SME 341 & SLC609
Assunto: Equações Diferenciais Ordinárias
Aula EDO-12 – EDOs de 2ª ordem não homogêneas
Método da Variação dos Parâmetros – 15 min

Prof. Miguel Frasson

Junho 2020

RESUMO: solução das EDOs de 2ª ordem não homogêneas

$$ay'' + by' + cy = h(t) \qquad \text{(L)}$$

1. Resolva a homogênea associada (H-A): ache y_1 e y_2 (já estudamos)
2. Ache uma solução particular y_p de (L) (próximas aulas)
3. Solução geral:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p.$$

Exemplo (aula anterior): y" + 5y' + 6y = 12

1. Resolver a homogênea
   - Homogênea associada: $y'' + 5y' + 6y = 0$
   - Equação característica: $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \implies \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$
   - $y_1 = e^{-t}, \quad y_2 = e^{-2t}$
2. Achar uma solução particular
   - por inspeção, note que $x_p = 2$ é uma solução (agora aprenderemos a CALCULAR essa solução)
3. Solução geral:

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + 2$$

Métodos para encontrar soluções particulares

1. Método da Variação dos Parâmetros (esta aula)
   - **Vantagem** (relativamente) fácil de explicar e aplicar
   - **Desvantagem** resolver integrais
2. Método dos Coeficientes a Determinar (aula que vem)
   - **Vantagem** Contas fáceis, apenas contas algébricas
   - **Desvantagem** Muitos casos

Método da Variação dos Parâmetros

Motivação:

- Aproveitar que as soluções da homogênea são LI, portanto

$$\det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} \neq 0, \quad \forall t$$

- Se montássemos um sistema com essa matriz de coeficientes, esse sistema sempre tem solução
- Esse método se aproveita disso para calcular y_p da forma

$$y_p = u_1(t)y_1 + u_2 y_2$$

onde u_1, u_2 são funções (não constantes) que temos que descobrir

Derivando $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$

- $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ (2 termos)
- $y_p' = u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2'$ (4 termos)
- Dessa forma, y_p'' terá 8 termos (é ruim)
- Faremos uma simplificação (a 1ª linha de nosso sistema)

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$$

- Com a simplificação

$$y_p' = u_1 y_1' + u_2 y_2'$$

- $y_p'' = u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2''$

Substituindo as derivadas em (L)

$$\begin{aligned} h(t) &= ay_p'' + by_p' + cy_p \\ &= a(u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2'') \\ &\quad + b(u_1y_1' + u_2y_2) + c(u_1y_1 + u_2y_2) \end{aligned}$$

agrupando termos com u_1, u_1', u_2, u_2'

$$\begin{aligned} &= u_1'(ay_1') + u_2'(ay_2') \\ &\quad + u_1 \underbrace{(ay_1'' + by_1' + cy_1)}_{=0} + u_2 \underbrace{(ay_2'' + by_2' + cy_2)}_{=0} \end{aligned}$$

Portanto

$$u_1'(ay_1') + u_2'(ay_2') = h(t) \implies u_1'y_1' + u_2'y_2' = \frac{h(t)}{a}$$

Das duas equações formamos um sistema

- u_1' e u_2' satisfazem as equações

$$
\begin{aligned}
u_1'y_1 + u_2'y_2 &= 0 && \text{(simplificação)} \\
u_1'y_1' + u_2'y_2' &= \frac{h(t)}{a} && \text{(eq. anterior)}
\end{aligned}
$$

- Montamos o sistema (que sempre tem solução)

$$
\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h(t)/a \end{pmatrix}
$$

- Resolvendo o sistema, achamos u_1' e u_2'
- Integrando essas funções, achamos u_1 e u_2
- Pronto! $\quad y_p = u_1y_1 + u_2y_2$.

RESUMO: Método da Variação dos Parâmetros

1. Forma de y_p: $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$
2. Sistema:
$$\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h(t)/a \end{pmatrix}$$
3. Resolver o sistema para achar u_1' e u_2'
4. Integrar para achar u_1 e u_2