),$$
$$z(t) = f(t), \tag{2.45}$$

onde a fase $\theta(t)$ é arbitrária e $f(t)$ é uma função racional de t.

2.7.5 Questões

Será possível criar ferramentas matemáticas para nos informar se uma dada curva descrita pela sua forma paramétrica será, na verdade, uma reta? ou quando ela será plana? Existe um algoritmo para colocarmos uma reta tangente num determinado ponto de uma curva espacial? Como podemos calcular algebricamente o comprimento de um determinado trecho de uma curva espacial? As respostas a esta questões estão nas próximas seções.

2.7.6 Exercícios

Visite a Seção 5.1 para praticar um pouco a construção e visualização de curvas espaciais usando o Geogebra.

Capítulo 3

Taxas (Derivadas)

Uma trajetória γ é representada por uma curva espacial na sua forma paramétrica, $\gamma(t) : (x(t), y(t), z(t))$, com o tempo t como parâmetro natural. Seja $\vec{r}(t)$ o vetor posição de um ponto nesta trajetória, correspondente a um valor do parâmetro t, ou, equivalentemente, num dado instante de tempo t. Utilizando um sistema ortonormal de coordenadas, base ordenada $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$, este vetor posição é descrito como

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath}+y(t)\hat{\jmath}+z(t)\hat{k} = (x(t), y(t), z(t)). \tag{3.1}$$

Observe que o vetor posição:

1. é uma função (vetorial) do tempo (parâmetro) t;

2. representa (localiza) um ponto na trajetória;

3. representa, via suas coordenadas, a própria trajetória.

Como esse vetor posição varia ao longo da trajetória? É possível descrever a taxa de variação do vetor posição como uma função (vetorial) do tempo (parâmetro) t?

3.1 Velocidade

A taxa de variação do vetor posição é denominada de velocidade. A velocidade é um vetor e uma função do tempo t. A construção desse vetor velocidade está ilustrada na Figura 3.1. Nesta figura, o ponto na trajetória designado por t está fixo, enquanto o ponto designado por $t + \Delta t$ está livre, com $\Delta t \geq 0$.

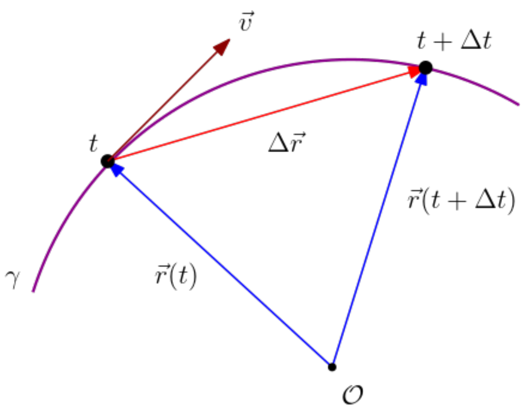

Figura 3.1: Definição do vetor velocidade como a primeira taxa de variação do vetor posição de um objeto em sua trajetória γ.

Seja $\Delta\vec{r}$ a diferença entre os vetores posição destes dois pontos,

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t). \tag{3.2}$$

Agora, num processo contínuo e suave, levemos o ponto designado por $t + \Delta t$ para as proximidades do ponto (fixo) designado por t. O parâmetro t pode ser escolhido de tal forma que $\Delta t \to 0$ numa vizinhança muito pequena em torno do ponto designado por t.

Definição 1 (Velocidade)**.** A taxa de variação do vetor posição, ou velocidade, é uma função vetorial definida pelo processo limite

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}, \tag{3.3}$$

conhecido por derivada primeira.

Designaremos as coordenadas do vetor velocidade por $v_i(t)$ ou $\dot{x}_i(t)$, com $i \in \{x, y, z\}$ ou $i \in \{1, 2, 3\}$, dependendo da conveniência. Reservaremos o ponto (e somente o ponto) sobre o nome para representar a primeira derivada temporal (e somente a derivada temporal, *i.e.*, em relação ao tempo t, $dx/dt = \dot{x}$).

A interpretação geométrica do vetor velocidade está na Figura 3.1. Antes do processo limite $\Delta t \to 0$, a direção do vetor diferença $\Delta\vec{r}$ é uma reta secante, *i.e.*, ela passa por dois pontos na trajetória. Após processo limite $\Delta t \to 0$, a direção do vetor velocidade é uma reta tangente, pois tem apenas um ponto de contato com a curva γ que representa a trajetória. A direção tangente definida por esse processo é única. A direção do vetor velocidade é tangente à trajetória. Assim, devemos sempre colocar o vetor velocidade iniciando na posição do objeto e na direção tangente à trajetória, como mostrado na Figura 3.1. Bom lembrar que o vetor posição inicia sempre na origem do sistema de coordenadas (ponto $\mathcal{O}$).

Uma análise dimensional do vetor velocidade mostra que suas dimensões são as mesmas de comprimento por tempo, $[\vec{v}] = [dx/dt] = \mathrm{L/T}$. Note que estamos tratando as diferenciais dx e dt como quantidades (infinitesimalmente pequenas) com as dimensões de comprimento e tempo, respectivamente. Lembre sempre que velocidade é um vetor, por definição, com dimensões de comprimento por tempo. Livre-se da concepção adquirida que velocidade é "espaço por tempo", a qual contém dois erros graves: velocidade não é um escalar (espaço) e "espaço" é muito mais que o comprimento entre dois pontos num espaço. Usar "espaço percorrido por tempo gasto" não ajuda muito, mesmo se interpretar "espaço percorrido" como a distância percorrida ou comprimento do trajeto. Velocidade é um vetor, por definição, e, como tal, deve ser grafado (com a flecha).

Denominaremos por rapidez o módulo do vetor velocidade,

$$v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)}. \tag{3.4}$$

Note que estamos usando a Propriedade 4 do produto escalar numa base ortonormal. Note também que a rapidez é um escalar, diferentemente da velocidade (um vetor). Veremos que a rapidez terá um papel importante no cômputo do comprimento de um trajeto.

Sim, um exemplo. Seja a trajetória circular no plano $z(t) = 0$ dada pela forma paramétrica

$$x(t) = R\cos\theta(t), \;\; y(t) = R\sin\theta(t), \tag{3.5}$$

sendo θ a fase dada por

$$\theta(t) = \omega t + \varphi, \tag{3.6}$$

onde ω é um parâmetro conhecido por frequência angular, φ é a constante da fase e R é o raio (igual ao comprimento do vetor posição). Então a Definição 1 nos permite calcular o vetor velocidade

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \tag{3.7}$$

Efetuando as derivadas temporais, teremos

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = \dot{\theta}(-R\sin\theta) = -\omega R\sin\theta, \\ v_y &= \dot{y} = \dot{\theta}(+R\cos\theta) = +\omega R\cos\theta, \\ v_z &= \dot{z} = 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Esse vetor velocidade tem algumas características interessantes. Ele é perpendicular ao vetor posição, $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$, e seu módulo é constante, $v = \|\vec{v}\| = \omega R$. **Verifique.** Sempre que obtiver resultados algébricos, como esses, use análise dimensional para checar a consistência de seus resultados. Quais são as dimensões do parâmetro ω? Como a fase (argumento de uma função trigonométrica) deve ser adimensional, então a dimensão da frequência angular ω deve ser inverso de tempo, $[\omega] = 1/\mathrm{T}$. Desta forma, tanto a velocidade quanto a rapidez estão com as dimensões corretas, $[v] = [\omega R] = \mathrm{L}/\mathrm{T}$.

3.1.1 Exercícios

Exercício 14. *Determine o vetor velocidade, e seu módulo, de um objeto na trajetória no plano $z = 0$ dada pela curva (círculo) na forma paramétrica*

$$x(t) = R\cos(\omega t), \quad y(t) = R\sin(\omega t), \tag{3.9}$$

onde R é o raio. Mostre que o vetor velocidade é sempre perpendicular ao vetor posição.

Exercício 15. *Determine o vetor velocidade, e seu módulo, de um objeto na trajetória no plano $z = 0$ dada pela curva (parábola) na forma paramétrica*

$$x(t) = 2t, \; y(t) = 3t - t^2, \; 0 \leq t \leq 3/2. \tag{3.10}$$

Observe o intervalo do parâmetro t (tempo). Quais são o alcance e a altura máximas que esse objeto atinge? Em que respectivos tempos? Use o Sistema Internacional (SI) de unidades, onde comprimento está em metros (m) e tempo em segundos (s).

Exercício 16. *Determine o vetor velocidade, e seu módulo, de um objeto na trajetória dada pela curva (hélice) na forma paramétrica*

$$x(t) = R\cos(\omega t), \; y(t) = R\sin(\omega t), \; z(t) = t/2. \tag{3.11}$$

onde ω e o raio R são parâmetros arbitrários.

3.2 Aceleração

A taxa de variação do vetor velocidade é denominada de aceleração. A aceleração é um vetor e uma função do tempo t.

Definição 2 (Aceleração)**.** A taxa de variação do vetor velocidade, ou aceleração, é uma função vetorial definida pelo processo limite

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}}. \tag{3.12}$$

Importante notar que a aceleração é também a derivada segunda do vetor posição,

$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$. Designaremos as coordenadas do vetor aceleração por $a_i(t)$, ou $\dot{v}_i(t)$, ou ainda $\ddot{x}_i(t)$, com $i \in \{x, y, z\}$ ou $i \in \{1, 2, 3\}$, dependendo da conveniência. Não teremos uma palavra especial para designar o módulo a do vetor aceleração $\vec{a}$. As dimensões de aceleração são as mesmas de comprimento por tempo ao quadrado, $[\vec{a}] = [a] = \mathrm{L}/\mathrm{T}^2$.

Exemplo. Sim, um exemplo. Seja a trajetória circular no plano $z(t) = 0$ dada pela forma paramétrica

$$x(t) = R\cos\theta(t),\ y(t) = R\sin\theta(t), \tag{3.13}$$

sendo θ a fase dada por

$$\theta(t) = \omega t + \varphi, \tag{3.14}$$

onde ω é um parâmetro conhecido por frequência angular, φ é a constante da fase e R é o raio (igual ao comprimento do vetor posição). Então a Definição 1 nos permite calcular o vetor velocidade

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \tag{3.15}$$

Efetuando as derivadas temporais, teremos

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = \dot{\theta}(-R\sin\theta) = -\omega R\sin\theta, \\ v_y &= \dot{y} = \dot{\theta}(+R\cos\theta) = +\omega R\cos\theta, \\ v_z &= \dot{z} = 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Usando a Definição 2, o vetor aceleração é dado pelas derivadas temporais do vetor velocidade,

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (\dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{v}_z), \tag{3.17}$$

onde

$$\begin{aligned} a_x &= \dot{v}_x = -\omega^2 R\cos\theta = -\omega^2 x(t), \\ a_y &= \dot{v}_y = -\omega^2 R\sin\theta = -\omega^2 y(t), \\ a_z &= \dot{v}_z = 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Esses vetores posição, velocidade e aceleração têm algumas características interessantes. O vetor velocidade é perpendicular ao vetor posição, $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$, e seu módulo é constante, $v = \|\vec{v}\| = \omega R$. O vetor aceleração está na mesma direção do vetor posição, mas no sentido oposto (voltada para o centro, centrípeta), $\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$, e seu módulo também é constante, $a = \|\vec{a}\| = \omega^2 R = v^2/R$, onde a frequência angular ω foi eliminada em função da rapidez v. Resultado conhecido? Agora sabe de onde veio. **Verifique.** Sempre que obtiver resultados algébricos, como esses, use análise dimensional para checar a consistência de seus resultados. Quais são as dimensões do parâmetro ω? Como a fase (argumento de uma função trigonométrica) deve ser adimensional, então a dimensão da frequência angular ω deve ser inverso de tempo, $[\omega] = 1/\mathrm{T}$. Desta forma, tanto a velocidade quanto a aceleração estão com as dimensões corretas, $[v] = [\omega R] = \mathrm{L}/\mathrm{T}$ e $[a] = [\omega^2 R] = \mathrm{L}/\mathrm{T}^2$, respectivamente.

Interpretação geométrica. Seja v o módulo do vetor velocidade e $\hat{v}$ o seu versor, então, por definição $\vec{v} = v\hat{v}$. Note que o vetor $\vec{v}$ por ser a derivada do vetor posição, $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, é sempre tangente à trajetória (dada pela forma paramétrica representada por $\vec{r}$). Por isso, $\hat{v}$ também é conhecido por versor tangente. O vetor aceleração, a derivada do vetor velocidade, é

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(v\hat{v}) = \dot{v}\hat{v} + v\dot{\hat{v}}, \tag{3.19}$$

onde usamos a regra da derivada de um produto de funções (do tempo), $\vec{v} = v\hat{v}$. Durante o movimento, a direção do vetor velocidade, indicada pelo verso tangente $\hat{v}$, também muda com o parâmetro tempo. Para prosseguirmos, devemos descobrir a direção da taxa de variação $\dot{\hat{v}}$ do versor tangente $\hat{v}$. Depois devemos descobrir quem é seu módulo. Um versor tem sempre seu módulo constante, unitário, mas a derivada de um versor não precisa ter um módulo constante, muito menos unitário.

Teorema 7. *A taxa de variação $\dot{\vec{A}}$ de um vetor $\vec{A}$, de módulo $A = \|\vec{A}\|$ constante, é um vetor na direção perpendicular,*

$$\dot{A} = 0 \implies \vec{A} \cdot \dot{\vec{A}} = 0. \tag{3.20}$$

Vale a recíproca.

A demonstração é muito simples. Basta escrever o módulo ao quadrado, por conveniência, usando a Propriedade 4 do produto escalar, e tomar a derivada desta constante,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A^2 &= 2A \cdot \dot{A} = 0\\ &= \frac{d}{dt}\vec{A} \cdot \vec{A} = 2\vec{A} \cdot \dot{\vec{A}}\\ &\implies \vec{A} \cdot \dot{\vec{A}} = 0.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Portanto, de acordo com o Teorema 7, a direção da taxa de variação $\dot{\hat{v}}$ do versor tangente $\hat{v}$ está na direção perpendicular à direção tangente. Denotemos esta direção perpendicular, melhor ainda de direção normal, pelo versor $\hat{n}$, $\hat{v} \cdot \hat{n} = 0$. Desta forma, podemos escrever

$$\dot{\hat{v}} = v\kappa\,\hat{n}, \tag{3.22}$$

onde colocamos o módulo v do vetor velocidade em evidência por mera conveniência e introduzimos a função (temporal) escalar $\kappa(t)$ a ser determinada impondo que $\|\dot{\hat{v}}\| = v|\kappa|$. A análise dimensional diz que $[\hat{v}] = 1$ (versores são adimensionais), $[\dot{\hat{v}}] = 1/\mathrm{T}$ e que $[v] = \mathrm{L}/\mathrm{T}$. Assim $[\kappa] = 1/\mathrm{L}$. Como veremos, desejamos que a função escalar $\kappa(t)$ tenha exatamente a dimensão de inverso de comprimento.

Teorema 8. *O vetor aceleração pode ser decomposto em duas direções perpendiculares, uma tangente ao vetor velocidade e outra normal a ele,*

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{v}\,\hat{v} + v^2\kappa\,\hat{n}. \tag{3.23}$$

A função escalar $\kappa(t)$ é conhecida por curvatura. Como podemos calculá-la?

Exemplo. Sim, um exemplo. Seja a trajetória circular no plano $z(t) = 0$ dada pela forma paramétrica

$$x(t) = R\cos\theta(t),\ y(t) = R\sin\theta(t), \tag{3.24}$$

sendo θ a fase dada por

$$\theta(t) = \omega t + \varphi, \tag{3.25}$$

onde ω é um parâmetro conhecido por frequência angular, φ é a constante da fase e R é o raio (igual ao comprimento do vetor posição). Então a Definição 1 nos permite calcular o vetor velocidade

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = -\omega R \sin\theta = -\omega y(t), \\ v_y &= \dot{y} = +\omega R \cos\theta = +\omega x(t), \\ v_z &= \dot{z} = 0, \end{aligned} \tag{3.26}$$

e o vetor aceleração,

$$\begin{aligned} a_x &= \dot{v}_x = -\omega^2 R \cos\theta = -\omega^2 x(t), \\ a_y &= \dot{v}_y = -\omega^2 R \sin\theta = -\omega^2 y(t), \\ a_z &= \dot{v}_z = 0. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Note que esta aceleração é centrípeta (voltada para o centro),

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r} = -\omega^2 R \hat{r} = \omega^2 R \hat{n}, \tag{3.28}$$

onde introduzimos o versor $\hat{n} = -\hat{r}$, dirigido ao centro da trajetória. Comparando com o Teorema 8, temos $v^2\kappa = \omega^2 R$, da qual resulta uma curvatura constante, $\kappa = 1/R$, após usarmos $v = \omega R$. Esse resultado é emblemático: a trajetória circular tem uma curvatura constante igual ao inverso de seu raio. Onde está a importância disto? Segundo os geômetras, um reta é um círculo de raio infinito. Assim, uma reta terá uma curvatura nula. A conjectura decorrente é: curvatura pode ser usada como uma quantificação de quanto uma curva se distancia de uma reta.

3.2.1 Exercícios

Exercício 17. *Determine os vetores velocidade e aceleração, e seus módulos, bem como o produto vetorial, de um objeto na trajetória no plano $z = 0$ dada pela curva (círculo) na forma paramétrica*

$$x(t) = R\cos(\omega t), \quad y(t) = R\sin(\omega t), \tag{3.29}$$

onde R é o raio. Mostre que o vetor velocidade é sempre perpendicular ao vetor posição.

Exercício 18. *Determine os vetores velocidade e aceleração, e seus módulos, bem como o produto vetorial, de um objeto na trajetória no plano $z = 0$ dada pela curva (parábola) na forma paramétrica*

$$x(t) = 2t, \; y(t) = 3t - t^2, \; 0 \le t \le 3/2. \tag{3.30}$$

Observe o intervalo do parâmetro t (tempo). Quais são o alcance e a altura máximas que esse objeto atinge? Em que respectivos tempos? Use o Sistema Internacional (SI) de unidades, onde comprimento está em metros (m) e tempo em segundos (s).

Exercício 19. *Determine os vetores velocidade e aceleração, e seus módulos, bem como o produto vetorial, de um objeto na trajetória dada pela curva (hélice) na forma paramétrica*

$$x(t) = R\cos(\omega t), \; y(t) = R\sin(\omega t), \; z(t) = t/2. \tag{3.31}$$

onde ω e o raio R são parâmetros arbitrários.

3.3 Curvatura

Como podemos calcular a função escalar $\kappa(t)$, curvatura, introduzida no Teorema 8? Produto vetorial! Sim, efetue o produto vetorial entre o vetor velocidade e a aceleração escrita na forma (3.23),

$$\vec{v} \times \vec{a} = \dot{v}\, \vec{v} \times \hat{v} + v^2 \kappa\, \vec{v} \times \hat{n}. \tag{3.32}$$

Como o produto vetorial entre vetores paralelos é nulo, por definição, então $\vec{v} \times \hat{v} = 0$, resultando em

$$\vec{v} \times \vec{a} = v^2 \kappa\, \vec{v} \times \hat{n}. \tag{3.33}$$

Agora basta tomar o módulo e lembrar que $\|\vec{v} \times \hat{n}\| = \|\vec{v}\| = v$, uma vez que os vetores $\vec{v}$ e $\hat{n}$ são perpendiculares e que $\|\hat{n}\| = 1$.

Teorema 9. *O módulo da curvatura de uma trajetória representada pelo vetor posição $\vec{r}$ (forma paramétrica) é*

$$|\kappa(t)| = \frac{\|\vec{v} \times \vec{a}\|}{v^3}, \tag{3.34}$$

onde $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ e $v = \|\vec{v}\|$.

Em geral tomamos o valor positivo para a curvatura. **A curvatura é uma medida de quanto uma curva se diferencia de uma reta.** Uma reta tem curvatura nula, por definição. Quanto menor o valor da curvatura, mais parecida com uma reta a curva é.

3.3.1 Exercícios

Exercício 20. *Determine a curvatura da trajetória no plano $z = 0$ dada pela curva (círculo) na forma paramétrica*

$$x(t) = R\cos(\omega t), \quad y(t) = R\sin(\omega t), \tag{3.35}$$

onde R é o raio.

Exercício 21. *Determine a curvatura da trajetória no plano $z = 0$ dada pela curva (parábola) na forma paramétrica*

$$x(t) = 2t,\ y(t) = 3t - t^2,\ 0 \le t \le 3/2. \tag{3.36}$$

Use o Sistema Internacional (SI) de unidades, onde comprimento está em metros (m) e tempo em segundos (s).

Exercício 22. *Determine a curvatura da trajetória dada pela curva (hélice) na forma paramétrica*

$$x(t) = R\cos(\omega t),\ y(t) = R\sin(\omega t),\ z(t) = t/2. \tag{3.37}$$

onde ω e o raio R são parâmetros arbitrários.

3.4 Torção

Até aqui introduzimos os versores tangente $\hat{v}$ e normal $\hat{n}$, os quais são perpendiculares. Esses dois versores formam um plano que poderá conter ou não a trajetória inteira. Trajetórias retilíneas, circulares e parabólicas estão contidas no plano desses dois versores. Isto significa que a direção normal a esse plano, dada pela direção do versor $\hat{v} \times \hat{n}$, deve ser uma constante no tempo, ou seja, permanece sempre a mesma em todos os pontos da trajetória. Caso o versor normal $\hat{v} \times \hat{n}$ mude ao longo da trajetória, ela não será plana. Uma trajetória elíptica não é plana. Podemos usar esses fatos para construir uma ferramenta que caracteriza se uma trajetória é plana ou não.

Seja $\hat{b} = \hat{v} \times \hat{n}$, denominado de versor binormal, o segundo versor normal ao versor tangente $\hat{v}$. Esses três versores mutuamente perpendiculares e linearmente independentes, conhecidos por trinca (ou tríade) de Frenet, forma uma base ortonormal que muda de orientação em cada ponto da trajetória. Como são versores, a taxa de variação de um deles estará sempre na direção perpendicular e, portanto, pode ser escrita em termos dos outros dois versores. Vimos que $\dot{\hat{v}} = v\kappa\,\hat{n}$. Quem é a taxa de variação $\dot{\hat{b}}$ da binormal? Pelo Teorema 7, esta taxa deve estar no plano dos versores $\hat{v}$ e $\hat{n}$, perpendiculares à direção binormal. Então,

$$\dot{\hat{b}} = \alpha\hat{v} + \beta\hat{n}, \tag{3.38}$$

onde α e β são funções arbitrárias do parâmetro t (tempo). Multiplicando escalarmente esta combinação linear por $\hat{v}$ obteremos

$$\dot{\hat{b}} \cdot \hat{v} = \alpha\hat{v} \cdot \hat{v} + \beta\hat{n} \cdot \hat{v} = \alpha. \tag{3.39}$$

A fim de simplificar o lado direito do resultado anterior, devemos fazer uso do teorema seguinte, válido para vetores perpendiculares. A demonstração é imediata. Basta tomar a derivada do produto escalar entre eles e igualar a zero (derivada de uma constante).

Teorema 10.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \implies \vec{A} \cdot \dot{\vec{B}} = -\dot{\vec{A}} \cdot \vec{B}. \tag{3.40}$$

Usando este teorema, a constante α pode ser determinada,

$$\alpha = \dot{\hat{b}} \cdot \hat{v} = -\hat{b} \cdot \dot{\hat{v}} = -v\kappa\,\hat{b} \cdot \hat{n} = 0. \tag{3.41}$$

Portanto,

$$\dot{\hat{b}} = \beta\hat{n} = -v\tau\,\hat{n}. \tag{3.42}$$

Esta escolha para β implica que a função $\kappa = \kappa(t)$ tenha a dimensão de inverso de comprimento, $[\kappa] = 1/\mathrm{L}$. Observe que esta função κ determina se a taxa de variação da binormal será nula ou não. Quando $\kappa = 0$, então a binormal será constante, $\dot{\hat{b}}$, e a trajetória será plana. Devido à importância desta função κ para determinarmos se uma trajetória será plana ou não, ela será denominada de torção. **A torção é uma medida de quanto uma curva se afasta de um plano.**

Podemos deduzir uma expressão bastante conveniente para calcular a torção. Para isto, precisamos da derivada do vetor aceleração (decomposto nas direções tangente e normal; verifique),

$$\begin{aligned}\dot{\vec{a}} = (\ddot{v} - \kappa^2 v^3)\hat{v} + \left[\kappa v\dot{v} + \frac{d}{dt}(\kappa v^2)\right]\hat{n}\\ + \kappa\tau v^3\hat{b}.\end{aligned} \tag{3.43}$$

Multiplicando escalarmente esta expressão por $\vec{v} \times \vec{a} = v^3\kappa\,\hat{b}$, teremos

$$\tau = \frac{\vec{v} \times \vec{a} \cdot \dot{\vec{a}}}{v^6\kappa^2}, \tag{3.44}$$

ou, numa forma mais simétrica dada no teorema seguinte.

Teorema 11. *A torção de uma trajetória representada pelo vetor posição $\vec{r}(t)$ (forma paramétrica) é*

$$\tau(t) = \frac{\vec{v} \times \vec{a} \cdot \dot{\vec{a}}}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|^2}. \tag{3.45}$$

3.4.1 Exercícios

Exercício 23. *Determine a torção da trajetória no plano $z = 0$ dada pela curva (círculo)* *na forma paramétrica*

$$x(t) = R\cos(\omega t), \quad y(t) = R\sin(\omega t), \quad (3.46)$$

onde R é o raio.

Exercício 24. *Determine a torção da trajetória no plano $z = 0$ dada pela curva (parábola) na forma paramétrica*

$$x(t) = 2t,\ y(t) = 3t - t^2,\ 0 \leq t \leq 3/2. \quad (3.47)$$

Use o Sistema Internacional (SI) de unidades, onde comprimento está em metros (m) e tempo em segundos (s).

Exercício 25. *Determine a torção da trajetória dada pela curva (hélice) na forma paramétrica*

$$x(t) = R\cos(\omega t),\ y(t) = R\sin(\omega t),\ z(t) = t/2. \quad (3.48)$$

onde ω e o raio R são parâmetros arbitrários.

Capítulo 4

Distância percorrida (Integral)

É possível calcular a distância percorrida numa trajetória a partir de sua representação paramétrica. Bom observar que em geral trajetórias são representadas por curvas espaciais exibindo curvatura e torção. Portanto, a distância percorrida numa trajetória será muito diferente da distância entre os pontos inicial e final. Uma trajetória circular ilustra bem esta situação. Suponha que um objeto realize uma volta completa numa trajetória circular. Evidentemente os pontos inicial e final serão os mesmos, implicando numa distância nula entre eles. No entanto, a distância percorrida, igual ao perímetro da trajetória circular, é maior que zero.

4.1 Estratégia

A Figura 4.1 ilustra a estratégia para construirmos uma ferramenta algébrica para calcular a distância percorrida (ou comprimento) ΔS sobre uma dada trajetória $\gamma(t)$, com curvatura e torção, entre os pontos inicial $t_i = t_0$ e final $t_f = t_N$. Estamos identificando pontos na trajetória por valores do parâmetro t (tempo). Naturalmente, a distância percorrida ΔS é maior que a distância entre os pontos inicial e final dada pelo comprimento $\|\vec{R}\|$ do vetor diferença entre estes dois pontos, $\vec{R} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$.

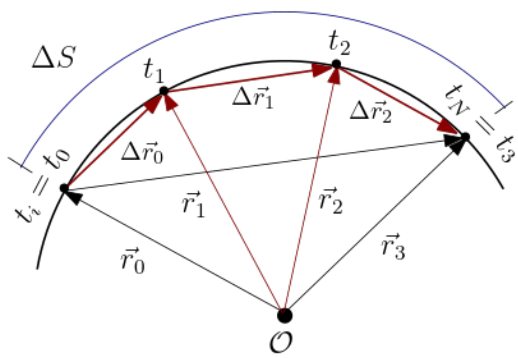

Figura 4.1: Estratégia para calcular o comprimento ΔS na trajetória γ.

No entanto, apesar do fato $\Delta S > \|\vec{r}_f - \vec{r}_i\|$, está aí a semente de uma ideia frutífera: inserir pontos intermediários como t_1 e t_2 mostrados na Figura 4.1, por exemplo, e observar que a soma dos comprimentos das diferenças sucessivas entre os vetores posição em t_0, t_1, t_2 e t_N $(N = 3)$, é uma aproximação muito melhor para a distância percorrida,

$$\Delta S \approx \sum_{j=0}^{N=3} \|\Delta\vec{r}_j\|, \tag{4.1}$$

onde

$$\Delta\vec{r}_j = \vec{r}_{j+1} - \vec{r}_j. \tag{4.2}$$

Note que estamos trocando a soma nos arcos (pequenos trechos na trajetória) pela soma nas cordas (comprimentos das diferenças vetoriais).

Desta forma, a soma dos comprimentos das diferenças sucessivas entre os vetores posição de N pontos sobre a trajetória é uma aproximação inferior para a distância percorrida. No limite $N \to \infty$ devemos obter uma igualdade,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N} \|\Delta\vec{r}_j\| \to \Delta S. \tag{4.3}$$

Como tornar este limite operacional? O que ganhamos trocando a soma nos arcos pela soma nas cordas? Ganhamos muito! O comprimento $\|\Delta\vec{r}_j\|$ de cada corda pode ser expresso em termos da velocidade (média),

$$\begin{aligned}\|\Delta\vec{r}_i\| &= \sqrt{\Delta\vec{r}_i \cdot \Delta\vec{r}_i} = \sqrt{\frac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta t_i} \cdot \frac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta t_i}}\,\Delta t_i \\ &= \sqrt{\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}\,\Delta t_i = \|\vec{v}_i\|\,\Delta t_i = v_i\,\Delta t_i. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Note que $v_i = v(t_i)$ é na verdade uma velocidade média, mas será a velocidade instantânea no limite $\Delta t \to 0$. Lembre-se que $N \to \infty$ é equivalente a $\Delta t \to 0$. Assim, a distância percorrida pode ser calculada pelo limite

$$\Delta S = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N} v_j\,\Delta t_j. \tag{4.5}$$

A nossa capacidade em executar estas somas infinitas é simplesmente incrível.

4.2 Comprimento

Por ser uma soma que envolve um processo limite e, o mais importante, que sabemos executar, daremos a ela um nome, integral, e uma notação especial.

Teorema 12 (Comprimento)**.** *O comprimento de uma trajetória, ou distância percorrida entre os pontos inicial t_i e final t_f, é dado por*

$$\Delta S = \int_{t_i}^{t_f} v(t),\, dt\ v(t) = \|\vec{v}\| = \|\dot{\vec{r}}\|, \tag{4.6}$$

onde o vetor posição $\vec{r}(t)$ representa a trajetória na forma paramétrica.

O símbolo dt (denominado de diferencial) em (4.6) indica que a integral (soma) está sendo feita na variável t, a variável de integração. A integral (4.6) é denominada de definida, t_i indicando o limite inferior e t_f indicando o limite superior. Sem os limites de integração, uma integral é denominada de indefinida e, em geral, fornece uma nova função da variável de integração.

Pondere sobre a praticidade de ter uma ferramenta como a integral para calcular o comprimento de uma trajetória conhecendo apenas o módulo do vetor velocidade, sem a necessidade de usar uma fita métrica. Veja o Apêndice B para uma introdução sucinta sobre os aspectos operacionais de integração.

Vejamos um exemplo. Seja a trajetória circular no plano $z(t) = 0$ dada pela forma paramétrica

$$x(t) = R\cos\theta(t),\ y(t) = R\sin\theta(t), \tag{4.7}$$

sendo θ a fase dada por

$$\theta(t) = \omega t + \varphi, \tag{4.8}$$

onde ω é um parâmetro conhecido por frequência angular, φ é a constante da fase e R é o raio (igual ao comprimento do vetor posição). Então a Definição 1 nos permite calcular o vetor velocidade

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = -\omega R \sin\theta = -\omega y(t), \\ v_y &= \dot{y} = +\omega R \cos\theta = +\omega x(t), \\ v_z &= \dot{z} = 0, \end{aligned} \tag{4.9}$$

cujo módulo é

$$v(t) = \|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \omega R. \tag{4.10}$$

O tempo gasto para uma volta completa é o período T, tal que $\omega T = 2\pi$, pois as funções trigonométricas são periódicas, $\cos\theta(t+T) = \cos\theta(t)$ (verifique). Assim, de acordo com o Teorema 12, o a distância percorrida entre os instantes $t_i = 0$ e $t_f = T$ é

$$\Delta S = \int_0^T v(t)dt = \omega R \int_0^T dt = \omega R T = 2\pi R. \tag{4.11}$$

Note que este comprimento é exatamente o perímetro de uma circunferência de Raio R, como esperado. Note também que este comprimento é numericamente igual à área abaixo ao gráfico da função constante $v(t) = \omega R$ no intervalo $t \in [0, T]$.

4.2.1 Exercícios

Exercício 26. *Determine a distância percorrida entre os instantes $t_i = 0$ e $t_f = t$ na trajetória no plano $z = 0$ dada pela curva (círculo) na forma paramétrica*

$$x(t) = R\cos(\omega t), \quad y(t) = R\sin(\omega t), \tag{4.12}$$

onde R é o raio.

Exercício 27. *Determine a distância percorrida entre os instantes $t_i = 0$ e $t_f = 3/2$ na trajetória no plano $z = 0$ dada pela curva (parábola) na forma paramétrica*

$$x(t) = 2t, \; y(t) = 3t - t^2, \; 0 \le t \le 3/2. \tag{4.13}$$

Use o Sistema Internacional (SI) de unidades, onde comprimento está em metros (m) e tempo em segundos (s). Precisa de uma tabela de integrais ou, mais eficiente, de computação algébrica.

Exercício 28. *Determine a distância percorrida entre os instantes $t_i = 0$ e $t_f = t$ na trajetória dada pela curva (hélice) na forma paramétrica*

$$x(t) = R\cos(\omega t), \; y(t) = R\sin(\omega t), \; z(t) = t/2. \tag{4.14}$$

onde ω e o raio R são parâmetros arbitrários.

Capítulo 5

Computação

Apesar de vivenciarmos uma enorme popularização de diversos tipos de computadores digitais, eles são muito pouco utilizados efetivamente como partes fundamentais de nossos cursos básicos. Todo recurso humano formado em São Carlos do Pinhal deve desenvolver suas habilidades computacionais, vitais numa sociedade moderna.

Além das linguagens computacionais tradicionais dedicadas à computação numérica, vivemos a era da maturidade da computação simbólica (ou algébrica), capaz de manipular expressões algébricas. Considerando a inexistência de cursos sobre computação algébrica, sua importância, praticidade e disponibilidade, faremos uso dela neste curso, na medida do possível. O sistema computacional Geogebra tem se mostrado altamente adequado neste momento, pela eficiência, disponibilidade gratuita e uma comunidade grande o suficiente capaz de facilitar o ingresso de iniciantes.

5.1 Trajetórias

Curvas espaciais representam trajetórias em Mecânica. Usaremos o Geogebra para visualizar as propriedades geométricas de algumas trajetórias. A finalidade é usar os conhecimentos adquiridos, teoricamente, para simular o movimento de algum sistema mecânico específico obedecendo as leis de Newton.

Iniciaremos pelo início: visualizar uma curva no plano (2D) contendo um ponto representando um objeto em movimento descrito pelo seu vetor posição. As taxas de variação do vetor posição serão adicionadas posteriormente. Em seguida, passaremos para curvas no espaço (3D). Sugiro os vídeos aqui e aqui como tutoriais.

Exercício 29. *Construa no plano $z = 0$ a curva (círculo) dada pela forma paramétrica*

$$x(t) = R\cos(\omega t), \quad y(t) = R\sin(\omega t), \tag{5.1}$$

onde $\omega = \pi$ e o raio R pode ser escolhido a vontade. Restrinja o parâmetro t (tempo) ao intervalo $0 \le t \le 2$. Mostre também um ponto na curva representando um objeto, bem como os vetores posição, velocidade e aceleração (use uma escala conveniente). Faça uma animação mostrando este objeto em movimento sobre esta curva. Calcule e exiba os gráficos da curvatura e da torção.

Exercício 30. *Construa no plano*

$$z = 0$$

a curva (parábola) dada pela forma paramétrica

$$x(t) = 2t, \quad y(t) = 3t - t^2, \quad 0 \le t \le 3/2. \tag{5.2}$$

Observe o intervalo do parâmetro t (tempo). Mostre também um ponto na curva representando um objeto, bem como seus vetores posição, velocidade e aceleração (use uma escala conveniente). Faça uma animação mostrando este objeto em movimento sobre esta curva. Calcule e exiba os gráficos da curvatura e da torção.

Exercício 31. *Construa a curva (hélice) dada pela forma paramétrica*

$$x(t) = R\cos(\omega t), \ y(t) = R\sin(\omega t), \ z(t) = t/2, \tag{5.3}$$

onde $\omega = \pi$ e o raio R pode ser escolhido a vontade. Restrinja o parâmetro t (tempo) ao intervalo $0 \le t \le 4$. Mostre também um ponto na curva representando um objeto, bem como seus vetores posição, velocidade e aceleração (use uma escala conveniente). Faça uma animação mostrando este objeto em movimento sobre esta curva. Calcule e exiba os gráficos da curvatura e da torção.

Exercício 32. *Faça um programa para calcular numericamente uma derivada e uma integral (definida). Consulte seu professor para obter as devidas ferramentas computacionais.*

Apêndice A

Derivadas

Temos que entender o limite

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{(A.1)}$$

do ponto de vista geométrico e torná-lo operacional. Note que estamos usando uma notação especial para representar este limite, denominada de derivada de $x(t)$ em relação a t. Importante: o símbolo d/dt antes da primeira igualdade em (A.1) deve ser entendido como um símbolo único sendo aplicado à função $x(t)$; já o símbolo dx/dt antes da segunda igualdade em (A.1) deve ser entendido como a razão entre duas quantidades infinitesimalmente pequenas, denominadas de diferenciais, o que nos faz lembrar do limite após a última igualdade em (A.1). Note também na segunda igualdade em (A.1) o uso do ponto para representar uma derivada temporal (e somente temporal). A seguir, vamos tornar operacional este conceito de derivada através de alguns exemplos.

Suponha que a equação horária no eixo X seja uma constante, $x(t) = a$, isto é, repouso. Portanto a velocidade é nula. Então, levando a função constante $x(t) = a$ em (A.1), teremos(∗)

$$\frac{d}{dt}x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a-a}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} 0 = 0, \quad \text{(A.2)}$$

pois o numerador já era nulo antes de executarmos o limite. Acabamos de aprender que a derivada de uma função constante é nula. Do ponto de vista geométrico, devemos perceber que uma função constante é uma reta paralela ao eixo X. Assim, qualquer função constante tem uma inclinação (ângulo formado com o eixo X) nula, cuja tangente (coeficiente angular) também é nula. Portanto, o coeficiente angular de uma reta paralela ao eixo X, $x(t) = a$, é numericamente igual à sua derivada em qualquer ponto, ou seja, nulo. Vejamos se esta relação entre derivada e tangente é mantida em um outro exemplo.

Considere agora uma equação horária linear no tempo, $x(t) = a + bt$, representando um movimento uniforme (velocidade constante). Então, como no caso anterior, levando a função $x(t) = a + bt$ em (A.1), teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\{a + b(t+\Delta t)\} - \{a + bt\}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} b = b, \end{aligned} \tag{A.3}$$

pois o numerador já era igual a b (constante; independente do tempo) antes de executarmos o limite. Portanto, aprendemos que a derivada de uma função linear é igual ao seu coeficiente angular, confirmando assim nossa conjectura que a derivada calculada em um ponto t é numericamente igual ao coeficiente angular da reta tangente à função $x(t)$ (no mesmo ponto t). Note que a reta tangente de uma reta coincide com a própria reta. Para confirmar esta conjectura sobre a interpretação geométrica da derivada, vejamos o próximo exemplo.

Considere agora uma função quadrática para a equação horária, $x(t) = a + bt + ct^2$, representando um movimento com aceleração constante. Então, levando esta função em (A.1), teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \big(b + 2ct + c\Delta t\big) \\ &= b + 2ct + \lim_{\Delta t \to 0} c\Delta t = b + 2ct, \end{aligned} \tag{A.4}$$

pois o limite do termo $c\Delta t$ é obtido substituindo $\Delta t = 0$. Uma regra para calcular limites: simplifique antes suas expressões. Voltaremos à interpretação geométrica em breve. A conjectura é: a derivada em (A.4) nos permite calcular o coeficiente angular da reta tangente à curva $x(t) = a + bt + ct^2$ no ponto $(t, x(t))$.

Até aqui aprendemos que a derivada de um polinômio t^n obedece à regra nt^{n-1}. Também aprendemos que a derivada do produto de uma função $f(t)$ por uma constante c obedece à regra $c\,df(t)/dt$, isto é, a constante pode sair para fora da derivada. Ao compararmos o resultado em (A.3) com o resultado (A.4) aprendemos que a derivada obedece a propriedade de linearidade, $d(f(t) + cg(t))/dt = df(t)/dt + c\,dg(t)/dt$. Em geral, as propriedades seguintes nos permitem calcular a derivada de qualquer função suave.

Derivada de uma constante:

$$\frac{d}{dt}a = 0, \tag{A.5}$$

Derivada de uma potência:

$$\frac{d}{dt}t^n = nt^{n-1}, \tag{A.6}$$

Linearidade:

$$\frac{d}{dt}\big(f(t) + bg(t)\big) = \frac{d}{dt}f(t) + b\frac{d}{dt}g(t), \tag{A.7}$$

Regra do produto:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\big(f(t)g(t)\big) = g(t)\frac{d}{dt}f(t) \\ + f(t)\frac{d}{dt}g(t), \end{aligned} \tag{A.8}$$

Regra da função composta:

$$\frac{d}{dt}f\big(g(t)\big) = \left[\frac{d}{dg}f(g)\right]\frac{d}{dt}g(t). \tag{A.9}$$

De fato, cada uma destas propriedades serão estudadas em detalhes no curso de Cálculo I. Em particular, as três últimas propriedades serão demonstradas adequadamente.

Para ilustramos como as propriedades (A.8)–(A.9) são utilizadas, precisamos aprender a calcular a derivada de algumas funções elementares, além de polinômios. Por exemplo, a função exponencial será muito importante para nossas discussões futuras. Vamos então calcular a derivada da função $x(t) = e^{\omega t}$ (ω constante), usando a definição (A.1):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{\omega t} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{\omega(t+\Delta t)} - e^{\omega t}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{\omega t}(e^{\omega\Delta t}-1)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\omega\, e^{\omega t}(e^{\omega\Delta t}-1)}{\omega\Delta t} \\ &= \omega\, e^{\omega t}\lim_{\Delta s\to 0}\frac{(e^{\Delta s}-1)}{\Delta s}, \qquad \text{(A.10)} \end{aligned}$$

onde efetuamos a troca $\omega\Delta t \to \Delta s$. Note também que retiramos a expressão $\omega\, e^{\omega t}$ de dentro do limite, pois ela não depende de Δt. Nosso problema agora é calcular o limite apresentado no final de (A.10). Lembrando que a exponencial de zero é a unidade, então a exponencial de um número tendendo a zero deve ser um valor muito próximo da unidade (um pouquinho maior que a unidade se o argumento for positivo e um pouquinho menor que a unidade se o argumento for negativo). Assim, quando Δs é muito pequeno, podemos escrever $e^{\Delta s} = 1 + f(\Delta s)$, onde $f(\Delta s)$ é desconhecida, mas com duas propriedades: (i) $f(0) = 0$ (caso contrário não teríamos $e^0 = 1$) e (ii) $f(\Delta s) = \Delta s$ é uma excelente aproximação para valores muito pequenos de Δs (verifique isto numericamente com sua calculadora). Desta forma,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta s\to 0}\frac{(e^{\Delta s}-1)}{\Delta s} &= \lim_{\Delta s\to 0}\frac{f(\Delta s)}{\Delta s} \\ &= \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta s} = 1. \qquad \text{(A.11)} \end{aligned}$$

O curso de Cálculo I apresentará uma demonstração muito mais elegante para este limite. Este resultado nos possibilita reescrever (A.10) como

$$\frac{d}{dt}e^{\omega t} = \omega\, e^{\omega t}. \qquad \text{(A.12)}$$

Note que, no caso $\omega = 1$, podemos dizer que a derivada da exponencial é ela mesma. A exponencial é a única função com esta propriedade (não esqueça).

Conhecendo a regra (A.12) para derivar a exponencial, podemos calcular a derivada da função logarítmica. Por definição, dado $x(t) = \ln t$, temos $t = e^{x(t)}$. Derivando no tempo esta última expressão, temos $dt/dt = 1$ no lado esquerdo e $de^{x(t)}/dt$ no lado direito, a qual é a derivada de uma função composta, pois $e^{x(t)} = y(x(t))$, com $y(x) = e^x$. Usando a regra da função composta (A.9), podemos escrever

$$\frac{d}{dt}e^{x(t)} = \frac{de^x}{dx}\frac{dx}{dt} = e^x\frac{dx}{dt}. \qquad \text{(A.13)}$$

Este resultado deve ser igualado à unidade (a derivada do lado esquerdo de $t = e^{x(t)}$). Assim,

$$\frac{d}{dt}\ln t = \frac{1}{t}. \qquad \text{(A.14)}$$

Este é outro resultado muito útil é muito fácil de memorizar.

Para completar o quadro de derivadas de

funções elementares que precisaremos, precisamos das derivadas das funções trigonométricas seno e cosseno. Novamente, vamos usar a definição (A.1) de derivada e calcular a derivada da função seno,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\sin t &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin(t+\Delta t)-\sin(t)}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin(t)\cos(\Delta t)+\cos(t)\sin(\Delta t)-\sin(t)}{\Delta t}\\ &= \sin(t)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cos(\Delta t)-1}{\Delta t}\\ &\quad+\cos(t)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin(\Delta t)}{\Delta t}. \end{aligned} \tag{A.15}$$

Aqui é um bom momento para deixarmos um pouco de trabalho para o curso de Cálculo I. Lá será provado, elegantemente, os limites fundamentais

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cos(\Delta t)-1}{\Delta t} = 0, \tag{A.16}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin(\Delta t)}{\Delta t} = 1. \tag{A.17}$$

Portanto, levando este dois resultados de volta em (A.15), a derivada do seno pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt}\sin t = \cos t. \tag{A.18}$$

Este é um resultado também único e muito fácil de ser memorizado: a derivado do seno é o cosseno. Lembrando que $\cos(t) = \sin(t+\pi/2)$, podemos obter a derivada do cosseno. Não podemos esquecer que $\sin(t+\pi/2)$ é uma função composta da forma $\sin(t+\pi/2) = f(g(t))$, com $f(g) = \sin(g)$ e $g(t) = t+\pi/2$. Como regra, toda função, por mais simples que seja, é uma função composta. Assim, a derivada do cosseno pode ser dada por

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\cos(t) &= \frac{d}{dt}\sin(t+\pi/2) = \frac{d}{dt}f(g(t))\\ &= \frac{df}{dg}\frac{dg}{dt} = \cos(g)\\ &= \cos(t+\pi/2) = -\sin(t),\end{aligned} \tag{A.19}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\cos t = -\sin t. \tag{A.20}$$

Não esqueça deste sinal negativo na derivada do cosseno (a função trigonométrica par). Note a troca de papeis entre as derivadas das funções trigonométricas seno e cosseno. Memorize as derivadas abaixo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}a &= 0, & \frac{d}{dt}t^n &= nt^{n-1},\\ \frac{d}{dt}e^t &= e^t, & \frac{d}{dt}\ln t &= 1/t,\\ \frac{d}{dt}\sin t &= \cos t, & \frac{d}{dt}\cos t &= -\sin t.\end{aligned} \tag{A.21}$$

Vejamos mais alguns exemplos do uso das propriedades (A.8)–(A.9). Por exemplo, suponha $y = \sin(2t^2)$. Esta é uma função composta na forma $y = f(g(t))$, na qual $f(g) = \sin(g)$ e $g(t) = 2t^2$. Assim, devemos usar a regra da função composta, (A.9), para efetuar sua derivada,

$$\dot{y} = \frac{dg}{dt}\frac{df}{dg} = (4t)\cos(g) = 4t\cos(2t^2). \tag{A.22}$$

Vejamos este outro exemplo: $y = \cos(2t)e^{t^2}$. Desta vez temos um produto de duas funções (um cosseno vezes uma exponencial), na qual cada parcela é uma função composta. Assim, devemos usar primeiro a regra do produto, (A.8), e depois a regra da função composta, (A.9),

$$\dot{y} = \left\{\frac{d}{dt}\cos(2t)\right\}e^{t^2} + \cos(2t)\left\{\frac{d}{dt}e^{t^2}\right\}$$
$$= -2\sin(2t)\,e^{t^2} + \cos(2t)2t\,e^{t^2}$$
$$= 2\big[t\cos(2t) - \sin(2t)\big]e^{t^2}. \quad \text{(A.23)}$$

Invente outros exemplos. Treine. Use computação algébrica para checar seus resultados. Pratique a vontade.

E sobre a interpretação geométrica de derivada? Para fazermos esta interpretação corretamente, devemos resolver um outro problema (geométrico). Como determinar a equação da reta tangente em um dado ponto t_0 de uma dada curva $x(t)$? Veja a Figura A.1. A única informação que temos é que esta reta tangente deve passar pelo ponto $(t_0, x(t_0))$, e somente por este ponto numa vizinhança muito pequena em torno de t_0. No entanto, sabemos que precisaremos conhecer também o coeficiente angular desta reta tangente e que para isto precisaremos de um segundo ponto. Isto mesmo, o problema é que não temos este segundo ponto. Que fazer? A única atitude sensata é usar um outro ponto, digamos $x_1 = x(t_1)$, da curva $x(t)$, como indicado na Figura A.1.

O coeficiente angular da reta secante passando pelos pontos $x_0 = x(t_0)$ e $x_1 = x(t_1)$ é

$$\tan\theta_1 = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}. \quad \text{(A.24)}$$

De fato, esta reta secante não é a mesma reta tangente que estamos procurando, mas se mantivermos t_0 fixo e aproximarmos t_1 de t_0, obteremos o coeficiente angular da reta

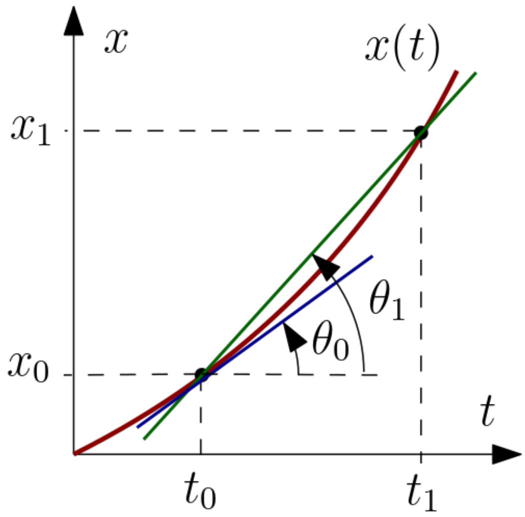

Figura A.1: A secante de uma trajetória entre os instantes t_0 e t_1 e a sua reta tangente em t_0. Através do mesmo processo limite que define derivada, a reta secante é levada sobre a reta tangente.

tangente que procuramos,

$$\tan\theta_0 = \lim_{t_1\to t_0} \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}. \quad \text{(A.25)}$$

Como este processo limite é o mesmo processo limite usado para definir a velocidade instantânea na Definição (1), podemos concluir que a derivada nos dá informação sobre retas tangentes de curvas: a derivada de uma função qualquer $f(t)$ é numericamente igual ao coeficiente angular da reta tangente passando por $(t, f(t))$. De fato, isto é uma solução (elegante e funcional) ao problema matemático de encontrar a reta tangente de uma curva plana (veja a Figura A.1). Vejamos como isto funciona.

Suponha $x(t) = t^2/2$. A derivada desta função é $\dot{x}(t) = t$ (verifique). Suponha que estejamos interessados em determinar a reta tangente $\tau(t) = a + bt$ num determinado ponto $x_0 = x(t_0)$ da parábola $x(t) = t^2/2$, por exemplo em $t_0 = 2$, ou $x_0 = 2$. Acabamos de aprender que o coeficiente angular b desta reta tangente pode ser calculado pela derivada $\dot{x}(t)$, avaliada no ponto em questão, ou seja, $b = \dot{x}(t_0)$. Tomando $t_0 = 2$, o coeficiente angular da reta tangente passando neste ponto ($x_0 = x(t_0) = 2$) é $b = \dot{x}(2) = 2$. Assim, falta determinarmos o termo independente, a, da reta tangente $\tau(t) = a + 2t$. Isto pode ser feito impondo que a reta tangente $\tau(t)$ e a parábola $x(t)$ tenham o mesmo valor em $t_0 = 2$ (é a definição da reta tangente: compartilhar um único ponto com a curva). Desta forma, de $\tau(2) = x(2)$ resulta a equação $a + 4 = 2$, a qual implica em $a = -2$. Portanto, no ponto $(2, 2)$, a parábola $x(t) = t^2/2$ tem uma tangente cuja equação é $\tau(t) = -2 + 2t$. Verifique isto desenhando simultaneamente a parábola $x(t)$ e sua reta tangente $\tau(t)$ (no ponto $t = 2$) e veja que esta reta tangente toca (tangencia) a parábola apenas no ponto $t = 2$.

Outra aplicação imediata desta interpretação geométrica: ela é muito útil para determinarmos os pontos extremos (máximos e mínimos) de funções, pois, nestes pontos de máximos e mínimos, a reta tangente é sempre horizontal (logo o seu coeficiente angular é nulo). Portanto, a derivada deve ser nula nos pontos extremos de uma função.

Apêndice B

Integrais

Naturalmente, todas as propriedades de integral serão estudadas detalhadamente no curso de Cálculo. Entretanto, como de costume, adiantaremos aqui algumas propriedades, principalmente operacionais.

Vamos rever a definição da integral de uma função suave. No final, ganharemos também sua interpretação geométrica. A Figura B.1 mostra um trecho de uma função arbitrária $f(t)$ a ser integrada entre t_0 e t_1, dando destaque para o i-ésimo sub-intervalo compreendido entre t_i e $t_i + \Delta t$. Como podemos ver, este sub-intervalo é um retângulo de altura $f(t_i)$ e base Δt, cuja área é $f(t_i)\,\Delta t$. Portanto, a área A abaixo da curva $f(t)$, entre t_0 e t_1, é aproximadamente a soma das N áreas $f(t_i)\,\Delta t$ de cada retângulo,

$$A \approx \sum_{i=1}^{N} f(t_i)\,\Delta t. \tag{B.1}$$

No limite $\Delta t \to 0$ ou, equivalentemente, no limite de haver infinitos sub-intervalos ($N \to \infty$), a área A abaixo da curva $f(t)$ será calculada exatamente por uma soma infinita, denominada de integral (definida) da função $f(t)$ entre t_0 e t_1,

$$A = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(t_i)\,\Delta t = \int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt. \tag{B.2}$$

Esta soma infinita define uma integral e apresenta seu significado geométrico. Uma integral está relacionada com a área abaixo de uma curva.

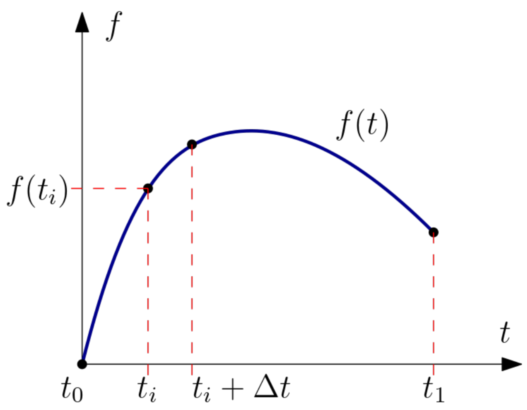

Figura B.1: Definição de integral de Riemann e sua interpretação geométrica como a área debaixo da curva criada pelo integrando.

Newton (1665–1666) e Leibniz (1684-1686) são considerados os fundadores do cálculo diferencial (derivadas) e do cálculo integral (integrais). Eles já conheciam a inter-relação entre derivadas (tangentes) e integrais (áreas) devido aos trabalhos de Barrow (1663-1669) relacionando tangentes de curvas com áreas delimitadas por estas mesmas curvas. Esta relação é conhecida hoje como o teorema fundamental do cálculo.

Teorema 13 (Teorema Fundamental)**.** *Seja $f(t)$ uma função contínua e $F(t)$ a sua integral (indefinida),*

$$\int f(t)\,dt = F(t). \tag{B.3}$$

Então,

$$\frac{d}{dt}F(t) = f(t). \tag{B.4}$$

Note que podemos somar uma constante arbitrária à função $F(t)$, denominada de primitiva. Em geral, a primitiva já contém essa constante arbitrária. A integral definida é efetuada em termos da primitiva da seguinte forma:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt = F(t)\Big|_{t_0}^{t_1} = F(t_1) - F(t_0). \tag{B.5}$$

Portanto, graças ao Teorema 13, iremos calcular integrais respondendo à seguinte pergunta: "quem é a função primitiva $F(t)$ cuja derivada é igual ao integrando $f(t)$?". Isto significa que primeiro devemos saber derivar para depois efetuarmos uma integral. Por outro lado, podemos derivar analiticamente qualquer função, mas nem sempre poderemos obter primitivas de forma analítica. Neste caso, devemos usar métodos computacionais numéricos.

Exemplo 1. Primeiro um exemplo onde o resultado é bem conhecido: a área de um triângulo reto, de base 1 e altura 1, é 1/2. Esta é a área delimitada pela curva $f(t) = t$ entre $t = 0$ e $t = 1$. Usando (B.2) e o Teorema (13),

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 t\,dt = \left(\frac{t^2}{2} + C\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{2} + C\right) - \left(\frac{0}{2} + C\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{B.6}$$

Exemplo 2. A área debaixo da parábola $f(t) = t^2$ é um exemplo no qual o resultado é desconhecido (pelo menos para os normais). Assim, usando (B.2) e o Teorema (13), a área abaixo da parábola $f(t) = t^2$ no intervalo $t = 0$ e $t = 2$ pode ser calculada facilmente,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 t^2\,dt = \left(\frac{t^3}{3} + C\right)\Bigg|_0^2 \\ &= \left(\frac{8}{3} + C\right) - \left(\frac{0}{3} + C\right) = \frac{8}{3}. \end{aligned} \tag{B.7}$$

Exemplo 3. Suponha que o movimento seja em uma dimensão, $\vec{r} = x(t)\,\hat{\imath}$ com $x(t) = t$ (movimento uniforme). Portanto, o vetor velocidade é $\vec{v} = \dot{x}(t)\,\hat{\imath}$ com $\dot{x}(t) = 1$. Assim, $v(t) = \|\vec{v}\| = 1$ e o espaço percorrido (em metros) entre os instantes $t_0 = 0$ e $t_1 = 1$ (em segundos) é

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_0^1 v(t)\,dt = \int_0^1 dt \\ &= t\Big|_0^1 = 1 - 0 = 1. \end{aligned} \tag{B.8}$$

Note que este resultado coincide com o módulo da diferença entre os vetores posição nos instantes inicial e final, $\Delta S = x(1) - x(0) = 1 - 0 = 1$, pois a trajetória aqui é retilínea. Note também que $\Delta S = 1$ é numericamente igual à área abaixo do gráfico da velocidade (constante) $\dot{x}(t) = 1$ no intervalo de tempo dado. Isto não é uma simples coincidência. Está indicando uma possível interpretação geométrica para a integral, relacionada com áreas.

Exemplo 4. Suponha agora que a trajetória seja uma parábola no plano XY, $\vec{r} = t\,\hat{\imath} + (1 + t^2)\,\hat{\jmath}$. Assim, o vetor velocidade é $\vec{v} = \hat{\imath} + 2t\,\hat{\jmath}$, cujo módulo é $v(t) = \sqrt{1 + 4t^2}$. Quem é o espaço percorrido entre os instantes $t_0 = 0$ s e $t_1 = 1$ s? Devemos efetuar a integral (4.6) (via computação algébrica?),

$$\Delta S = \int_0^1 v(t)\,dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2}\,dt = 1.479\,\text{m}. \quad \text{(B.9)}$$

Note agora que este espaço percorrido é diferente de $\|\vec{r}(1) - \vec{r}(0)\| = 1.414$ m, pois a trajetória não é linear como no exemplo anterior. Novamente, o valor do espaço percorrido é numericamente igual ao valor da área abaixo do gráfico do módulo do vetor velocidade, $v(t) = \sqrt{1 + 4t^2}$, entre os instantes considerados. Isto reforça a relação de integral com área. Por outro lado, pense sobre a praticidade de ter uma ferramenta como a integral para calcular o comprimento de uma trajetória conhecendo apenas o módulo do vetor velocidade, sem a necessidade de usar uma fita métrica.

B.0.1 Exercícios

Exercício 33. *Calcule as integrais indefinidas de* $2t + \sin(t)$, $t^2 + e^{-t}$, te^{-t^2}.

Exercício 34. *Calcule o espaço percorrido na trajetória circular* $\vec{r}(t) = (R\cos(2\pi t), R\sin(2\pi t), 0)$ *entre os instantes* $t = 0$ *e* $t = t$. *Compare este resultado com a expressão que é conhecida para o comprimento de uma circunferência de raio* R.

Exercício 35. *Calcule o espaço percorrido na trajetória parabólica* $\vec{r}(t) = (t, t, 20t - 5t^2)$ *(mks) entre os instantes* $t = 0$ *s e* $t = 4$ *s. Qual é a distância no plano* XY *(solo) entre o ponto de lançamento (*$t = 0$ *s) e o ponto de chegada (*$t = 4$ *s)?*