Algumas soluções - Lista 8
Cálculo - FAU

Monitora - Juliane Trianon Fraga

Exercício 1:

(c) Vamos estudar a função f com relação a crescimento e decrescimento:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2).$$

Temos que $f'(x) > 0$ se, e somente se, $x > 2$ ou $x < 1$ e $f'(x) < 0$ se, e somente se, $1 < x < 2$. Ou seja, f é estritamente crescente em $]-\infty, 1]$ e $[2, \infty[$ e estritamente decrescente em $[1, 2]$, de modo que 1 é ponto de máximo local e 2 é ponto de mínimo local de f.

(e) Para $x \in [0, \pi]$, temos que $f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x > 0$ (resp., < 0) se, e somente se, $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ (resp., $\frac{\pi}{4} < x \leq \pi$). Portanto, pelo mesmo raciocínio do item anterior, $\frac{\pi}{4}$ é ponto de máximo local de f.

Agora observemos que, sendo f contínua em $[0, \pi]$, pelo Teorema de Weierstrass, f assume máximo e mínimos globais neste intervalo. O ponto de máximo global obrigatoriamente será $\frac{\pi}{4}$, pois f é crescente em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ e decrescente em $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$. Pelo mesmo motivo, para o mínimo, os candidatos são os extremos do intervalo $[0, \pi]$. Como $f(0) = 1 > f(\pi) = -1$, 0 é ponto de mínimo global do intervalo.

Exercício 2:

Sendo h a altura e l o comprimento de um retângulo de perímetro $2p$, temos que $p = h + l$. Ou seja, $A(h) = h(p - h)$ é a função que relaciona a área de um retângulo assim com o valor da sua altura. Procuramos o valor máximo global de A para $h \in [0, p]$ (o valor da altura deve ser positivo e não pode exceder o perímetro). Como

$$A'(h) = p - 2h,$$

tem-se que $A'(h) > 0$ se, e somente se, $0 \leq h < \frac{p}{2}$ e $A'(h) < 0$ se, e somente se, $\frac{p}{2} < h \leq p$. Portanto, $h = \frac{p}{2}$ é ponto de máximo local da função A. Sendo assim, as dimensões que maximizam a área do retângulo são $h = l = \frac{p}{2}$.

Exercício 9:

Dado um ponto $\left(x, \frac{2}{x}\right)$ da curva dada, a sua distância D à origem $(0,0)$ é dada por

$$D(x) = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}}.$$

O valor x que maximiza D será o mesmo que maximiza D^2, uma vez que $D > 0$ para todo $x > 0$. Portanto, podemos fazer o cálculo para a função

$$D^2(x) = x^2 + \frac{4}{x^2}.$$

Como $(D^2)'(x) = 2x - \frac{8}{x^3}$, temos que $(D^2)'(x) > 0$ se, e somente se, $x^4 > 4$, ou seja, $x^2 > 2$, o que é equivalente a $x > \sqrt{2}$ (lembre-se de que estamos restritos ao caso $x > 0$). Da mesma maneira, $(D^2)'(x) < 0$ se, e somente se, $0 < x < \sqrt{2}$. Portanto, $x = \sqrt{2}$ é ponto de mínimo local de D^2, e o ponto da curva dada mais próximo da origem é $\left(\sqrt{2}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Exercício 10:

A área total A da superfície do sólido, em função de h e r, é dada por

$$A = \pi r^2 + 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi rh + 3\pi r^2.$$

(lembre-se de que a área superficial de uma esfera de raio R é $4\pi R^2$). Portanto,

$$5\pi = 2\pi rh + 3\pi r^2,$$

donde concluímos que

$$h = \frac{5 - 3r^2}{2r}.$$

O volume do sólido dado, por sua vez, é

$$V = \pi r^2 h + \frac{2\pi r^3}{3} = \pi r \frac{(5-3r^2)}{2} + \frac{2\pi r^3}{3}.$$

Temos assim que V é uma função de r tal que

$$V'(r) = \frac{5\pi}{2} - \frac{9\pi r^2}{2} + 2\pi r^2 = \frac{5\pi(1-r^2)}{2}.$$

Dessa forma, $V'(r) > 0$ se, e somente se, $r^2 < 1$, isto é, $0 < r < 1$ e $V'(r) < 0$ se, e somente se, $r > 1$ (lembre-se de que estamos restritos ao caso $r > 0$, pois estamos trabalhando com dimensões físicas). Concluímos que $r = 1$ é ponto de máximo do volume, e nesse raio, temos que

$$h = \frac{5-3}{2} = 1.$$

Antes de partirmos para a solução da próxima questão, recordemos os seguintes fatos:

Teorema 1 (pg 280 do Guidorizzi)**.** *Seja f uma função definida em um intervalo aberto I, e derivável em um ponto $p \in I$. Se p for ponto de máximo ou de mínimo local de f, então $f'(p) = 0$.*

Teorema 2 (pg 281 do Guidorizzi)**.** *Sejam f uma função que admite derivada de 2ª ordem* ***contínua*** *no intervalo aberto I e $p \in I$.*

a) Se $f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0$, então p é ponto de mínimo local de f.

b) Se $f'(p) = 0$ e $f''(p) < 0$, então p é ponto de máximo local de f.

Exercício 11:

(b) Vamos calcular os pontos críticos da função x:

$$x'(t) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(t^3-2t+1)^2}}(3t^2-2) = 0$$

se, e somente se, $t = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Esses são, portanto, os pontos críticos de x. A expressão da derivada segunda de x é complicada. Nesse caso, é mais fácil seguir o mesmo processo que estava sendo feito anteriormente, isto é, estudar x com relação a crescimento e decrescimento, olhando apenas para a derivada primeira de x. Note que $x'(t) > 0$ se, e somente se, $x > \sqrt{\frac{2}{3}}$ ou $x < -\sqrt{\frac{2}{3}}$ e $x'(t) < 0$ se, e somente se, $-\sqrt{\frac{2}{3}} < x < \sqrt{\frac{2}{3}}$ (observe que há pontos em que $x'(t)$ não está definida). Sendo assim, x é estritamente crescente nos pontos de $\left[\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty\right[$ e $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ em que x' estiver definida, e estritamente decrescente nos pontos de $\left[-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ em que x' estiver definida. Disso concluímos que o ponto $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ é de máximo local, e $\sqrt{\frac{2}{3}}$ é de mínimo local.

(c)

$$h'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 = 0$$

se, e somente se, $x = 1$. Esse é, portanto, o único ponto crítico de h. Agora, como

$$h''(x) = 6(x-1),$$

temos que $h''(1) = 0$, $h''(x) < 0$ se $x \in]-\infty, 1[$ e $h''(x) > 0$ se $x \in]1, \infty[$. Sendo assim, 1 é ponto de inflexão de h.

(f)

$$g'(x) = 2xe^{-5x} - 5x^2e^{-5x} = e^{-5x}x(2-5x) = 0$$

se, e somente se, $x = 0$ ou $x = \frac{2}{5}$. Esses são, portanto, os pontos críticos de f. Agora, como

$$\begin{aligned}
g''(x) &= (2-5x)(-5e^{-5x}x + e^{-5x}) + e^{-5x}x(-5) \\
&= -10e^{-5x}x + 2e^{-5x} + 25e^{-5x}x^2 - 5xe^{-5x} - 5xe^{-5x} \\
&= 2e^{-5x} + 25e^{-5x}x^2 - 20e^{-5x}x = e^{-5x}(2 + 25x^2 - 20x),
\end{aligned}$$

tem-se que $g''(0) > 0$ e $g''\left(\frac{2}{5}\right) < 0$ e, portanto, pelos Teoremas 1 e 2 enunciados acima, concluímos que 0 é ponto de mínimo local e $\frac{2}{5}$ é ponto de máximo local de g.

Se f é uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, pelo Teorema de Weierstrass, f assume máximo e mínimo em $[a, b]$. Se f também for derivável em $]a, b[$, os candidatos a máximos e mínimos de f em $[a, b]$ são os pontos críticos em $]a, b[$ e as extremidades, a e b. Aplicamos este processo para resolver o exercício abaixo.

Exercício 12:

(d) Para $x \in [0, \pi]$, temos que

$$f'(x) = \cos x + \text{ sen } x = 0$$

se, e somente se, $x = \dfrac{3\pi}{4}$. Deste modo, os cadidatos a máximos e mínimos globais de f em $[0, \pi]$ são $x = 0$, $x = \dfrac{3\pi}{4}$ e $x = \pi$. Como

$$f(0) = -1,$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

e

$$f(\pi) = 1,$$

concluímos que $\sqrt{2}$ é valor máximo de f em $[0, \pi]$ e -1 é valor mínimo de f em $[0, \pi]$.

Exercício 14:

(a) Para verificar a igualdade, basta derivar $f(x) = -\dfrac{1}{\alpha} \cos \alpha x$.