5 – Escoamento Viscoso em Condutos

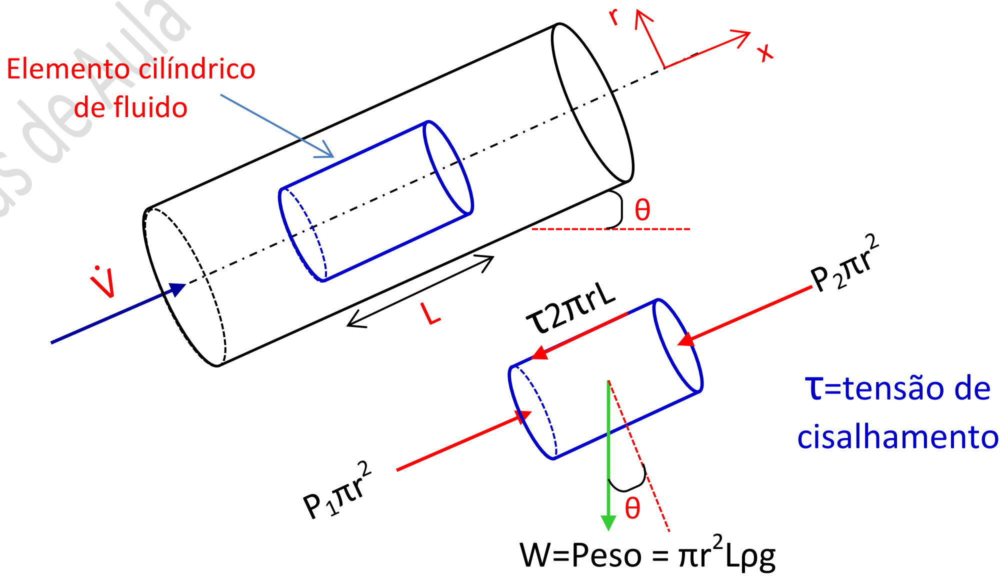
O transporte de um fluido em um conduto fechado (seção circular = tubo; seção não-circular = conduto) é muito importante no nosso cotidiano.

O escoamento do fluido pode ser laminar ou turbulento, dependendo das características do conduto, propriedades do fluido e velocidade do escoamento. O número de Reynolds (Re) é um parâmetro utilizado para essa distinção.

$$Re = \frac{\rho \bar{V} D}{\mu} \rightarrow \begin{cases} Re \leq 2.300 \rightarrow \text{Escoamento laminar} \\ 2.300 < Re \leq 4.000 \rightarrow \text{Escoamento de transição} \\ Re > 4.000 \rightarrow \text{Escoamento turbulento} \end{cases}$$

5.1 - Escoamento Laminar Permanente e Incompressível

O escoamento laminar permanente incompressível plenamente desenvolvido no interior de um tubo de diâmetro constante pode ser promovido pela força gravitacional e/ou por forças de pressão. Os efeitos viscosos (atrito) oferecem resistência ao escoamento, fazendo o fluido escoar sem aceleração.



Um balanço de forças no elemento de fluido ($\sum F_x=0$):

$$P_1\pi r^2 - P_2\pi r^2 - \tau 2\pi rL - \pi r^2 L\rho g \operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\pi r^2(P_1 - P_2 - L\rho g \operatorname{sen}\theta) - \tau 2\pi rL = 0$$

$$\tau = \frac{\pi r^2(P_1 - P_2 - L\rho g \operatorname{sen}\theta)}{2\pi rL} = \frac{r}{2}\left(\frac{P_1 - P_2}{L} - \rho g \operatorname{sen}\theta\right)$$

A tensão de cisalhamento é definida como:

$$\tau = -\mu \frac{dV_x}{dr} \qquad \text{Eq. de Newton da viscosidade}$$

Assim:

$$\frac{dV_x}{dr} = -\frac{r}{2\mu}\left(\frac{P_1 - P_2}{L} - \rho g \operatorname{sen}\theta\right)$$

Integrando:

$$\int dV_x = -\frac{1}{2\mu}\left(\frac{P_1 - P_2}{L} - \rho g \operatorname{sen}\theta\right)\int r\,dr \qquad \text{(Integral indefinida)}$$

$$\Delta P = P_2 - P_1$$

$$V_x = \frac{r^2}{4\mu}\left(\frac{\Delta P}{L} + \rho g \operatorname{sen}\theta\right) + C_1 \qquad C_1 = \text{constante de integração}$$

Condição de contorno: $r = R \rightarrow V_x = 0$ (velocidade nula na parede do conduto).

Assim:

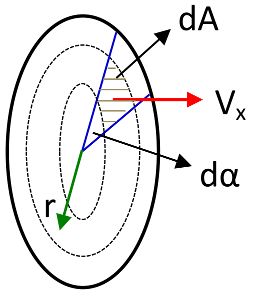
$$C_1 = -\frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{\Delta P}{L} + \rho g \,\mathrm{sen}\theta\right)$$

$$V_x = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\Delta P}{L} + \rho g \,\mathrm{sen}\theta\right)\left(r^2 - R^2\right) = -\frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{\Delta P}{L} + \rho g \,\mathrm{sen}\theta\right)\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

Na posição r = 0, ou seja, na posição axial, a velocidade é máxima:

$$V_{xmáx} = -\frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{\Delta P}{L} + \rho g \,\mathrm{sen}\theta\right)$$

Para cálculo da velocidade média podemos usar o teorema da média:

	$\bar{V} = \frac{\iint V_x dA}{\iint dA}$	$\rightarrow$	$\bar{V} = \frac{\iint V_x r dr d\alpha}{\iint r dr d\alpha}$
dA = rdrdα	$\bar{V} = \frac{\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^R \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\Delta P}{L} + \rho g \,\mathrm{sen}\theta\right)\left(r^2 - R^2\right) r dr}{\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^R r dr}$		

$$\bar{V} = -\frac{R^2}{8\mu}\left(\frac{\Delta P}{L} + \rho g \,\mathrm{sen}\theta\right) = -\frac{D^2}{32\mu}\left(\frac{\Delta P}{L} + \rho g \,\mathrm{sen}\theta\right) = \frac{V_{xmáx}}{2}$$

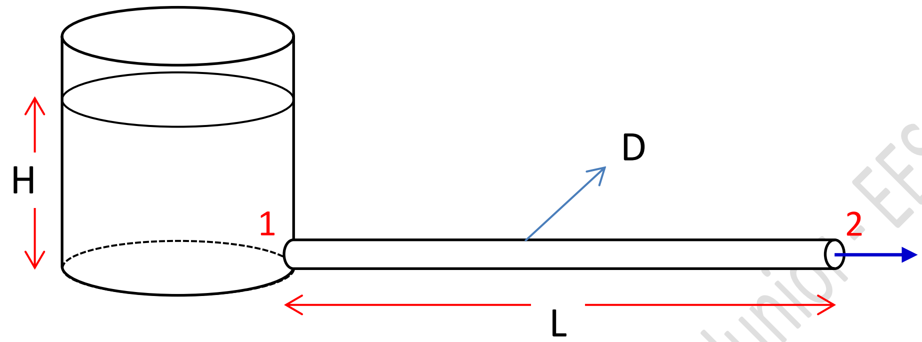
$$\dot{V} = \bar{V}A = \bar{V}\frac{\pi D^2}{4} = -\frac{\pi D^4}{128\mu}\left(\rho g \,\mathrm{sen}\theta + \frac{\Delta P}{L}\right)$$

(Equação de Hagen-Poiseuille)

A viscosidade de um fluido pode ser determinada:

$$\mu = -\frac{\pi D^4}{128\dot{V}}\left(\rho g \,\mathrm{sen}\theta + \frac{\Delta P}{L}\right)$$

Ex. – Um viscosímetro muito simples consiste em um tubo de pequeno diâmetro e grande comprimento, no interior do qual se produz um escoamento laminar permanente, com vazão conhecida. Supor: L= 1,0 m; D= 3,7 mm; H= 20 cm; $\dot{V}$= 6,3 cm^3/s; ρ= 1,0 g/cm^3. Estimar a viscosidade do fluido (μ).



Assumindo escoamento laminar permanente (Re < 2300):

$$\mu = -\frac{\pi D^4}{128\dot{V}}\left(\rho g \operatorname{sen}\theta + \frac{\Delta P}{L}\right)$$

O tubo está na horizontal (θ = 0), sen θ = zero.

$$\mu = -\frac{\pi D^4}{128\dot{V}}\left(\frac{\Delta P}{L}\right)$$

$$P_1 = \rho g H + P_{atm} \qquad e \qquad P_2 = P_{atm}$$

$$\mu = \frac{\pi D^4}{128\dot{V}}\left(\frac{\rho g H}{L}\right)$$

$$\mu = \frac{\pi(0{,}37)^4}{128 \times 6{,}3}\left(\frac{1 \times 981 \times 20}{100}\right) = 0{,}0143\,\frac{g}{cm.s}$$

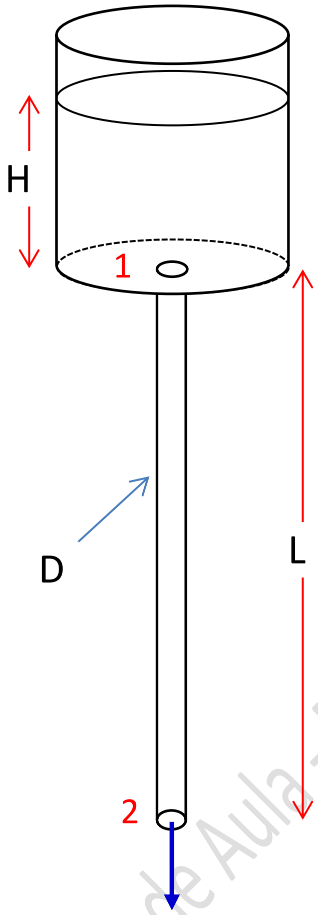
$$\mu = 1{,}43\text{x}10^{-2}\ g/cm.s = 1{,}43\text{x}10^{-3}\ kg/m.s = 1{,}43\text{x}10^{-3}\ N.s/m^2$$

O escoamento é mesmo laminar?

$$R_e = \frac{\rho \overline{V} D}{\mu} = \frac{\rho \dot{V} D}{A\mu} = \frac{4\rho\dot{V}}{\pi D \mu} = \frac{4 \times 1{,}0 \times 6{,}3}{\pi \times 0{,}37 \times 1{,}43\times10^{-2}} = 1516$$

Re < 2300 → escoamento laminar!

Se o tubo estiver na vertical, qual a vazão de saída?



Assumindo escoamento laminar permanente:

$$\dot{V} = -\frac{\pi D^4}{128\mu}\left(\rho g \operatorname{sen}\theta + \frac{\Delta P}{L}\right)$$

Neste caso, $\theta = 270^o \rightarrow \operatorname{sen}(270) = -1$

$$\dot{V} = -\frac{\pi D^4}{128\mu}\left(\frac{\Delta P}{L} - \rho g\right)$$

$P_1 = \rho g H + P_{atm}$ e $P_2 = P_{atm}$

$$\dot{V} = -\frac{\pi D^4}{128\mu}\left(\frac{-\rho g H}{L} - \rho g\right) = \frac{\rho g \pi D^4}{128\mu}\left(\frac{H}{L} + 1\right)$$

$$\dot{V} = \frac{1 \times 981 \times \pi (0{,}37)^4}{128 \times 1{,}43\times10^{-2}}\left(\frac{20}{100} + 1\right) = 37{,}9 \text{ cm}^3/\text{s}$$

O escoamento é mesmo laminar?

$$R_e = \frac{4\rho\dot{V}}{\pi D\mu} = \frac{4 \times 1{,}0 \times 37{,}9}{\pi \times 0{,}37 \times 1{,}43\times10^{-2}} = 9120$$

Re > 2300 → escoamento turbulento!

A força motora para o escoamento em dutos pode ser tanto a queda de pressão na direção do escoamento ou a componente do peso na direção do escoamento. Se o escoamento é para baixo, a gravidade ajuda o escoamento, se for para cima, a gravidade atua contra o escoamento.

Ex. - Um óleo com viscosidade de 0,40 N.s/m^2 e densidade de 900 kg/m^3 escoa em um duto com diâmetro de 20 mm e comprimento de 10 m. Para uma vazão de 2,0 L/min, qual deve ser o ΔP para: a) θ = 0° (tubo horizontal); b) θ = 60° (tubo inclinado).

$$\overline{V} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{4\dot{V}}{\pi D^2} = \frac{4 \times 2000}{\pi \times 2^2} = 637 \text{ cm/min} = 0{,}106 \text{ m/s}$$

$$R_e = \frac{\rho \overline{V} D}{\mu} = \frac{900 \times 0{,}106 \times 0{,}02}{0{,}40} = 4{,}77$$

$$\dot{V} = -\frac{\pi D^4}{128\mu}\left(\rho g \operatorname{sen}\theta + \frac{\Delta P}{L}\right) = -\frac{\pi 0{,}02^4}{128 \times 0{,}40}\left(900 \times 9{,}81 \operatorname{sen}\theta + \frac{\Delta P}{10}\right)$$

$$\left(8.829 \operatorname{sen}\theta + \frac{\Delta P}{10}\right) = -3.395{,}3$$

$\theta = 0° \rightarrow \operatorname{sen} 0° = 0 \rightarrow \Delta P = -33.953 \text{ N/m}^2$

$\theta = 60° \rightarrow \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866 \rightarrow \Delta P = -110.412 \text{ N/m}^2$

5.2 - Escoamento Turbulento Permanente e Incompressível

A diferença básica entre o escoamento laminar e o turbulento é provocada pelo comportamento caótico e aleatório dos parâmetros do escoamento turbulento (velocidade, pressão, tensão se cisalhamento, etc.).

O escoamento laminar plenamente desenvolvido é simples o suficiente para permitir as soluções diretas apresentadas no item anterior, contudo, qualquer que seja o tipo de escoamento, existe tensão de cisalhamento (atrito) entre o fluido e a parede da tubulação, que é responsável pela resistência ao escoamento. Podemos escrever essa tensão na forma:

$$\tau_s = f\frac{\rho\overline{V}^2}{8}$$

f = fator de atrito de Darcy-Weisbach.

Como no item anterior, podemos fazer um balanço de forças no elemento de fluido ($\sum F_x=0$), chegando ao seguinte resultado:

$$\tau_s = \frac{R}{2}\left(\frac{P_1 - P_2}{L} - \rho g \operatorname{sen}\theta\right)$$

$$\frac{\rho\overline{V}^2}{8} f = \frac{R}{2}\left(\frac{P_1 - P_2}{L} - \rho g \operatorname{sen}\theta\right)$$

$$\left(\frac{\Delta P}{L} + \rho g \operatorname{sen}\theta\right) = -f\frac{\rho\overline{V}^2}{4R}$$

Se o escoamento for laminar, temos da equação de Hagen-Poiseuille:

$$\overline{V} = -\frac{R^2}{8\mu}\left(\frac{\Delta P}{L} + \rho g \operatorname{sen}\theta\right) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\Delta P}{L} + \rho g \operatorname{sen}\theta\right) = -\frac{8\mu\overline{V}}{R^2}$$

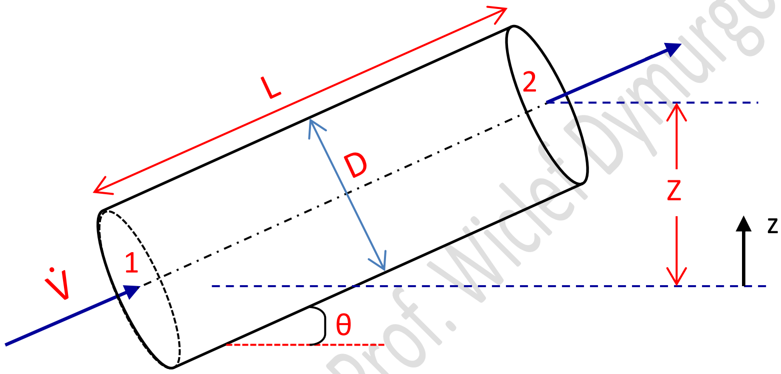
Assim:

$$\frac{8\mu\overline{V}}{R^2} = f\frac{\rho\overline{V}^2}{4R} \rightarrow f = \frac{32\mu}{\rho\overline{V}R} \rightarrow f = \frac{64}{\frac{\rho\overline{V}R}{\mu}} \rightarrow \boxed{f = \frac{64}{Re}}$$

A relação entre f e Re é muito mais complexa nos escoamentos turbulentos.

Considerações sobre Energia

Considere a equação da energia para escoamento em regime permanente de um fluido incompressível no interior de um tubo com diâmetro constante:



$$\frac{\Delta\overline{V}^2}{2} + g\Delta z + \frac{\Delta P}{\rho} + h_D = 0$$

h_D = perda de carga distribuída

Como D = cte, $V_1 = V_2$:

$$g\Delta z + \frac{\Delta P}{\rho} + h_D = 0 \rightarrow g(z_2 - z_1) + \frac{(P_2 - P_1)}{\rho} + h_D = 0$$

$$\text{sen}\theta = \frac{Z}{L} \rightarrow gL\text{sen}\theta + \frac{(P_2 - P_1)}{\rho} + h_D = 0 \rightarrow h_D = \frac{(P_1 - P_2)}{\rho} - gL\text{sen}\theta$$

Do balanço de forças anterior:

$$\tau_s = \frac{R}{2}\left(\frac{P_1 - P_2}{L} - \rho g sen\theta\right) \quad \rightarrow \quad \tau_s = \frac{\rho R}{2L}\left(\frac{P_1 - P_2}{\rho} - gLsen\theta\right)$$

Portanto:

$$\tau_s = \frac{\rho R}{2L} h_D \quad \rightarrow \quad h_D = \tau_s \frac{2L}{\rho R} \quad \rightarrow \quad \boxed{h_D = \frac{4L\tau_s}{\rho D}}$$

A equação acima mostra que a tensão de cisalhamento é responsável pela perda de carga nos escoamentos, sejam eles laminares ou turbulentos. Podemos ainda escrever:

$$\tau_s = f\frac{\rho \overline{V}^2}{8} \quad \rightarrow \quad h_D = \frac{4L\left(f\frac{\rho \overline{V}^2}{8}\right)}{\rho D} \quad \rightarrow \quad \boxed{h_D = f\frac{L\overline{V}^2}{2D}}$$

Eq. de Darcy-Weisbach

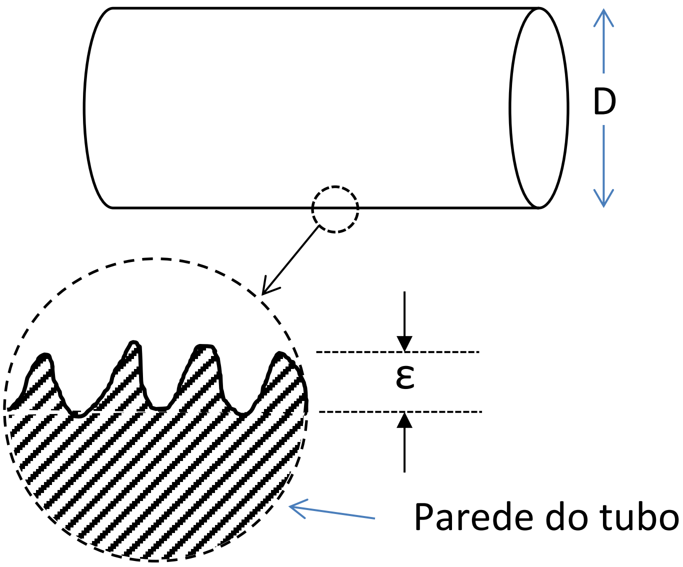
A relação acima é válida para qualquer escoamento incompressível em regime permanente e plenamente desenvolvido, não importando se o tubo está na horizontal ou inclinado.

Rugosidade Relativa

Como se comporta a relação f e Re nos escoamentos turbulentos?

Os escoamentos turbulentos são muito complexos e, na maioria dos casos, são analisados a partir de resultados experimentais e de formulações semi-empíricas.

Nos escoamentos turbulentos f é uma função de Re e da rugosidade superficial do tubo (ε) ou da rugosidade relativa (ε/D). Esta dependência funcional foi determinada a partir de um imenso conjunto de dados experimentais.



Rugosidade para alguns materiais:

Material	ε (mm)
Vidro, plástico	0
Concreto	0,9 – 9
Cobre, latão, alumínio	0,0015
Ferro fundido	0,25
Aço inoxidável	0,002
Aço galvanizado	0,15

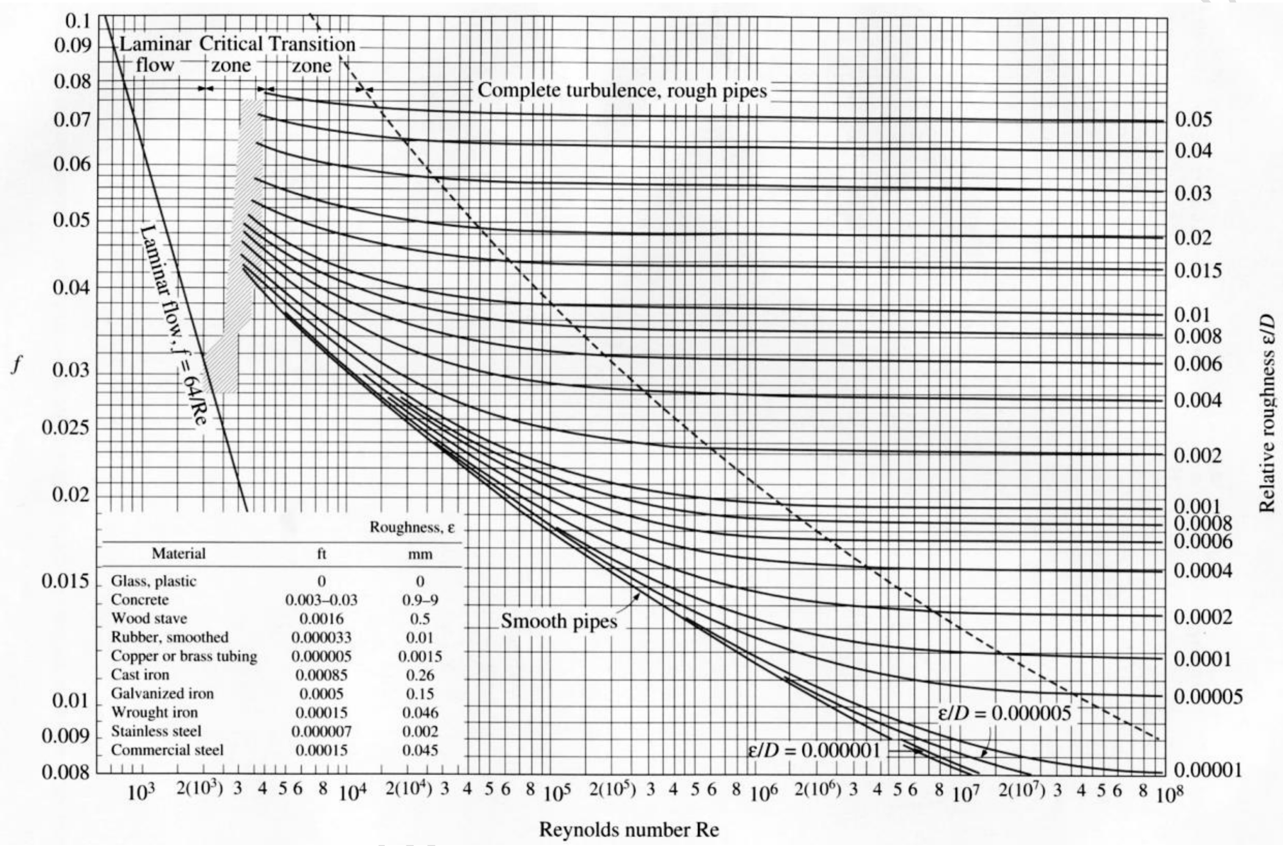
Você pode encontrar uma lista mais completa de materiais e muitas outras informações interessantes em: http://www.engineeringtoolbox.com/.

Geralmente, as relações entre f, Re e (ε/D) são expressas através de diagramas ou de correlações empíricas:

$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2{,}0\text{Log}\left(\frac{\varepsilon/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right)$	Equação de Colebrook Re > 5.000
$\frac{1}{\sqrt{f}} = -3{,}6\text{Log}\left[\left(\frac{\varepsilon/D}{3{,}7}\right)^{\frac{10}{9}} + \frac{6{,}9}{\text{Re}}\right]$	Equação de Haaland $10^4 < \text{Re} < 10^8$ $(\varepsilon/D) < 0{,}05$

$f = \dfrac{0{,}316}{Re^{1/4}}$	Equação de Blasius $Re < 10^5$ $(\varepsilon/D) \approx 0$

O diagrama mais usual é o diagrama de Moody:



Perdas Localizadas ou Singulares

A maioria das tubulações apresenta outros componentes além dos trechos retos de condutos.

Estes componentes adicionais (válvulas, curvas, etc.) também contribuem para a perda de carga na tubulação. Na prática, verifica-se que a queda de pressão no componente (acidente ou acessório) pode ser escrita:

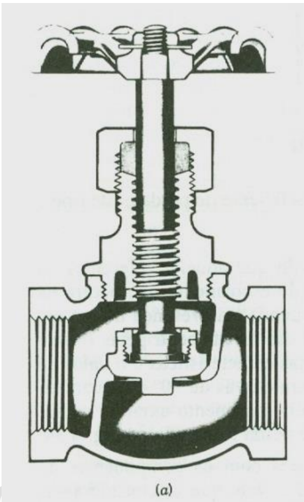
$$\Delta P = K_L \frac{1}{2} \rho \overline{V}^2$$

K_L = coeficiente de perda de carga localizada, que é obtido experimentalmente para cada componente;
$\overline{V}$ = velocidade média do fluido na entrada do acessório.

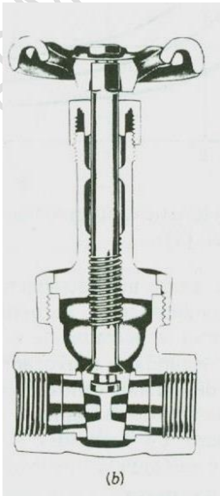
A perda de carga no acessório (h_L), chamada de perda de carga localizada, poder ser obtida:

$$\frac{\Delta P}{\rho} = h_L = K_L \frac{1}{2}\overline{V}^2 \qquad [m^2/s^2] \qquad \text{ou} \qquad h_L = K_L \frac{1}{2g}\overline{V}^2 \qquad [m]$$

Assim, a perda de carga total da tubulação será a soma da perda de carga atribuída aos trechos retos de condutos, denominada por perda de carga distribuída (h_D), com a perda de carga dos acidentes (h_L).



Válvula globo



Válvula gaveta

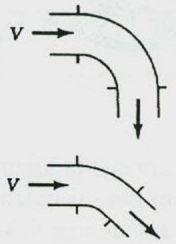
As perdas singulares também podem ser fornecidas com base no comprimento equivalente de conduto (L_{eq}). Neste caso, a perda de carga de um acessório é fornecida em termos do comprimento equivalente de conduto que produziria a mesma perda de carga do acessório. Assim:

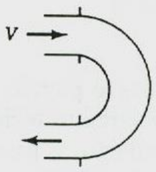
$$\frac{L_{eq}\overline{V}^2}{2D} f = K_L \frac{1}{2}\overline{V}^2 \qquad \rightarrow \qquad L_{eq} = K_L \frac{D}{f}$$

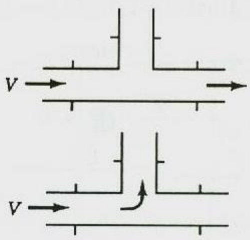
Na expressão acima, D e *f* são baseados na tubulação que contém o acessório. Assim, somam-se ao comprimento do conduto, os comprimentos equivalentes de cada componente, obtendo-se um comprimento total, que será utilizado para o cálculo da perda de carga total da tubulação.

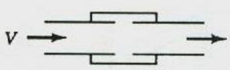
Tabela 8.2 Coeficientes de perda ($h_L = K_L\, V^2/2g$) para alguns componentes de tubulações (Dados obtidos nas Refs. [5, 10,27]).

Componente	K_L
a. Curvas	
90° (raio normal), flangeada	0,3
90° (raio normal), rosqueada	1,5
90° (raio longo), flangeada	0,2
90° (raio longo), rosqueada	0,7
45° (raio longo), flangeada	0,2
45° (raio normal)	0,4
b. Retornos (curvas com 180°)	
flangeados	0,2
rosqueados	1,5
c. Tês	
Escoamento alinhado, flangeado	0,2
Escoamento alinhado, rosqueado	0,9
Escoamento derivado, flangeado	1,0
Escoamento derivado, rosqueado	2,0
d. União rosqueada	0,08
e. Válvulas*	
Globo, totalmente aberta	10
Gaveta, totalmente aberta	0,15
Gaveta, 1/4 fechada	0,26
Gaveta, 1/2 fechada	2,1
Gaveta, 3/4 fechada	17
Retenção, escoamento a favor	2
Retenção, escoamento contrário	∞
Esfera, totalmente aberta	0,05
Esfera, 1/3 fechada	5,5
Esfera, 2/3 fechada	210









h

Adaptado de: MUNSON, B. R.; YOUNG, D. F.; OKIISHI, T. H. Fundamentos da Mecânica dos Fluidos. Vol 1 e 2, Edgard Blucher, 2003.

Tabela 4.6 – Coeficiente de perda de carga localizada K

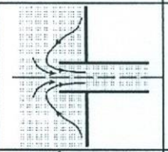
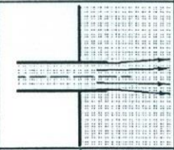
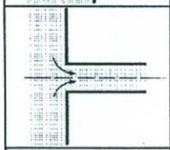
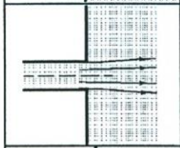
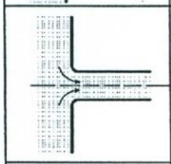
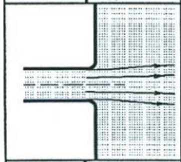
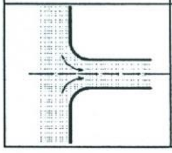
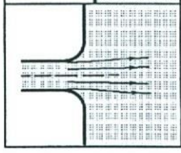
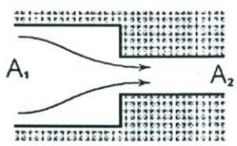
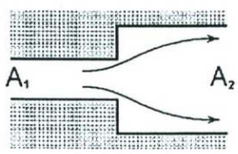
Forma	Descrição	K	Forma	Descrição	K
	Entrada com reentrância	0,8		Saída com reentrância	1,0
	Entrada com canto vivo	0,5		Saída com canto vivo	1,0
	Entrada com pequeno arredondamento	0,2		Saída com pequeno arredondamento	1,0
	Entrada com arredondamento acentuado	0,04		Saída com arredondamento acentuado	1,0

Tabela 4.7 – Coeficiente de perda de carga localizada K

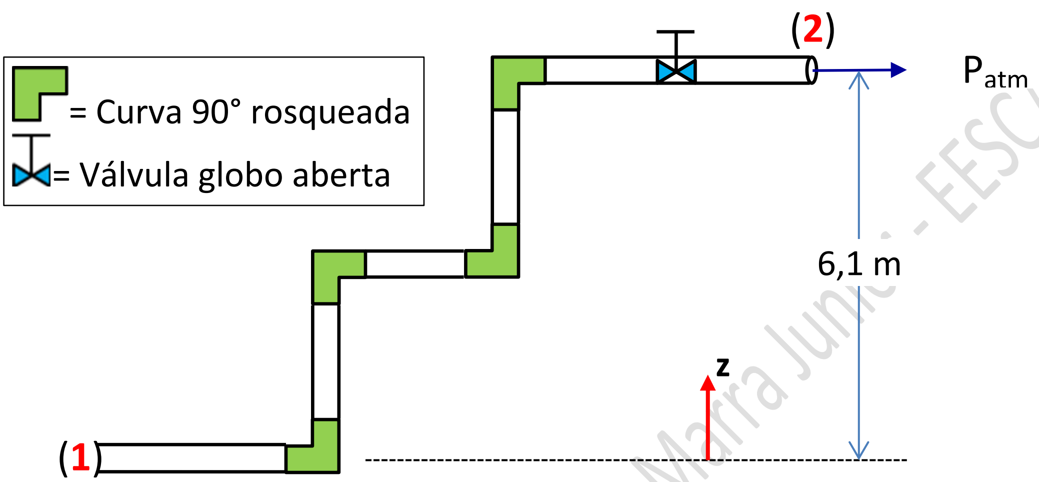
Forma	Descrição	A_2/A_1	K
	Contração brusca de área de A_1 para A_2	0,0	0,50
		0,2	0,43
		0,4	0,30
		0,6	0,17
		0,8	0,05
		1,0	0,00
Forma	**Descrição**	**A_1/A_2**	**K**
	Expansão brusca de área de A_1 para A_2	0,0	1,00
		0,2	0,65
		0,4	0,33
		0,6	0,16
		0,8	0,07
		1,0	0,00

Adaptado de: GIORGETTI, M.F. Fundamentos de Fenômenos de Transporte para Estudantes de Engenharia. Suprema, 2008

Tabela de perdas de cargas localizadas em conexões, considerando-se os comprimentos equivalentes em metros de canalização

CONEXÃO	Diâmetro nominal X Equivalência em metros de canalização									
	MATERIAL	**3/4"**	**1"**	**1 1/4"**	**1 1/2"**	**2"**	**2 1/2"**	**3"**	**4"**	**5"**
Curva 90° 	PVC	0,5	0,6	0,7	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,9
	Metal	0,4	0,5	0,6	0,7	0,9	1,0	1,3	1,6	2,1
Curva 45° 	PVC	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
	Metal	0,2	0,2	0,3	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,9
Joelho 90° 	PVC	1,2	1,5	2,0	3,2	3,4	3,7	3,9	4,3	4,9
	Metal	0,7	0,8	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	3,4	4,2
Joelho 45° 	PVC	0,5	0,7	1,0	1,3	1,5	1,7	1,8	1,9	2,5
	Metal	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	0,9	1,2	1,5	1,9
Tê de passagem direta 	PVC	0,8	0,9	1,5	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	3,3
	Metal	0,4	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,6	2,1	2,7

Ex. – Água a 20 °C escoa no interior de uma tubulação de cobre com diâmetro de 19 mm. A partir da figura, determine a pressão no ponto (1): a) os efeitos viscosos são desprezados; b) todas as perdas de carga são consideradas. O trechos retos de condutos somam 18,3 m. A vazão da água é de 45 L/min. g = 9,81 m/s^2.



Cobre → ε = 0,0015 mm ε/D = 0,0015/19 = 7,9x10^{-5}

Água 20 °C	$\rho = 998$ kg/m^3	$\mu = 1{,}0\times10^{-3}$ kg/ms

$$\dot{V} = 45 \text{ L/min} = 0{,}00075 \text{ m}^3/\text{s}$$

Velocidade média do escoamento:

$$\overline{V} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{4\dot{V}}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0{,}00075}{\pi(0{,}019)^2} = 2{,}64 \text{ m/s}$$

a) desprezar as perdas de carga → $h_P = 0$

$$\frac{\Delta\overline{V}^2}{2} + g\Delta z + \frac{\Delta P}{\rho} = 0 \qquad \text{Eq. de Bernoulli}$$

$$\frac{\overline{V}_2^2-\overline{V}_1^2}{2}+g(z_2-z_1)+\frac{(P_2-P_1)}{\rho}=0$$

$\overline{V}_1=\overline{V}_2=2{,}64$ m/s	$z_1=0$ $z_2=6{,}1$ m	$P_1=?$ $P_2=P_{atm}$ (jato livre)

$$9{,}81(6{,}1)+\frac{(101.325-P_1)}{998}=0 \quad \rightarrow \quad P_1=161.046\ \text{N/m}^2$$

Absoluta

b) considerar as perdas de carga

Perda de carga distribuída:	$h_D=f\dfrac{L\overline{V}^2}{2D}$
Perda de carga localizada:	$h_L=K_L\dfrac{1}{2}\overline{V}^2$

L = 18,3 m (trecho reto de condutos)
Curva 90° rosqueada: $K_L=1{,}5$
Válvula globo aberta: $K_L=10$

Número de Reynolds:

$$Re=\frac{\rho\overline{V}D}{\mu}=\frac{998\times2{,}64\times0{,}019}{1{,}0\times10^{-3}}=50.060=5{,}0\times10^4$$

Fator de atrito:

$$f=\frac{0{,}316}{Re^{1/4}}=\frac{0{,}316}{50.060^{0{,}25}}=0{,}021$$

$$\frac{\Delta\overline{V}^2}{2}+g\Delta z+\frac{\Delta P}{\rho}+f\frac{L\overline{V}^2}{2D}+\sum\frac{K_L\overline{V}^2}{2}=0$$

$$h_D = 0{,}021 \frac{18{,}3(2{,}64)^2}{2x0{,}019} = 70{,}5\ m^2/s^2$$

$$h_L = (4 \times 1{,}5 + 10) \frac{2{,}64^2}{2} = 55{,}8\ m^2/s^2$$

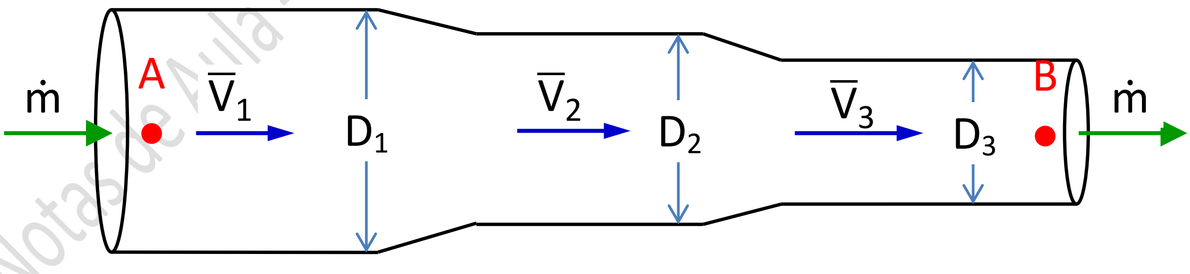
$$9{,}81(6{,}1) + \frac{(101.325 - P_1)}{998} + 70{,}5 + 55{,}8 = 0$$

$$P_1 = 287.094\ N/m^2$$

Sistemas com Múltiplos Tubos

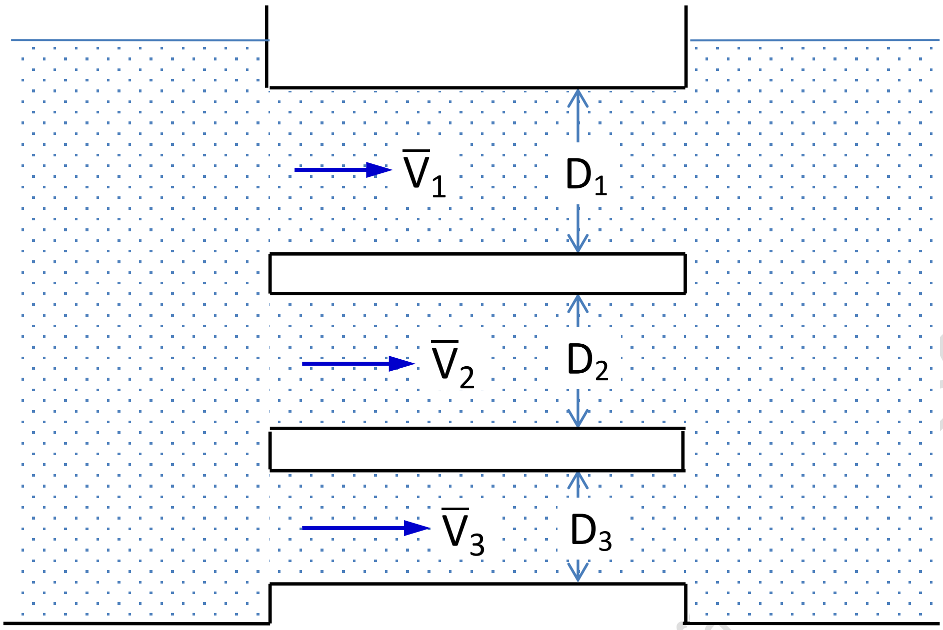
Muitos sistemas de distribuição de fluido apresentam mais do que um único conduto. As equações que descrevem os escoamentos em sistemas com múltiplos condutos são as mesmas que descrevem os sistemas de único conduto. Porém, devido ao número de incógnitas envolvidas, a complexidade da resolução é maior.

Arranjo de Tubos em Série



No arranjo de tubos em série, para um fluido incompressível, a vazão mássica é a mesma em cada trecho da tubulação e a perda de carga entre os pontos A e B é a soma das perdas em cada um dos trechos: $h_{PAB} = h_{P1} + h_{P2} + h_{P3}$.

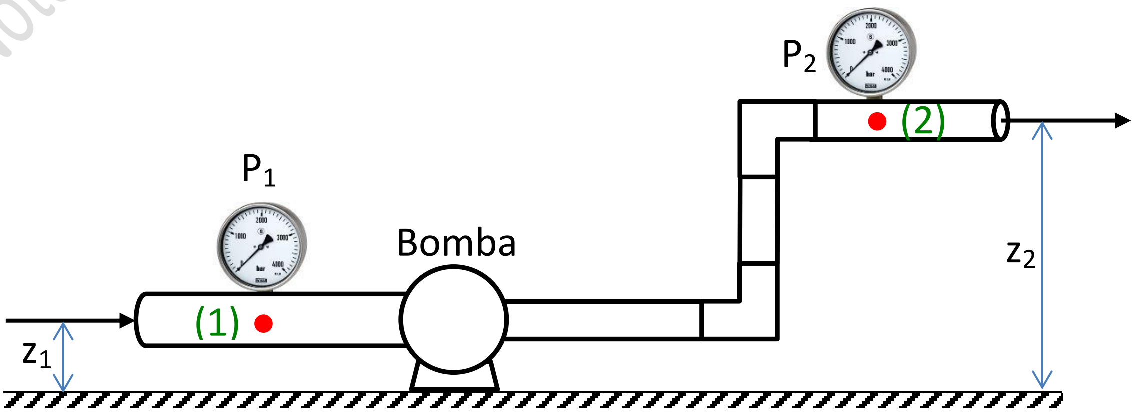
Arranjo de Tubos em Paralelo



No arranjo de tubos em paralelo, a vazão mássica total é a soma das vazões mássicas em cada um dos tubos e a perda de carga em cada um dos trechos é a mesma: $h_{P1} = h_{P2} = h_{P3}$.

Bombas e Turbinas

As bombas adicionam energia ao fluido, ou seja, realizam trabalho sobre o fluido, enquanto as turbinas recebem energia do fluido, isto é, o fluido realiza trabalho sobre a turbina. A figura abaixo mostra uma instalação típica com uma bomba:



A equação da energia na presença de uma máquina pode ser escrita:

$$\frac{\Delta \overline{V}^2}{2} + g\Delta z + \frac{\Delta P}{\rho} + h_P = \widehat{W}_S$$

em que $\widehat{W}_S$ é o trabalho (energia) líquido, efetivamente, transferido ao fluido pela bomba. Vamos designá-lo por $\widehat{W}_{LIQ}$. O termo h_P é a perda de carga na tubulação (distribuída + localizada).

As perdas ocorridas na bomba devido ao atrito entre as partes móveis devem ser consideradas por meio de sua eficiência global (η_B), definida por:

$$\eta_B = \frac{\text{potência fornecida ao fluido}}{\text{potência de eixo fornecida à bomba}} = \frac{\widehat{W}_{LIQ}}{\widehat{W}_{EIXO}}$$

$\widehat{W}_{EIXO}$ = trabalho de eixo fornecido ao rotor da bomba por meio de um motor elétrico de acionamento. A eficiência da bomba é fornecida pelo fabricante do equipamento.

Analogamente, para a turbina:

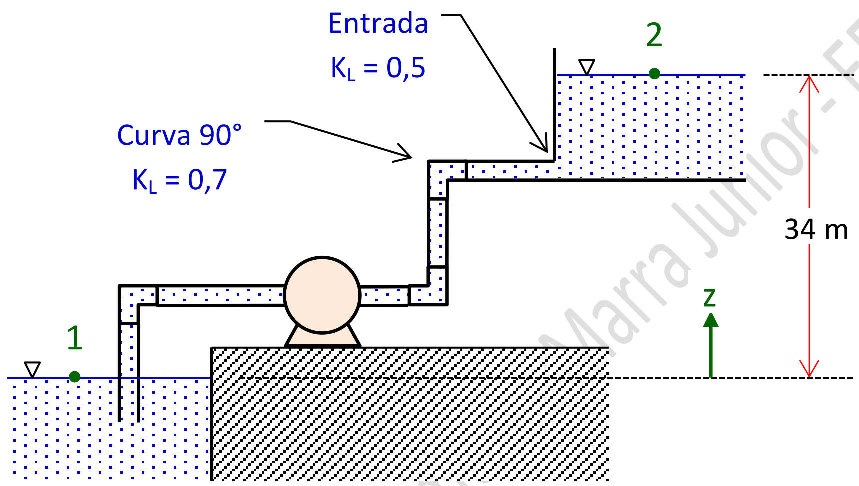
$$\eta_T = \frac{\text{potência de eixo fornecida à turbina}}{\text{potência fornecida ao fluido}} = \frac{\widehat{W}_{EIXO}}{\widehat{W}_{LIQ}}$$

Assim, podemos escrever a equação da energia:

Bomba:	$\frac{\Delta \overline{V}^2}{2} + g\Delta z + \frac{\Delta P}{\rho} + h_P = \eta_B \widehat{W}_{EIXO}$
Turbina:	$\frac{\Delta \overline{V}^2}{2} + g\Delta z + \frac{\Delta P}{\rho} + h_P = \frac{\widehat{W}_{EIXO}}{\eta_T}$

Ex. - Água deve bombeada de um lago até um reservatório, com uma vazão de 400 L/min, usando-se uma bomba 80% eficiente. Qual a potência da bomba? Para se dobrar a vazão, qual a nova potência da bomba, com mesma eficiência. O diâmetro da tubulação é de 5 cm, seu comprimento total é de 142 m e sua rugosidade é de 0,15 mm.

$g = 9{,}8\ m/s^2$; $\rho = 995\ kg/m^3$; $\mu = 1{,}0 \times 10^{-3}\ kg/ms$



Vamos aplicar o balanço de energia entre os pontos 1 e 2:

$$\frac{\Delta \overline{V}^2}{2} + g\Delta z + \frac{\Delta P}{\rho} + f\frac{L\overline{V}^2}{2D} + \sum \frac{K_L \overline{V}^2}{2} = \eta_B \widehat{W}_{EIXO}$$

$\overline{V}_1 = \overline{V}_2 = 0$ (nível constante)	$z_1 = 0$ $z_2 = 34$ m	$P_1 = P_2 = P_{atm}$

Velocidade no interior da tubulação:

$$\overline{V} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{4\dot{V}}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0{,}0067}{\pi (0{,}05)^2} = 3{,}4\ m/s$$

Número de Reynolds:

$$Re = \frac{\rho \bar{V} D}{\mu} = \frac{995 \text{ x } 3{,}4 \text{ x } 0{,}05}{1{,}0 \text{x} 10^{-3}} = 169.150 = 1{,}69 \text{x} 10^{5}$$

$\varepsilon = 0{,}15$ mm	$\varepsilon/D = 0{,}15/50 = 0{,}003$

Para cálculo do fator de atrito podemos usar:

$f = \dfrac{1{,}235}{\left[LN\left(\dfrac{\varepsilon/D}{3{,}7} + \dfrac{5{,}74}{Re^{0,9}}\right)\right]^{2}}$	$5.000 < Re < 10^{8}$ $10^{-6} < \varepsilon/D < 10^{-2}$	Equação de Swamee - Jain

$$f = 0{,}0253$$

$$9{,}8(34\text{-}0) + 0{,}0253 \frac{142 \text{ x } 3{,}4^{2}}{2 \text{ x } 0{,}05} + \frac{3{,}4^{2}}{2}(3 \text{ x } 0{,}7+0{,}5) = 0{,}8\widehat{W}_{EIXO}$$

$$333{,}2 + 415{,}3 + 15{,}0 = 0{,}8\widehat{W}_{EIXO}$$

$$\widehat{W}_{EIXO} = 954{,}4 \text{ m}^{2}/\text{s}^{2}$$

Potência ($\dot{W}_{EIXO}$) $= \dot{m}\widehat{W}_{EIXO} = 995 \text{ x } 0{,}0067 \text{ x } 954{,}4 = 6.362{,}5$ Watt

1 hp = 745,7 W $\rightarrow \dot{W}_{EIXO} = 8{,}5$ hp

Dobrando a vazão:

$\bar{V} = 6{,}8$ m/s	Re = 338.300	$f = 0{,}0249$

$$9{,}8(34\text{-}0) + 0{,}0249 \frac{142 \text{ x } 6{,}8^{2}}{2 \text{ x } 0{,}05} + \frac{6{,}8^{2}}{2}(3 \text{ x } 0{,}7+0{,}5) = 0{,}8\widehat{W}_{EIXO}$$

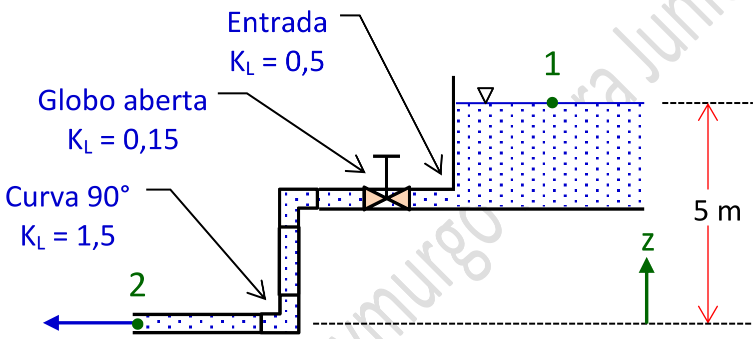
$$333{,}2 + 1.635 + 60{,}1 = 0{,}8\widehat{W}_{EIXO}$$

$$\widehat{W}_{EIXO} = 2.535{,}4 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$\dot{W}_{EIXO} = \dot{m}\widehat{W}_{EIXO} = 995 \text{ x } 0{,}0134 \text{ x } 2.535{,}4 = 33.804 \text{ Watt}$$

$$1 \text{ hp} = 745{,}7 \text{ W} \rightarrow \dot{W}_{EIXO} = 45 \text{ hp}$$

Ex. - Água [viscosidade cinemática (ν) = $1{,}307\text{x}10^{-6}$ m^2/s] escoa de um grande reservatório através de uma tubulação (ε = 0,26 mm) com comprimento de 20 m e diâmetro de 5 cm. Determine a vazão de saída. g = 9,8 m/s^2.



Vamos aplicar o balanço de energia entre os pontos 1 e 2:

$$\frac{\Delta\overline{V}^2}{2} + g\Delta z + \frac{\Delta P}{\rho} + f\frac{L\overline{V}^2}{2D} + \sum\frac{K_L\overline{V}^2}{2} = 0$$

$\overline{V}_1 = 0$ (nível constante) $\overline{V}_2 = ?$	$z_1 = 5$ m $z_2 = 0$	$P_1 = P_2 = P_{atm}$

Neste caso, a velocidade no interior da tubulação é desconhecida, assim Re e f não podem ser calculados diretamente.

$$\frac{\overline{V}_2^2}{2} + 9{,}8(0\text{-}5) + f\frac{20 \text{ x } \overline{V}_2^2}{2 \text{ x } 0{,}05} + \frac{\overline{V}_2^2}{2}(2 \text{ x } 1{,}5 + 0{,}5 + 0{,}15) = 0$$

$$\frac{\overline{V}_2^2}{2} - 49 + 400f\frac{\overline{V}_2^2}{2} + \frac{\overline{V}_2^2}{2}(3{,}65) = 0$$

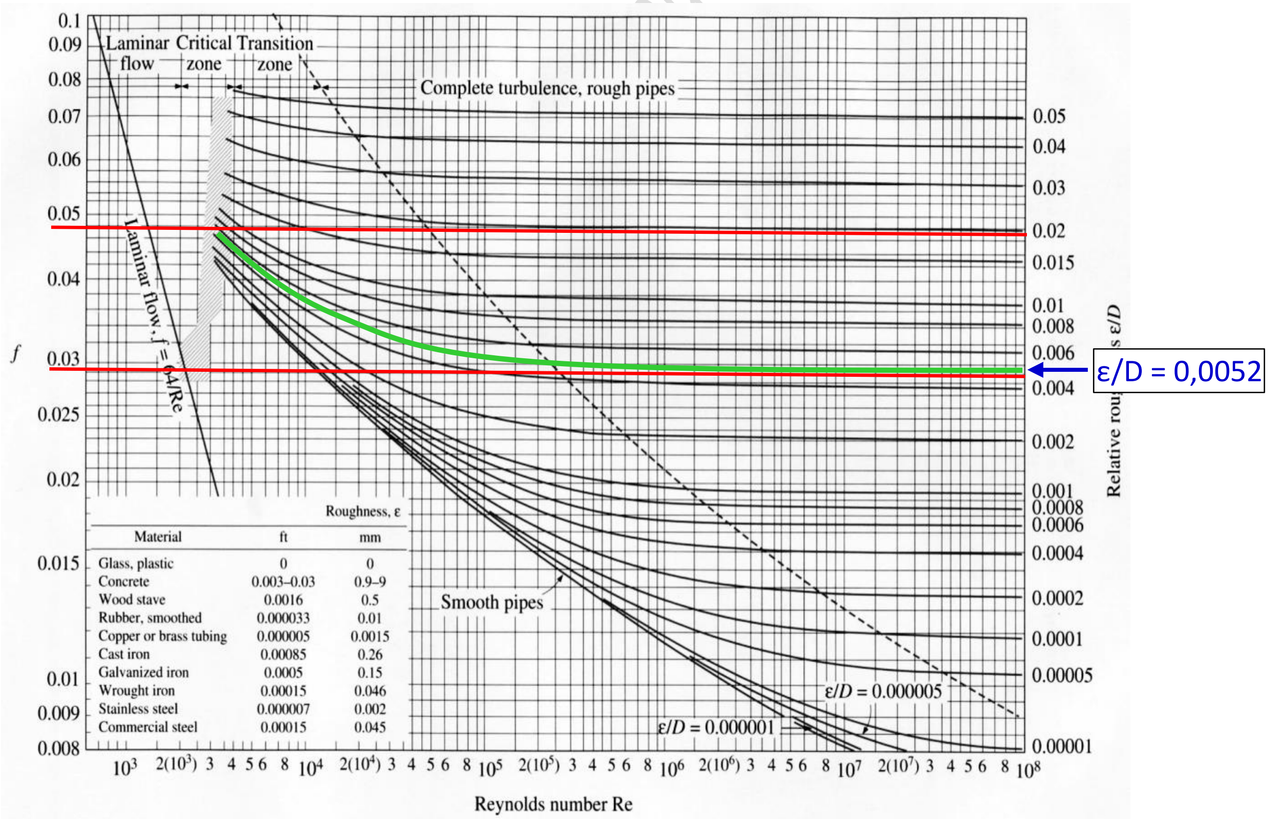
$$\frac{\overline{V}_2^2}{2}(4{,}65+400f) = 49 \quad \rightarrow \quad \overline{V}_2 = \sqrt{\frac{98}{4{,}65+400f}}$$

Número de Reynolds:

Viscosidade cinemática $(\nu = \frac{\mu}{\rho}) = 1{,}307\text{x}10^{-6}\ m^2/s$

$$Re = \frac{\rho\overline{V}D}{\mu} = \frac{\overline{V}D}{\nu} = \frac{\overline{V}_2 \text{ x } 0{,}05}{1{,}307\text{x}10^{-6}} = 38.255\ \overline{V}_2$$

$\varepsilon = 0{,}26$ mm	$\varepsilon/D = 0{,}26/50 = 0{,}0052$



Assumindo escoamento turbulento, do diagrama de Moody, vemos que, para $\varepsilon/D = 0{,}0052$, o valor de fator de atrito está entre 0,03 e 0,05. Vamos assumir como estimativa inicial um fator de atrito de 0,05, assim:

$f = 0{,}05$	$\rightarrow$	$\overline{V}_2 = \sqrt{\dfrac{98}{4{,}65 + 400 \times 0{,}05}}$	$\rightarrow$	$\overline{V}_2 = 2{,}0$ m/s

Com o valor da velocidade, calculamos Re:

$$Re = 38.255 \times 2{,}0 = 76.510$$

Com esse valor de Re, calculamos o novo f:

$$f = \frac{1{,}235}{\left[LN\left(\dfrac{\varepsilon/D}{3{,}7} + \dfrac{5{,}74}{Re^{0{,}9}}\right)\right]^2}$$

Equação de Swamee - Jain

$$f = 0{,}030$$

Com esse novo valor de f, calculamos um novo valor de $\overline{V}_2$:

$f = 0{,}03$	$\rightarrow$	$\overline{V}_2 = \sqrt{\dfrac{98}{4{,}65 + 400 \times 0{,}03}}$	$\rightarrow$	$\overline{V}_2 = 2{,}42$ m/s

Com o valor da velocidade, calculamos Re:

$$Re = 38.255 \times 2{,}4 = 91.812$$

Com esse valor de Re, calculamos o novo f:

$$f = 0{,}0298$$

Com esse novo valor de f, calculamos um novo valor de $\overline{V}_2$:

$f = 0{,}0298$	$\rightarrow$	$\overline{V}_2 = \sqrt{\dfrac{98}{4{,}65 + 400 \times 0{,}0298}}$	$\rightarrow$	$\overline{V}_2 = 2{,}43$ m/s

Este valor da velocidade é muito próximo do valor anterior, assim podemos assumir que este seja o valor final da velocidade.

Vazão da água:

$$\dot{V} = \overline{V}A = \overline{V}\frac{\pi D^2}{4} = \frac{2{,}43 \times \pi(0{,}05)^2}{4} = 0{,}00477\ \text{m}^3/\text{s} = 283{,}2\ \text{L/min}$$