14-07-2020

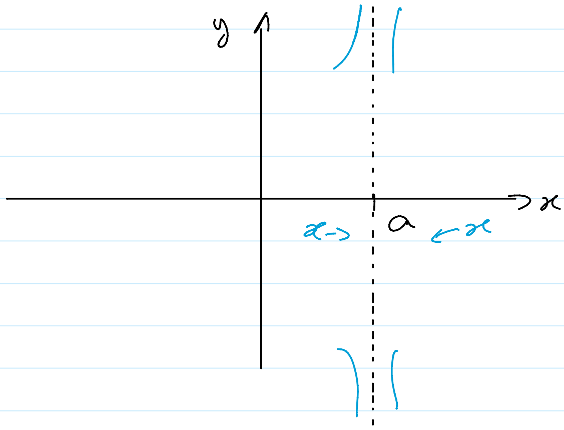
terça-feira, 14 de julho de 2020 18:58

Gráficos

Assíntotas

A reta $\boxed{x = a}$ é uma $\boxed{\text{assíntota vertical}}$ da função f

se $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty \ (-\infty)$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = + (-\infty)$



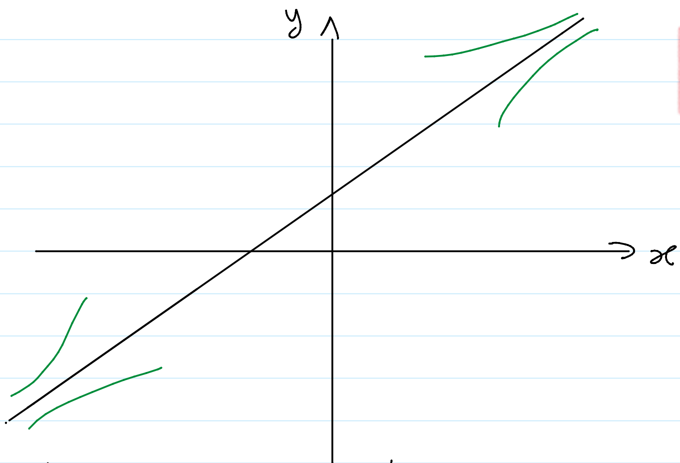
Assíntota horizontal ou oblíqua (inclinada)

Se a reta $y = ax + b$ é uma assíntota de f então

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

ou

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$



$\boxed{a \neq 0}$

Como determinar a e b

Supor que $\boxed{y = ax+b}$ é uma assíntota de f, então

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

$$\frac{f(x)-(ax+b)}{x} = \frac{f(x)-ax-b}{x} = \frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-(ax+b)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\underbrace{\left[f(x)-(ax+b)\right]}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} = 0\cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right)$$

$$\begin{cases} b=0 \Rightarrow \frac{b}{x}=0 \\ b\neq 0 \Rightarrow \frac{b}{x}\to 0 \end{cases}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} - a$$

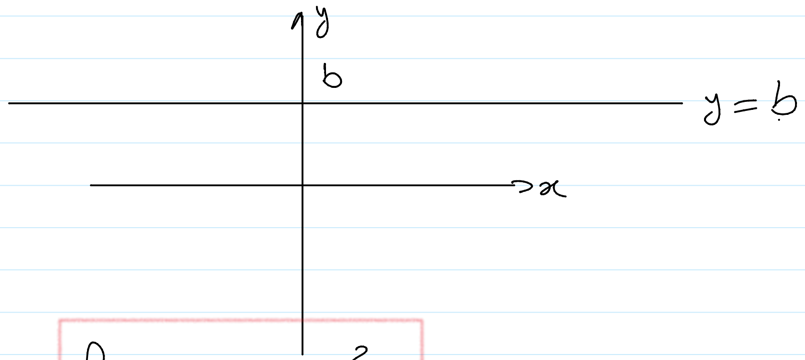
$$\Rightarrow \boxed{a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}}$$

$$0 = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax-b\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right) - b$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right) \in \mathbb{R}}$$

Se $a=0$ então $y=b$ é uma assíntota horizontal



Exemplo: $\boxed{f(x) = \frac{x^2}{x-1}}$

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}\quad \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=\!=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1} = 1$$

Regra de L'Hospital

1) $\lim f(x) \to 0 \quad = \lim f'(x)$

1) $$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
$f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$

A regra continua válida se trocarmos $x \to a^+$ por $x \to a^-$ ou $x \to a$ ou $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$

2) $$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
$f(x) \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$

A regra também é válida se trocarmos um ou os dois $+\infty$ por $-\infty$

A regra continua válida se trocarmos $x \to a^+$ por $x \to a^-$ ou $x \to a$ ou $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - ax\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2 - x(x-1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1} = 1$$

$\therefore$ $y = x + 1$ é uma assíntota oblíqua de f

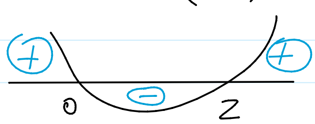
Exercício: Seja $\boxed{f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}.}$ Determine:

a) Domínio de f; b) Intervalos de crescimento, decrescimento e pontos de máximo e mínimo locais, se existirem; c) concavidade e pontos de inflexão, se existirem; d) Assíntotas; e) o gráfico de f.

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

b) $$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$y = x^2 - 2x = x(x-2)$



$y = (x-1)^2 > 0, \ \forall x \neq 1$

	0	1	2	
$x^2 - 2x$	+	−	−	+
$(x-1)^2$	+	+	+	+
$f'(x)$	+	−	−	+

↗ M.l ↘ ↘ m.l. ↗

f é crescente em $]-\infty, 0]$ e em $[2, +\infty[$

Regra da cadeia
$y = f(g(x))$
$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

f é crescente em $]-\infty, 0]$ e em $[2, +\infty[$

f é decrescente em $[0, 1[$ e em $]1, 2]$

$x = 0$ é ponto de máximo local de f

$x = 2$ é ponto de mínimo local de f

$f(0) = 0$

$f(2) = \frac{4}{2-1} = 4$

c) $$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)\,2(x-1)^{2-1} \cdot 1}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{\cancel{(x-1)}\left[(2x-2)(x-1) - 2(x^2-2x)\right]}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{\cancel{2x^2} - \cancel{2x} - \cancel{2x} + 2 - \cancel{2x^2} + \cancel{4x}}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

o sinal de $(x-1)^3$ é o mesmo que o sinal de $x-1$

		1	
$f''(x)$	$-$		$+$
	$\cap$		$\cup$

$x = 1$ NÃO É ponto de inflexão de f pois $1 \notin D_f$

f tem concavidade para cima em $]1, +\infty[$

f tem concavidade para baixo em $]-\infty, 1[$

d) Já sabemos que $\boxed{y = x+1}$ é $\boxed{\text{uma assíntota oblíqua}}$ de f

f não tem assíntota horizontal

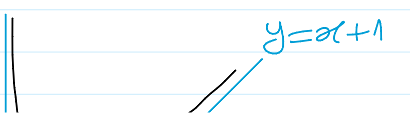
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1^- \\ x<1}} \frac{x^2}{x-1} = -\infty, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1^+ \\ x>1}} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$$

$y = x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$y = x - 1$

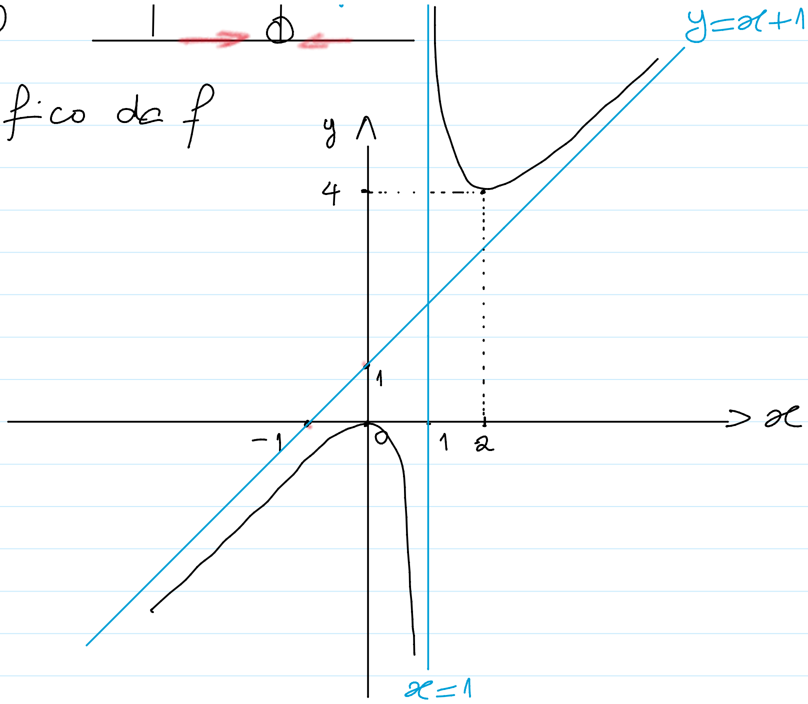
$x = 1$ é uma assíntota vertical

		0		1	
x^2	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$		$-$		$+$



$f(x)$ | ϕ

e) Gráfico da f



2) Idem para $\boxed{f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}}$

a) $D_f=\mathbb{R}$, pois $x^2+1\neq 0 \ \forall x\in\mathbb{R}$ (neste caso f não tem assíntota vertical)

b) $$f'(x)=\frac{3x^2(x^2+1)-x^3\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{3x^4+3x^2-2x^4}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}\geq 0$$

f é sempre crescente, f não tem pontos de máximo e mínimo locais

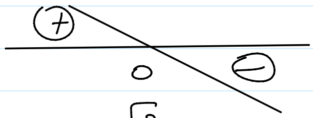
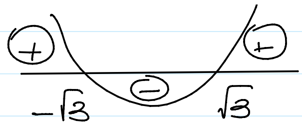
c) $$f''(x)=\frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2-(x^4+3x^2)2(x^2+1)^{2-1}\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{\cancel{(x^2+1)}\left[(4x^3+6x)(x^2+1)-4x(x^4+3x^2)\right]}{(x^2+1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$=\frac{\cancel{4x^5}+\cancel{4x^3}+\cancel{6x^3}+6x-\cancel{4x^5}-\cancel{12x^3}}{(x^2+1)^3}$$

$$=\frac{-2x^3+6x}{(x^2+1)^3}\Longrightarrow f''(x)=\frac{-2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$y=-2x$ + 0 − , $y=x^2-3$ + − +

$y = -2x$  , $y = x^2 - 3$ 

	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	
$-2x$	+	+	−	−
x^2-3	+	−	−	+
$(x^2+1)^3$	+	+	+	+
$f''(x)$	+	−	+	−
	$\cup$ I	$\cap$ I	$\cup$ I	$\cap$

f tem concavidade para cima em $]-\infty, -\sqrt{3}[$ e em $]0, \sqrt{3}[$

f tem concavidade para baixo em $]-\sqrt{3}, 0[$ e em $]\sqrt{3}, +\infty[$

os pontos, $-\sqrt{3}$, 0 e $\sqrt{3}$ são de inflexão

$$f(\pm\sqrt{3}) = \frac{\pm 3\sqrt{3}}{4} \simeq \pm 1{,}3$$

$$f(0) = 0$$

d) f não tem assintotas verticais

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}} = 1$$

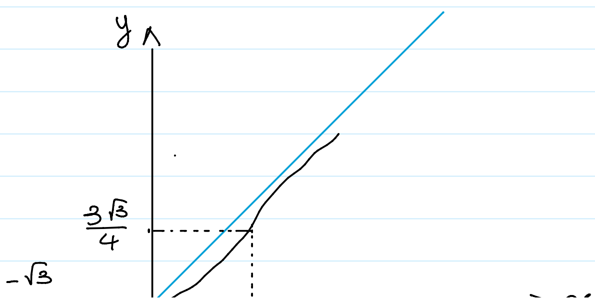
$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right)$$

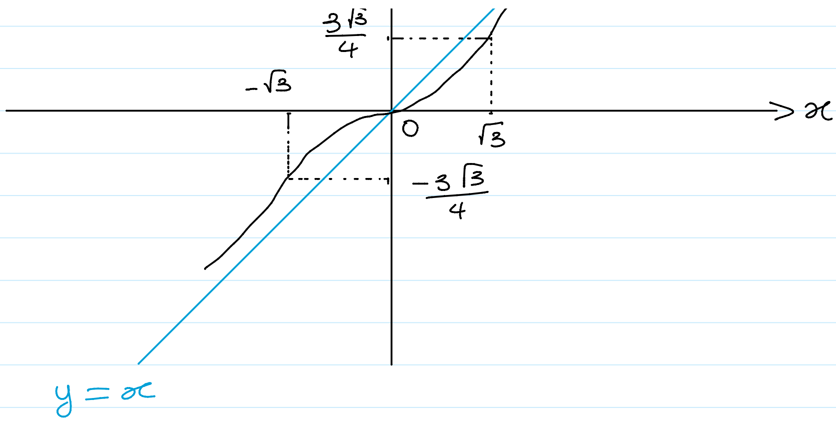
$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - x^3 - x}{x^2+1} = -\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\overbrace{x}^{\pm\infty}}{\underbrace{x^2+1}_{\pm\infty}} \overset{\text{L'Hospital}}{=} -\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

$\Rightarrow$ $y = x$ é uma assintota obliqua

f não tem assintota horizontal

e)





3√3
4
−√3
x
O
√3
−3√3
4
y = x